4 ہندسی عمل Construction

آیئے سیکھیں

- متشابہ مثلثوں کی تشکیل
  * دو متشابہ مثلثوں میں سے ایک مثلث کے ضلعوں اور دوسرے مثلث کے نظیری ضلعوں کی نسبت دی جائے تو دوسرا مثلث بنانا۔
    (i) ایک بھی نقطہ راس مشترک نہ ہو۔
    (ii) ایک نقطہ راس مشترک ہو۔
- دائرے کا مماس بنانا۔
  * دائرے پر واقع نقطے سے گزرتا ہوا دائرے پر مماس بنانا۔
    (i) دائرے کے مرکز کا استعمال کرکے۔
    (ii) دائرے کے مرکز کا استعمال کیے بغیر
  * دائرے کے بیرونی نقطے سے دائرے پر مماس بنانا۔

آیئے ذرا یاد کریں

درج ذیل ہندسی عمل ہم گذشتہ جماعتوں میں سیکھ چکے ہیں۔ان اعمال کا اعادہ کریں۔

- دیے ہوئے خط کے باہر دیے ہوئے نقطے سے خط کے متوازی گزرتا ہوا خط کھینچنا۔
- دیے ہوئے قطعہ خط کا عمودی ناصف کھینچنا۔
- مثلث کے اضلاع کی لمبائیوں اور زاویوں میں سے کافی اجزا دیے ہوں تو مثلث بنانا۔
- دیے ہوئے قطعہ کو دی ہوئی تعداد کے مساوی حصوں میں تقسیم کرنا۔
- دی ہوئی نسبت میں دیے ہوئے قطعہ خط کو تقسیم کرنا۔
- دیے ہوئے زاویے کے متماثل زاویہ بنانا۔

نویں جماعت میں ہم نے اسکول کے اطراف کا نقشہ تیار کرنے کی سرگرمی کی ہے۔کوئی عمارت تعمیر کرنے سے پہلے اس عمارت کا خاکہ تیار کرتے ہیں۔اسکول کے اطراف کا ماحول اور اس کا نقشہ،عمارت اور اس کا خاکہ ایک دوسرے کے متشابہ ہوتے ہیں۔جغرافیہ،فن تعمیر،میکانیات وغیرہ شعبوں میں متشابہ اشکال بنانے کی ضرورت پیش آتی ہے۔مثلث سب سے آسان بند مشکل ہے۔لہٰذا آیئے اس کا مشاہدہ کریں کہ دیے ہوئے مثلث کے متشابہ مثلث کس طرح بناتے ہیں۔

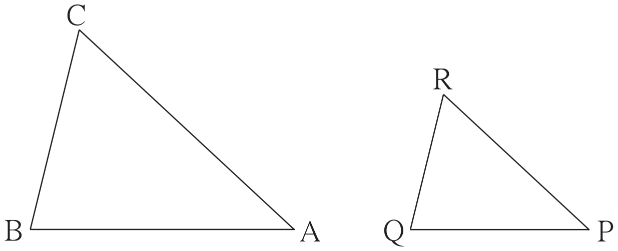
آیئے سمجھ لیں

متشابہ مثلث بنانا (Construction of similar triangles)

جب ایک مثلث کے اضلاع دیے ہوئے ہوں تو اس کے متشابہ مثلث کے نظیری ضلعوں کی نسبت کی شرط پوری کرنے والا مثلث بنانا۔

دو متشابہ مثلثوں کے نظیری اضلاع یکساں تناسب میں ہوتے ہیں اور ان کے نظیری زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ اس کا استعمال کر کے دیے ہوئے مثلث کے متشابہ مثلث بنایا جا سکتا ہے۔

مثال (1) : $\triangle ABC \sim \triangle PQR$، $\triangle ABC$ میں $AB = 5.4$ سم، $BC = 4.2$ سم، $AC = 6.0$ سم، $AB : PQ = 3 : 2$ ہو تو $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ بنایئے۔



شکل 4.1

(کچی شکل)

پہلے دی ہوئی پیمائشوں کے مطابق ΔABC بنایئے۔

$\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ متشابہ ہیں۔

$\therefore$ ان کے نظیری اضلاع تناسب میں ہیں۔

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{3}{2} \quad \text{... (I)}$$

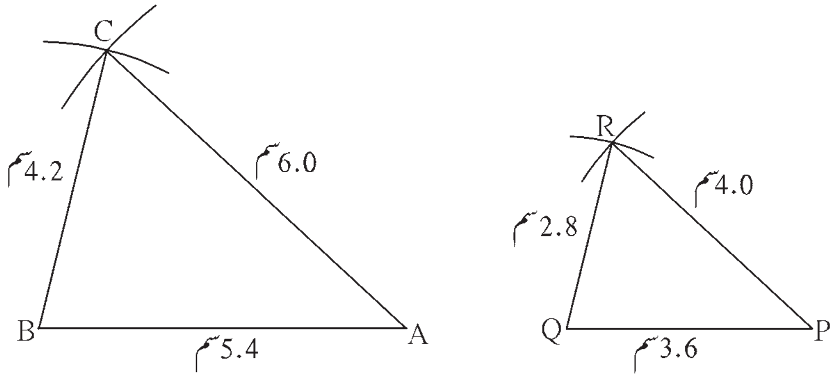
AB، BC اور AC کی لمبائیاں معلوم ہیں اس لیے درج بالا مساوات کی رو سے PQ، QR، PR اضلاع کی لمبائیاں حاصل ہوتی ہیں۔

مساوات (1) سے

$$\frac{5.4}{PQ} = \frac{4.2}{QR} = \frac{6.0}{PR} = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ $PQ = 3.6$ سم , $QR = 2.8$ سم , $PR = 4.0$ سم

$\triangle PQR$ کے تمام اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہونے پر ہم وہ مثلث بنا سکتے ہیں۔



شکل **4.2**

مزید معلومات کے لیے

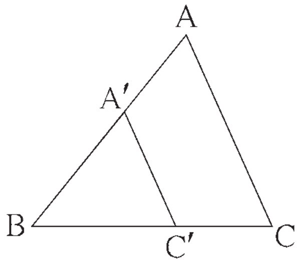
بعض مرتبہ دیے ہوئے مثلث کے متشابہ مثلث بنانا ہوتا ہے اس کے ضلع کی لمبائی اسکیل پٹی کی مدد سے معلوم نہیں کر سکتے۔ اس وقت دیے ہوئے قطعہ خط کو دی ہوئی تعداد کے مساوی حصوں میں تقسیم کرنا، اس عمل کا استعمال کر کے مثلث کے ضلعوں کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔

مثلاً ضلع AB کی لمبائی $\frac{11.6}{3}$ سم ہو تو 11.6 سم لمبائی کا قطعہ خط بنا کر اس کو 3 مساوی حصوں میں تقسیم کریں تو قطعہ AB کھینچا جا سکتا ہے۔

درج بالا مثال (1) میں ہندسی عمل میں دیے ہوئے اور بنائے جانے والے مثلث میں کوئی مشترک راس نہیں ہے۔

اگر ایک راس مشترک ہو تو مثلث بنانے کے لیے ذیل میں دی ہوئی مثال کے مطابق عمل کرنا آسان ہوتا ہے۔

مثال (2) : کوئی بھی ایک $\triangle ABC$ بنائیے۔



شکل **4.3**

$\triangle ABC$ کے متشابہ، $\triangle A'BC'$ اس طرح بنائیے کہ $AB : A'B = 5 : 3$

تجزیہ : B, A', A اسی طرح B, C', C ہم خطی نقاط لیں۔

$\triangle ABC \sim \triangle A'BC'$, $\therefore \angle ABC = \angle A'BC'$

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}$$

اس لیے $\triangle ABC$ کے اضلاع، $\triangle A'BC'$ کے نظیری اضلاع سے بڑے ہوں گے۔

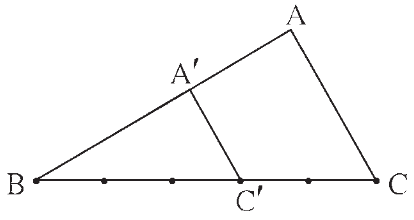
اس لیے اگر قطعہ BC کے 5 مساوی حصے کریں تو اس میں سے تین حصوں کے مساوی لمبائی کا قطعہ BC' ہوگا۔

$\triangle ABC$ بنا کر قطعہ BC پر نقطہ B سے تین حصوں کے مساوی فاصلے پر نقطہ C' ہونا چاہیے۔ نقطہ C' سے قطعہ AC کے متوازی بنایا گیا خط قطعہ BA کو جس نقطے پر قطع کرے وہ نقطہ A' ہوگا۔

$$\frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{3} \quad \ldots \text{(عمل عکس سے)}$$

یعنی، $\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{5}$

ہندسی عمل کے مرحلے :



شکل 4.4

(1) کوئی بھی ایک $\triangle ABC$ بنائیے۔

(2) قطعہ BC کے 5 مساوی حصے کیجیے۔

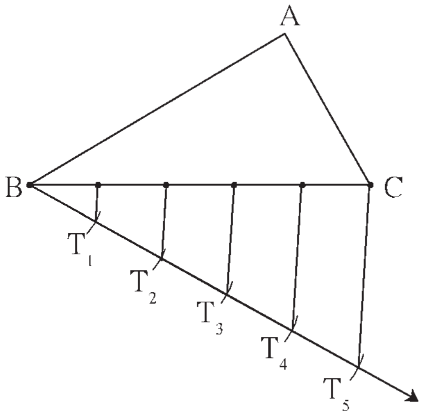
(3) نقطہ B سے تیسرے نقطے کو C' نام دیجیے۔

$\therefore BC' = \frac{3}{5} BC$

(4) اب C' سے CA کے متوازی خط کھینچیے ، جو BA کو جس نقطے پر قطع کرے اس نقطہ کو A' نام دیجیے۔

(5) $\triangle ABC$ کے متشابہ $\triangle A'BC'$ مطلوبہ مثلث ہے۔

نوٹ : BC کے پانچ مساوی حصے کرنے کے دوران خط BC کے جس سمت میں A ہے۔اس کے مخالف سمت میں B سے گذرتے ہوئے ایک شعاع بنائیے اس طرح حصے کرنے میں آسانی ہوتی ہے۔

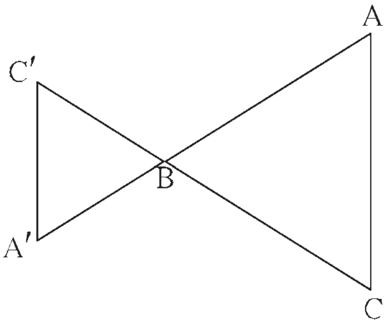


شکل 4.5

اس شعاع پر $BT_1 = T_1T_2 = T_2T_3 = T_3T_4 = T_4T_5$ ایسے مساوی حصے لیں۔

T_5C کو ملائیے اور T_1، T_2، T_3، T_4 سے T_5C کے متوازی خطوط کھینچیے۔

غور کیجیے

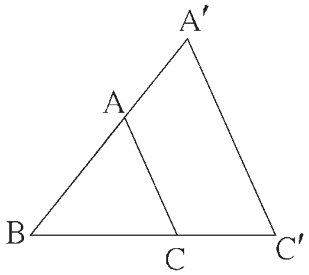


شکل 4.6

متشابہ مثلث بنانے کے لیے شکل میں دکھائے ہوئے پیمانے کے مطابق بھی $\triangle A'BC'$ بنایا جاسکتا ہے۔

اس شکل کے مطابق اگر $\triangle A'BC'$ بنانا ہو تو ہندسی عمل کے مرحلوں میں کیا تبدیلی کرنا ہوگی؟

مثال (3) : $\triangle ABC$ کے متشابہ $\triangle A'BC'$ اس طرح بنایئے کہ $AB : A'B = 5 : 7$



شکل 4.7
کچی شکل

تجزیہ : نقاط B, A, A' ہم خطی ہیں اسی طرح B, C, C' بھی ہم خطی ہیں۔

$\triangle ABC \sim \triangle A'BC'$ اور $AB : A'B = 5 : 7$

$\triangle ABC$ کے اضلاع، $\triangle A'BC'$ کے نظیری اضلاع سے چھوٹے ہیں۔

اسی طرح $\angle A'BC' \cong \angle ABC$

اس بارے میں غور کرتے ہوئے کچی شکل بنائیں گے۔

اب، $\frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7}$

اس لیے قطعہ خط BC کے 5 مساوی حصے کریں اور اس میں سے ایک حصے کا 7 گنا BC' کی لمبائی ہوگی۔

$\triangle ABC$ بنا کر قطعہ BC کے پانچ مساوی حصے کریں گے۔ شعاع BC پر نقطہ B سے سات حصوں کے مساوی لمبائی کے فاصلے پر نقطہ C' ہوگا۔

متناسبت کے بنیادی مسئلے کے رو سے نقطہ C' سے ضلع AC کے متوازی خط بناتے ہیں تو وہ بڑھائی ہوئی شعاع BA کو جس نقطے پر قطع کرتا ہے وہ نقطہ A' ہے۔ قطعہ $A'C'$ کھینچ کر $\triangle A'BC'$ مطلوبہ مثلث ہوگا۔

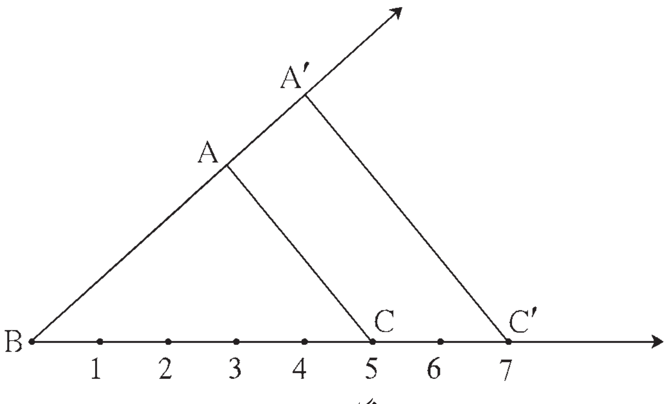
ہندسی عمل کے مرحلے :

(1) کوئی بھی $\triangle ABC$ بنائیے۔

(2) قطعہ BC کے 5 مساوی حصے کیجیے۔ شعاع BC پر نقطہ C' اس طرح لیجیے کہ قطعہ BC' کی لمبائی، قطعہ BC کے ایک حصے کا سات گنا ہے۔

(3) نقطہ C' سے قطعہ AC کے متوازی خط کھینچیے جو شعاع BA کو جس نقطے پر قطع کرے اسے A' نام دیجیے۔

$\triangle ABC$ کے متشابہ مطلوبہ مثلث $\triangle A'BC'$ ہے۔



شکل 4.8

مشقی سیٹ 4.1

.1 $\triangle ABC \sim \triangle LMN$، $\triangle ABC$, اس طرح بنائیے کہ $AB = 5.5$ سم، $BC = 6$ سم، $CA = 4.5$ سم اور $\frac{BC}{MN} = \frac{5}{4}$ ہوتو $\triangle ABC$ اور $\triangle LMN$ بنائیے۔

.2 $\triangle PQR \sim \triangle LTR$، $\triangle PQR$ میں $PQ = 4.2$ سم، $QR = 5.4$ سم، $PR = 4.8$ سم اور $\frac{PQ}{LT} = \frac{3}{4}$ ہوتو $\triangle PQR$ اور $\triangle LTR$ بنائیے۔

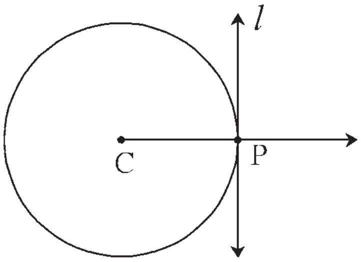
.3 $\Delta RST \sim \Delta XYZ$، ΔRST میں $RS = 4.5$ سم، $\angle RST = 40°$، $ST = 5.7$ سم اور $\frac{RS}{XY} = \frac{3}{5}$ ہوتو $\triangle RST$ اور $\triangle XYZ$ بنائیے۔

.4 $\triangle AMT \sim \triangle AHE$، $\triangle AMT$ میں $AM = 6.3$ سم، $\angle TAM = 50°$، $AT = 5.6$ سم اور $\frac{AM}{AH} = \frac{7}{5}$ ہوتو $\triangle AHE$ بنائیے۔

آیئے سمجھ لیں

دیے ہوئے دائرے پر دیے ہوئے نقطے سے گزرتا ہوا مماس کھینچنا

(i) دائرے کے مرکز کا استعمال کرکے :



شکل **4.9**

تجزیہ : فرض کریں C مرکز والے دائرے پر واقع نقطہ P سے گذرنے والے دائرے پر خط مماس l کھینچنا ہے۔

دائرے کے نصف قطر کے بیرونی سرے پر کھینچا ہوا عمودی خط دائرے کا مماس ہوتا ہے اس خصوصیت کا استعمال کریں گے۔

فرض کریں نصف قطر CP بناتے ہیں تو خط $l \perp CP$ قطعہ، یعنی نصف قطر CP کے نقطہ P سے گذرنے والا عمودی خط کھینچیں تو وہ مطلوبہ مماس ہوگا۔

دیے ہوئے خط پر واقع نقطے سے گذرنے والا اس خط پر عمودی خط کھینچنے کے عمل کا استعمال کرتے ہیں۔ یعنی سہولت کے لیے شعاع CP بنا کر خط l کا ہندسی عمل کرتے ہیں۔

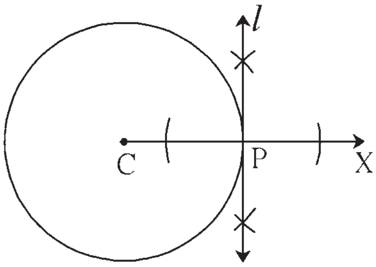
ہندسی عمل کے مرحلے :

(i) ایک دائرہ بنائیے جس کا مرکز C ہے دائرے پر ایک نقطہ لیجیے۔

(ii) شعاع CP کھینچیے۔

(iii) نقطہ P سے گذرتا ہوا شعاع CX پر عمودی خط l کھینچیے۔

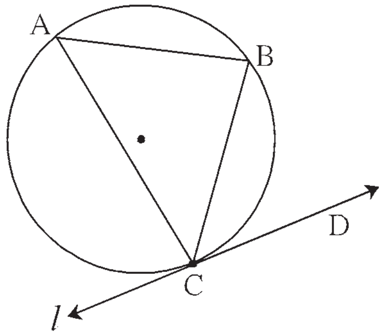
خط l، نقطہ P سے گذرنے والا مطلوبہ دائرے کا مماس ہے۔



شکل **4.10**

(ii) دائرے کے مرکز کا استعمال کیے بغیر :

مثال : کسی بھی نصف قطر کا ایک دائرہ بنائیے۔ دائرے پر کوئی بھی ایک نقطہ C لیجیے۔ دائرے کے مرکز کا استعمال کیے بغیر نقطہ C سے اس دائرے کا مماس بنائیے۔



شکل 4.11

تجزیہ : فرض کریں شکل میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق خط l، نقطہ C سے گذرنے والا مماس ہے۔ قطعہ CB وتر ہے۔

اور قوسی زاویہ $\angle CAB$ بنائیں گے۔ مماس قاطع خط زاویہ مسئلے کی رُو سے

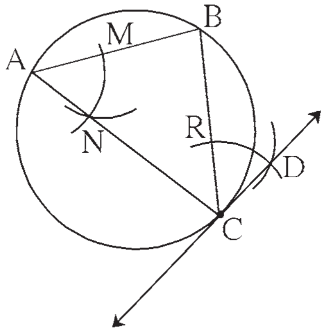
$$\angle CAB \cong \angle BCD$$

مماس قاطع زاویے کے مسئلے کے عکس کے مطابق اگر $\angle BCD \cong \angle CAB$ ہو تو

خط l دائرے کا مماس ہوتا ہے۔ یعنی قطعہ CB دائرے کا وتر اور قوسی زاویہ $\angle CAB$ بنائیں گے۔ $\angle BCD$ کا ہندسی عمل اس طرح کرتے ہیں کہ $\angle BCD \cong \angle BAC$

خط CD، دیے ہوئے دائرے کے نقطہ C سے گذرنے والا اس دائرے کا مماس ہے۔

ہندسی عمل کے مرحلے :



شکل 4.12

(1) ایک دائرہ بنائیے۔ دائرے پر کوئی بھی ایک نقطہ C لیجیے۔

(2) وتر CB اور قوسی زاویہ $\angle CAB$ کھینچیے۔

(3) پرکار میں مناسب نصف قطر لے کر اور نقطہ A کو مرکز مان کر $\angle BAC$ کی ساقین کو نقاط M اور N پر قطع کرنے والا قوس کھینچیے۔

(4) وہی نصف قطر لے کر نقطہ C کو مرکز مان کر وتر CB کو قطع کرنے والا قوس بنائیے۔ اسے R نام دیجیے۔

(5) پرکار میں MN نصف قطر لے کر R کو مرکز مان کر پہلے کھینچے ہوئے قوس کو قطع کرتا ہوا ایک دوسرا قوس کھینچیے۔ ان کے نقطہ تقاطع کو D نام دیجیے۔

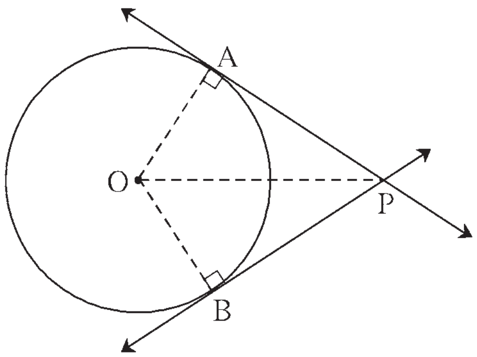
خط CD کھینچیے۔ خط CD دائرے کا مماس ہے۔

(درج بالا شکل میں $\triangle MAN \cong \triangle BCD$ اس کی وجہ پر دھیان دیجیے۔

قطعہ MN اور قطعہ RD بنائیے تو 'ضل ضل ضل' متماثلت کی آزمائش کے مطابق،

$\triangle MAN \cong \triangle RCD$ اس لیے $\angle MAN = \angle BCD$

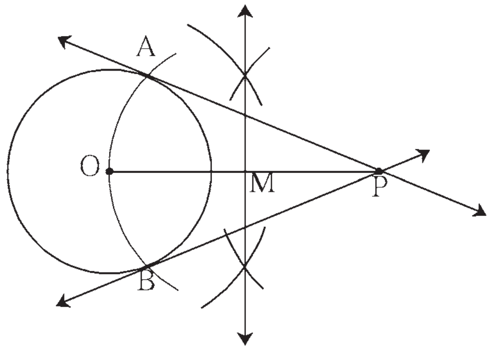
دیے ہوئے دائرے کے بیرون میں واقع نقطے سے مماس کھینچنا



شکل **4.13**

تجزیہ : فرض کریں شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق O مرکز والے دائرے کے بیرون میں نقطہ P ہے۔نقطہ P سے دائرے پر بنائے گئے مماس دائرے پر نقاط A اور B پر مس کرتے ہیں۔اگر دائرے پر نقاط A اور B کا تعین ہوجائے تو مماس PA اور PB بنا سکتے ہیں۔ کیونکہ اگر نصف قطر OA اور OB بنائیں تو PA خط ⊥ OA نصف قطر اور PB خط ⊥ OB نصف قطر، △OAP اور △OBP قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں اور OP دونوں مثلثوں کا وتر ہے۔قطعہ OP کو قطر مان کر دائرہ بنائیں تو یہ دائرہ اصل دائرے جس کا مرکز O ہے کو نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے۔ کیونکہ نصف دائرے میں بننے والا قوسی زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

ہندسی عمل کے مرحلے :



شکل **4.14**

(1) نقطہ O کو مرکز لے کر کسی بھی نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔

(2) دائرے کے بیرون میں ایک نقطہ P لیجیے۔

(3) قطعہ OP بنائیے۔قطعہ OP کا عمودی ناصف بنا کر وسطی نقطہ کو M نام دیجیے۔

(4) نقطہ M کو مرکز مان کر OM نصف قطر کا قوس بنائیے۔

(5) یہ قوس، دیے ہوئے دائرے کو نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے۔

(6) قطعہ PA اور قطعہ PB بنائیے۔

قطعہ PA اور قطعہ PB دائرے کے مطلوبہ مماس ہیں۔

مشقی سیٹ 4.2

1. نقطہ P کو مرکز مان کر 3.2 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔اس پر واقع نقطہ M سے گذرنے والا مماس بنائیے۔

2. 2.7 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔اس دائرے پر واقع نقطے سے دائرے کا مماس بنائیے۔

3. 3.6 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔دائرے پر کوئی ایک نقطہ لے کر مرکز کا استعمال کیے بغیر اس نقطے سے گذرتا ہوا دائرہ کا مماس بنائیے۔

4. 3.3 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔اس میں 6.6 سم لمبائی کا وتر PQ بنائیے۔نقاط P اور Q سے گذرنے والے دائرے کے مماس بنائیے۔مماسوں کے متعلق اپنا مشاہدہ لکھیے۔

5. 3.4 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ اس میں 5.7 سم لمبائی کا وتر MN کھینچیے۔ نقطہ M اور نقطہ N سے گذرنے والا مماس بنائیے۔

6. P مرکز مان کر 3.4 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ دائرے کے مرکز سے 5.5 سم کے فاصلے پر ایک نقطہ Q لیجیے۔ نقطہ Q سے دائرے پر مماس بنائیے۔

7. 4.1 سم نصف لے کر ایک دائرہ بنائیے۔ دائرے کے مرکز سے 7.3 سم فاصلے پر واقع نقطے سے دائرے پر مماس بنائیے۔

مجموعہ سوالات 4

1. درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے :

(1) دائرے پر دیے ہوئے نقطے سے دائرے پر بنائے ہوئے مماس کی تعداد .... ہوگی۔

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

(2) دائرے کے بیرون میں واقع نقطے سے دائرے پر زیادہ سے زیادہ .... مماس بنائے جاسکتے ہیں۔

(A) 2 (B) 1 (C) ایک اور صرف ایک (D) 0

(3) اگر $\triangle ABC \sim \triangle PQR$، $\frac{AB}{PQ} = \frac{7}{5}$ تو .... ۔

(A) $\triangle ABC$ بڑا ہے (B) $\triangle PQR$ بڑا ہے (C) دونوں مثلث مساوی ہیں (D) قطعی طور پر نہیں کہہ سکتے

2. نقطہ O کو مرکز مان کر 3.5 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ دائرے کے مرکز سے 5.7 سم فاصلے پر ایک نقطہ P لیجیے۔ نقطہ P سے دائرے پر مماس بنائیے۔

3. کوئی بھی ایک دائرہ بنائیے۔ اس پر ایک نقطہ A لیجیے۔ نقطہ A سے دائرے کے مرکز کا استعمال کیے بغیر مماس بنائیے۔

4. 6.4 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ دائرے کے مرکز سے قطر کے مساوی فاصلے پر نقطہ R لیجیے۔ اس نقطے سے دائرے پر مماس بنائیے۔

5. P مرکز والا ایک دائرہ بنائیے۔ دائرے میں 100° پیمائش کا ایک قوس AB بنائیے۔ نقاط A اور B سے گذرنے والے دائرے کا مماس بنائیے۔

6. نقطہ E کو مرکز مان کر 3.4 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ دائرے پر ایک نقطہ F لیجیے۔ نقطہ A اس طرح لیں کہ E–F–A اور FA = 4.1 سم، نقطہ A سے دائرے کا مماس بنائیے۔

7. اگر $\triangle ABC \sim \triangle LBN$، $\triangle ABC$ میں AB = 5.1 سم، $\angle B = 40°$، BC = 4.8 سم، $\frac{AC}{LN} = \frac{4}{7}$ تو $\triangle ABC$ اور $\triangle LBN$ بنائیے۔

8. $\triangle PYQ$ اس طرح بنائیے کہ PY = 6.3 سم، YQ = 7.2 سم، PQ = 5.8 سم ہو تو $\triangle PYQ$ کے متشابہ $\triangle XYZ$ اس طرح بنائیے کہ $\frac{YZ}{YQ} = \frac{6}{5}$