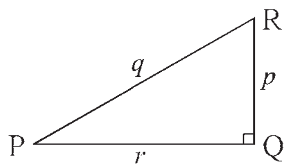
2 Theorem of Pythagoras فیثاغورث کا مسئلہ

آیئے سیکھیں

- فیثاغورث کے اعدادِ ثلاثہ
- متشابہت اور قائمۃ الزاویہ مثلث
- ہندسی وسط کا مسئلہ
- فیثاغورث کا مسئلہ
- فیثاغورث کے مسئلے کا اطلاق
- اپولونیس کا مسئلہ

آیئے ذرا یاد کریں

فیثاغورث کا مسئلہ : قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع، باقی ماندہ دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔



شکل **2.1**

$\triangle PQR$ میں، $\angle PQR = 90^\circ$

$\therefore\ l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$

اسے ہم $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ لکھتے ہیں۔

$\triangle PQR$ کے اضلاع PQ، QR اور PR کی لمبائیاں بالترتیب r، p، q سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس کے مطابق شکل 2.1 سے متعلق فیثاغورث کا مسئلہ $q^2 = p^2 + r^2$ بھی لکھا جاتا ہے۔

فیثاغورث کے اعدادِ ثلاثہ :

تین طبعی اعداد اس طرح ہوں کہ اگر ایک عدد کا مربع، باقی دو اعداد کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہو تو ان کو فیثاغورث کے اعدادِ ثلاثہ کہتے ہیں۔ مثلاً (11, 60, 61) اعدادِ ثلاثہ میں،

$11^2 = 121\ ,\ 60^2 = 3600\ ,\ 61^2 = 3721\ ,\ 121 + 3600 = 3721$

اس مثال میں بڑے عدد کا مربع، باقی دو اعداد کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہے۔

$\therefore$ (11, 60, 61) فیثاغورث کے اعدادِ ثلاثہ ہیں۔

اسی طرح (3, 4, 5)، (5, 12, 13)، (8, 15, 17)، (24, 25, 7) وغیرہ بھی فیثاغورث کے اعدادِ ثلاثہ ہیں؟ جانچ کیجیے۔

فیثاغورث کے اعدادِ ثلاثہ میں اعداد کسی بھی ترتیب میں لکھے جاسکتے ہیں۔

مزید معلومات کے لیے :

فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ حاصل کرنے کا ضابطہ :

اگر a, b طبعی اعداد ہوں اور $a > b$ ہو تو

$[(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), (2ab)]$، فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ ہوتے ہیں۔

$$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \quad \ldots \text{(I)}$$

$$(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \quad \ldots \text{(II)}$$

$$(2ab)^2 = 4a^2b^2 \quad \ldots \text{(III)}$$

$\therefore \ (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$ ... [(I)، (II) اور (III) سے]

اس لیے اعداد $[(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), (2ab)]$ فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ ہیں۔

اعدادِ ثلاثہ کے اس ضابطے کو فیثا غورث کے مختلف اعدادِ ثلاثہ حاصل کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

مثلاً $a = 5$ اور $b = 3$ لینے پر

$2ab = 30$, $a^2 - b^2 = 16$, $a^2 + b^2 = 34$ $\rightarrow$ اس لیے اعداد (34, 16, 30) فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ ہیں۔

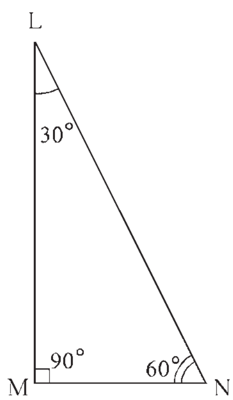
اس کی آپ تصدیق کر لیں۔

a اور b کے لیے مختلف طبعی اعداد لے کر ضابطے کی مدد سے فیثا غورث کے 5 اعدادِ ثلاثہ معلوم کیجیے۔

گذشتہ جماعت میں ہم $90° - 60° - 30°$ اور $90° - 45° - 45°$، زاویوں والے قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی خصوصیت دیکھ چکے ہیں۔

(I) $90° - 60° - 30°$ پیمائش کے زاویوں کے مثلث کی خصوصیت :

قائمۃ الزاویہ مثلث کے حادہ زاویے $30°$ اور $60°$ کے ہوں تو $30°$ پیمائش کے زاویے کے مقابل کا ضلع وتر کا نصف ہوتا ہے اور $60°$ پیمائش کے زاویے کے مقابل کا ضلع وتر کا $\frac{\sqrt{3}}{2}$ گنا ہوتا ہے۔



شکل 2.2

شکل 2.2 کا مشاہدہ کیجیے۔ $\triangle LMN$ میں، $\angle L = 30°$، $\angle N = 60°$، $\angle M = 90°$

$\therefore$ $30°$ کے مقابل کا ضلع $= MN = \frac{1}{2} \times LN$

$60°$ کے مقابل کا ضلع $= LM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times LN$

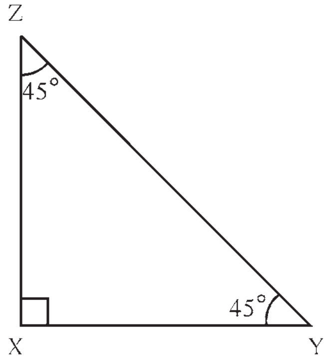
اگر $LN = 6$ سم ہو تو MN اور LM معلوم کیجیے۔

$$MN = \frac{1}{2} \times LN = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ سم}$$

$$LM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times LN = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} \text{ سم}$$

(II) $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$ پیمائش کے زاویوں کے مثلث کی خصوصیت :

قائمۃ الزاویہ مثلث کے حادہ زاویوں کی پیمائش 45° اور 45° ہوتو قائمہ زاویہ بنانے والا ہر ضلع وتر کا $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا ہوتا ہے۔



شکل **2.3**

شکل 2.3 کا مشاہدہ کیجیے۔ $\triangle XYZ$ میں،

$$XY = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

$$XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

اگر $ZY = 3\sqrt{2}$ سم ہوتو XY اور ZX معلوم کیجیے۔

$$XY = XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$$

$\therefore \quad XY = XZ = 3$ سم

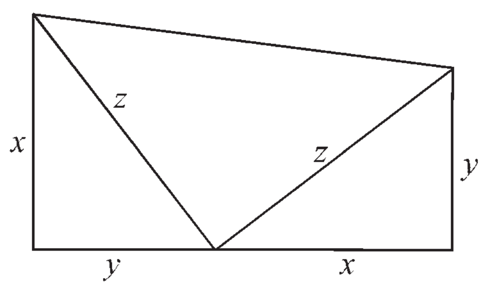
7 ویں جماعت میں ہم نے رقبے کی مدد سے فیثا غورث کے مسئلے کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ اس میں ہم نے چار قائمۃ الزاویہ مثلثوں اور ایک مربع کے رقبوں کا استعمال کیا تھا۔ اس مسئلے کا ثبوت ہم کچھ دوسرے طریقے سے دے سکتے ہیں۔

عملی کام :

شکل 2.4 میں دکھائے ہوئے کے مطابق دو متماثل قائمۃ الزاویہ مثلث لیجیے۔ ان کے وتروں کی لمبائی کے مساوی لمبائی کے دو ضلع والا ایک متساوی الساقین قائمۃ الزاویہ مثلث لیجیے۔ یہ تینوں قائمۃ الزاویہ مثلث جوڑ کر ایک ذوزنقہ تیار کیجیے۔

ذوزنقہ کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times$ (متوازی ضلعوں کی لمبائیوں کا مجموعہ) $\times$ اونچائی

اس ضابطے کا استعمال کرتے ہوئے ذوزنقہ کا رقبہ، تینوں مثلثوں کے رقبوں کے مساوی لکھ کر فیثا غورث کا مسئلہ ثابت کیجیے۔



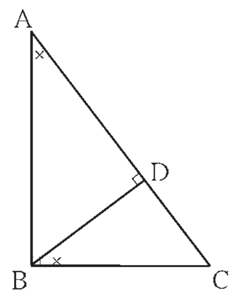
شکل **2.4**

آیئے سمجھ لیں

اب ہم فیثا غورث کے مسئلے کا ثبوت متشابہ مثلثوں کی مدد سے دیں گے۔ اسے ثابت کرنے کے لیے قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی متشابہت کے متعلق خصوصیت کا مطالعہ کریں گے۔

متشابہت اور قائمۃ الزاویہ مثلث (Similarity and right angled triangle)

مسئلہ : قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر پر کھینچے ہوئے ارتفاع سے جو مثلث بنتے ہیں۔ وہ اصل قائمۃ الزاویہ مثلث کے متشابہ ہوتے ہیں اور آپس میں ایک دوسرے کے بھی متشابہ ہوتے ہیں۔



شکل 2.5

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ میں، $\angle ABC = 90°$

$A - D - C$ ، قطعہ $AC \perp$ قطعہ BD

ثابت کرنا ہے : $\triangle ADB \sim \triangle ABC$

$\triangle BDC \sim \triangle ABC$

$\triangle ADB \sim \triangle BDC$

ثبوت :

$\triangle ADB$ اور $\triangle ABC$ میں

$\angle DAB \cong \angle BAC$ ... (مشترک زاویے)

$\angle ADB \cong \angle ABC$ ... (90° زاویے)

$\triangle ADB \sim \triangle ABC$ ... (زا۔زا آزمائش) ... (I)

اسی طرح، $\triangle BDC$ اور $\triangle ABC$ میں

$\angle BCD \cong \angle ACB$ ... (مشترک زاویے)

$\angle BDC \cong \angle ABC$ ... (90° زاویے)

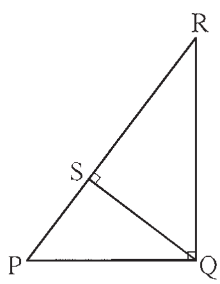
$\triangle BDC \sim \triangle ABC$ ... (زا۔زا آزمائش) ... (II)

$\therefore \triangle ADB \sim \triangle BDC$ ... [بیانات (I) اور (II) سے] ... (III)

$\therefore \triangle ADB \sim \triangle BDC \sim \triangle ABC$ ... (عبوری خاصیت) ... [بیانات (I)، (II) اور (III) سے]

ہندسی وسط کا مسئلہ (Theorem of Geometrical Mean)

مسئلہ : قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر پر کھینچا ہوا ارتفاع، اس ارتفاع کے ذریعے بننے والے وتر کے دونوں حصوں کا ہندسی وسط ہوتا ہے۔



شکل 2.6

ثبوت : قائمۃ الزاویہ مثلث PQR میں، وتر $PR \perp QS$ قطعہ

$\therefore \triangle QSR \sim \triangle PSQ$ ... (قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی متشابہت)

$\therefore \dfrac{QS}{PS} = \dfrac{SR}{SQ}$

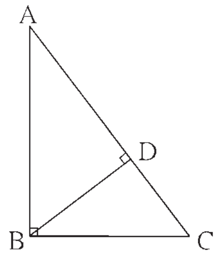
$\therefore \dfrac{QS}{PS} = \dfrac{SR}{QS}$ ... $(\because SQ = QS)$

$\therefore QS^2 = PS \times SR$

اس لیے ارتفاع QS، قطعہ PS اور قطعہ SR کا ہندسی وسط ہے۔

فیثا غورث کا مسئلہ (Theorem of Pythagoras)

مسئلہ : قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع، باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔



شکل 2.7

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ میں، $\angle ABC = 90^\circ$

ثابت کرنا ہے : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

عمل : نقطہ B سے ضلع AC پر قطعہ BD عمود کھینچیے۔

$A - D - C$

ثبوت : $\triangle ABC$ میں،

قطعہ $BD \perp$ وتر AC ... (عمل)

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADB \sim \triangle BDC$ ... (قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی تشابہت)

$\triangle ABC \sim \triangle ADB$

$\therefore \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DB} = \dfrac{AC}{AB}$ ... (نظیری اضلاع)

$\therefore \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AB}$

$\therefore AB^2 = AD \times AC$ ... (I)

اسی طرح , $\triangle ABC \sim \triangle BDC$

$\therefore \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{AC}{BC}$ ... (نظیری اضلاع)

$\therefore \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{AC}{BC}$

$\therefore BC^2 = DC \times AC$ ... (II)

(I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$$

$$= AC\,(AD + DC)$$

$$= AC \times AC \qquad \text{... } (A - D - C)$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$$

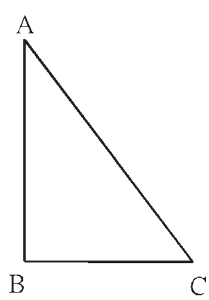
$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$$

فیثا غورث کے مسئلے کا عکس (Converse of Phythagoras theorem)

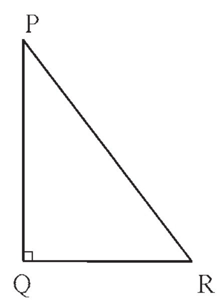
مسئلہ : کسی مثلث میں اگر ایک ضلع کا مربع، دیگر دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہو تو وہ مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ میں، $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ثابت کرنا ہے : $\angle ABC = 90^\circ$



شکل 2.8



شکل 2.9

عمل : $\triangle PQR$ اس طرح بنائیے کہ $AB = PQ$، $BC = QR$، $\angle PQR = 90°$

ثبوت : $\triangle PQR$ میں، $\angle Q = 90°$

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ ... (فیثا غورث کا مسئلہ)

$= AB^2 + BC^2$ ... (عمل) ... (I)

$= AC^2$ ... (دیا ہوا ہے) ... (II)

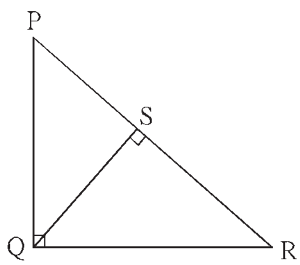
$\therefore \quad PR^2 = AC^2$

$\therefore \quad PR = AC$ ... (III)

$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle PQR$ ... (ضل۔ضل۔ضل آزمائش)

$\therefore \quad \angle ABC = \angle PQR = 90°$

اسے ذہن نشین کرلیں



شکل 2.10

(1) (a) متشابہت اور قائمۃ الزاویہ مثلث :

$\triangle PQR$ میں، $\angle Q = 90°$، قطعہ $PR \perp$ قطعہ QS

یہاں، $\triangle PQR \sim \triangle PSQ \sim \triangle QSR$

اس طرح سے شکل 2.10 میں بننے والے تمام قائمۃ الزاویہ مثلث ایک دوسرے کے متشابہ ہیں۔

(b) ہندسی وسط کا مسئلہ :

درج بالا شکل میں، $\triangle PSQ \sim \triangle QSR$

$\therefore \quad QS^2 = PS \times SR$

$\therefore$ قطعہ PS اور قطعہ SR کا ہندسی وسط قطعہ QS ہے۔

(2) فیثا غورث کا مسئلہ :

قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع، باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

(3) فیثا غورث کے مسئلے کا عکس :

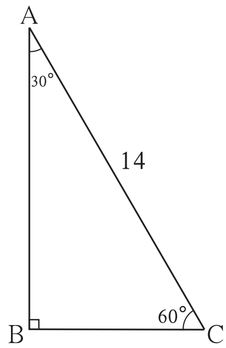
کسی مثلث میں اگر ایک ضلعے کا مربع، باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہو تو وہ مثلث قائمۃ الزاویہ ہوتا ہے۔

اس کے علاوہ ایک اور خصوصیت بہت زیادہ استعمال ہوتی ہے اسے دھیان میں رکھیے۔

(4) قائمۃ الزاویہ مثلث میں کسی ایک ضلعے کی لمبائی، وتر کی لمبائی کا نصف ہو تو اس ضلعے کے مقابل کا زاویہ $30°$ ہوتا ہے۔

یہ خصوصیت $30° - 60° - 90°$ مسئلے کا عکس ہے۔

مثال (1) : شکل 2.11 کا مشاہدہ کیجیے۔



شکل 2.11

$\triangle ABC$ میں، $\angle B = 90°$ ، $\angle A = 30°$ ، $AC = 14$

ہوتو AB اور BC معلوم کیجیے۔

حل : $\triangle ABC$ میں،

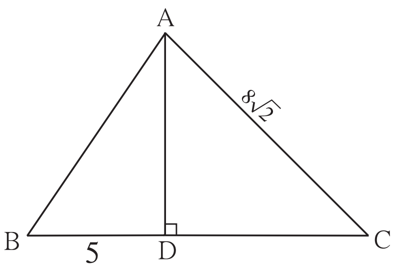
$$\rightarrow \angle B = 90°\ ,\ \angle A = 30°\ ,\ \therefore\ \angle C = 60°$$

$30° - 60° - 90°$ مسئلے کی رو سے

$$BC = \frac{1}{2} \times AC$$
$$BC = \frac{1}{2} \times 14$$
$$BC = 7$$

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC$$
$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14$$
$$AB = 7\sqrt{3}$$

مثال (2) : شکل 2.12 کا مشاہدہ کیجیے۔



شکل 2.12

$\triangle ABC$ میں قطعہ BC $\perp$ قطعہ AD، $\angle C = 45°$

$BD = 5$ اور $AC = 8\sqrt{2}$ ہوتو AD اور BC معلوم کیجیے۔

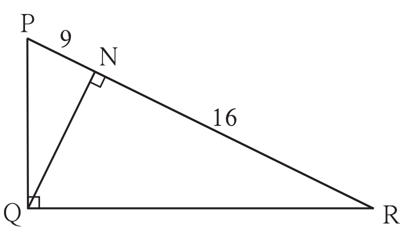
حل : $\triangle ADC$ میں $\angle ADC = 90°$ ، $\angle C = 45°$ اس لیے $\angle DAC = 45°$

$$AD = DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2}$$ ... ($45° - 45° - 90°$ مسئلے کی رو سے)

$$\therefore\ DC = 8\ ,\ \therefore\ AD = 8$$
$$BC = BD + DC$$
$$= 5 + 8$$
$$\therefore\ BC = 13$$

مثال (3) : شکل 2.13 میں $\angle PQR = 90°$ ، قطعہ PR $\perp$ قطعہ QN،

$PN = 9$ ، $NR = 16$ تو QN معلوم کیجیے۔



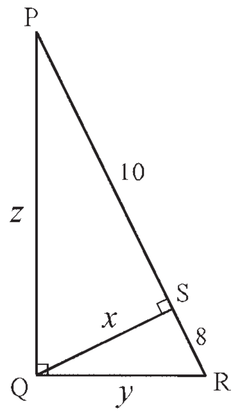
شکل 2.13

حل : $\triangle PQR$ میں قطعہ PR $\perp$ قطعہ QN

$$\therefore NQ^2 = PN \times NR$$ ... (ہندسی وسط کا مسئلہ)

$$\therefore\ QN = \sqrt{PN \times NR}$$
$$= \sqrt{9 \times 16}$$
$$= 3 \times 4$$
$$= 12$$

مثال (4) : شکل 2.14 کا مشاہدہ کیجیے۔ $\triangle PQR$ میں، $\angle PQR = 90°$،
PR قطعہ $\perp$ QS قطعہ ہو تو x، y، z کی قیمتیں معلوم کیجیے۔



شکل 2.14

حل : $\triangle PQR$ میں، $\angle PQR = 90°$
PR قطعہ $\perp$ QS قطعہ

(ہندسی وسط کا مسئلہ) ...

$$QS = \sqrt{PS \times SR}$$
$$= \sqrt{10 \times 8}$$
$$= \sqrt{5 \times 2 \times 8}$$
$$= \sqrt{5 \times 16}$$
$$= 4\sqrt{5}$$
$$\therefore\ x = 4\sqrt{5}$$

$\triangle QSR$ میں، $\angle QSR = 90°$

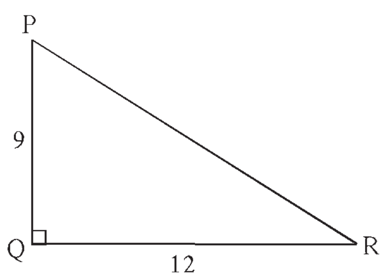
$QR^2 = QS^2 + SR^2$ ... (فیثاغورث کا مسئلہ)
$$= (4\sqrt{5})^2 + 8^2$$
$$= 16 \times 5 + 64$$
$$= 80 + 64$$
$$= 144$$
$$\therefore\ QR = 12\ ,\ \therefore\ y = 12$$

$\triangle PSQ$ میں، $\angle QSP = 90°$

$PQ^2 = QS^2 + PS^2$ ... (فیثاغورث کا مسئلہ)
$$= (4\sqrt{5})^2 + 10^2$$
$$= 16 \times 5 + 100$$
$$= 80 + 100$$
$$= 180$$
$$= 36 \times 5$$
$$\therefore\ PQ = 6\sqrt{5}\ ,\ \therefore\ z = 6\sqrt{5}$$

جواب : $x = 4\sqrt{5}$ ، $y = 12$ ، $z = 6\sqrt{5}$

مثال (5) : قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع 9 سم اور 12 سم ہیں تو وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔



شکل 2.15

حل : $\triangle PQR$ میں، $\angle Q = 90°$
$PQ = 9$ سم، $QR = 12$ سم

(فیثاغورث کے مسئلے کی رُو سے) ...

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$
$$= 9^2 + 12^2$$
$$= 81 + 144$$
$$\therefore\ PR^2 = 225$$
$$\therefore\ PR = 15$$

$\therefore$ مثلث کے وتر کی لمبائی = 15 سم

مثال (6) : $\triangle LMN$ میں، $l = 5$، $m = 13$، $n = 12$ ہوتو $\triangle LMN$ قائمۃ الزاویہ مثلث ہے یا نہیں، طے کیجیے۔
یہاں l، m، n بالترتیب $\angle L$، $\angle M$، $\angle N$ کے مقابل کے اضلاع ہیں۔

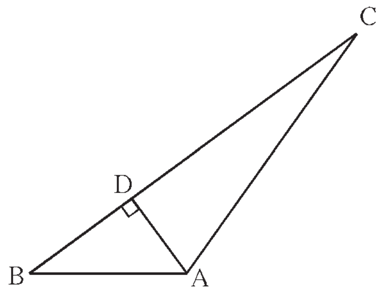
حل : $l = 5$، $m = 13$، $n = 12$

$$l^2 = 25,\ m^2 = 169,\ n^2 = 144$$

$$\therefore\ m^2 = l^2 + n^2$$

اس لیے فیثا غورث کے مسئلے کے عکس کی رُو $\triangle LMN$ قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

مثال (7) : شکل 2.16 کا مشاہدہ کیجیے۔



شکل **2.16**

$\triangle ABC$ میں، قطعہ BC $\perp$ قطعہ AD تو ثابت کیجیے کہ

$$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$$

حل : $\triangle ADC$ میں $\angle ADC = 90°$ فیثا غورث کے مسئلے کی رُو سے،

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$\therefore\ AD^2 = AC^2 - CD^2 \quad \text{... (I)}$$

$\triangle ADB$ میں $\angle ADB = 90°$، فیثا غورث کے مسئلہ کی رُو سے،

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$\therefore\ AD^2 = AB^2 - BD^2 \quad \text{... (II)}$$

$$AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$$ ... [(I) اور (II) سے]

$$\therefore\ AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$$

مشقی سیٹ 2.1

1. درج ذیل اعدادِ ثلاثہ میں سے فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ معلوم کیجیے۔ وجہ لکھیے۔

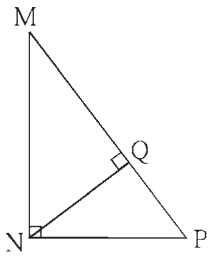
(i) (3, 5, 4) (ii) (4, 9, 12) (iii) (5, 12, 13)

(iv) (24, 70, 74) (v) (10, 24, 27) (vi) (11, 60, 61)

2. شکل 2.17 میں $\angle MNP = 90°$،

قطعہ $NQ \perp$ قطعہ MP،

$MQ = 9$، $QP = 4$ ہوتو NQ معلوم کیجیے۔

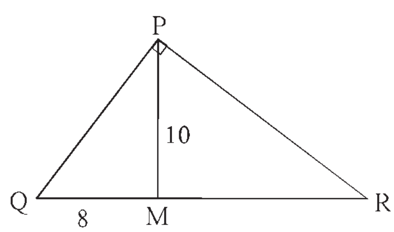


شکل **2.17**

3. شکل 2.18 میں $\angle QPR = 90°$

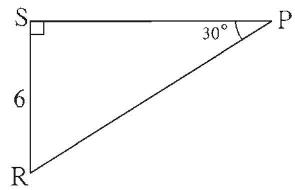
قطعہ $QR \perp$ قطعہ PM اور $Q - M - R$

$PM = 10$، $QM = 8$ اس کی مدد سے QR معلوم کیجیے۔



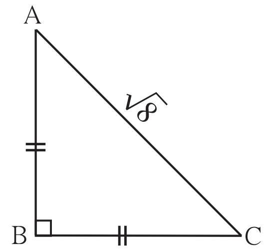
شکل **2.18**

4. شکل 2.19 میں، $\triangle PSR$ میں دی ہوئی معلومات کی مدد سے RP اور PS معلوم کیجیے۔



شکل 2.19

5. شکل 2.20 میں دی ہوئی معلومات کی بناء پر AB اور BC معلوم کرنے کے لیے عملی کام مکمل کیجیے۔



شکل 2.20

$AB = BC \quad \ldots (\boxed{})$

$\therefore \quad \angle BAC = \boxed{}$

$\therefore \ AB = BC = \boxed{} \times AC$

$= \boxed{} \times \sqrt{8}$

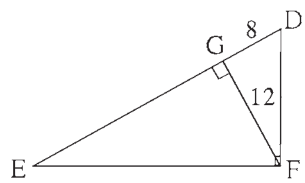
$= \boxed{} \times 2\sqrt{2}$

$= \boxed{}$

6. ایک مربع کے وتر کی لمبائی 10 سم ہے۔اس کے ضلع کی لمبائی اور احاطہ معلوم کیجیے۔

7. شکل 2.21 میں، $\angle DFE = 90°$، قطعہ ED $\perp$ قطعہ FG اگر $GD = 8$، $FG = 12$ ہوتو درج ذیل معلوم کیجیے۔

(i) EG (ii) FD (iii) EF



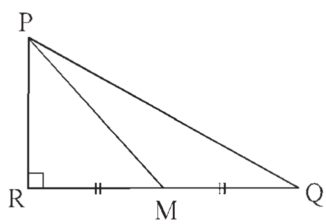
شکل 2.21

8. ایک مستطیل کی لمبائی 35 سم اور چوڑائی 12 سم ہے تو اس مستطیل کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

*9. شکل 2.22 میں ضلع QR کا وسطی نقطہ M ہے۔

$\angle PRQ = 90°$ ہوتو ثابت کیجیے کہ

$PQ^2 = 4PM^2 - 3PR^2$



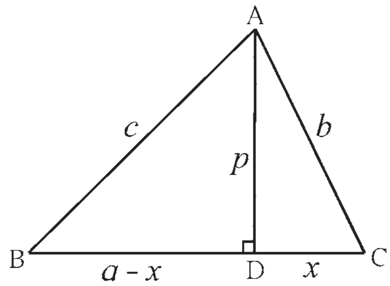
شکل 2.22

*10. راستے کے دونوں جانب ایک دوسرے کے مقابل واقع عمارتوں کی دیواریں ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔ 5.8 میٹر لمبی سیڑھی کا ایک سرا راستے پر کہیں رکھا ہوا ہے تو اس کا اوپری سرا پہلی عمارت کی 4 میٹر اونچائی پر واقع کھڑکی تک پہنچتا ہے۔اسی جگہ سے سیڑھی دوسری جانب موڑنے پر اس کا اوپری سرا دوسری عمارت کی 4.2 میٹر اونچائی پر واقع کھڑکی تک پہنچتا ہے۔راستے کی چوڑائی معلوم کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں

فیثا غورث کے مسئلے کا اطلاق

فیثا غورث کے مسئلے میں قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر اور قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع کے درمیان آپسی تعلق یعنی قائمہ زاویہ کے مقابل کا ضلع اور دیگر دو اضلاع کا تعلق بتایا گیا ہے۔ مثلث میں حادہ زاویے کے مقابل کے ضلع کا دیگر دو اضلاع کے درمیان تعلق اسی طرح منفرجہ زاویے کے مقابل کے ضلع کا دیگر دو اضلاع کے درمیان تعلق فیثا غورث کے مسئلے کے ذریعے طے کرتے ہیں۔ یہ تعلق مندرجہ ذیل مثال سے سمجھ لیجیے۔



شکل 2.23

مثال (1) : $\triangle ABC$ میں $\angle C$ حادہ زاویہ ہے، قطعہ $BC \perp$ قطعہ AD

تو ثابت کیجیے کہ $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

شکل 2.23 میں،

فرض کیجیے $AB = c$ ،$AC = b$ ،$AD = p$ ،$BC = a$ ،$DC = x$

$\therefore\ BD = a - x$

$\triangle ADB$ میں فیثا غورث کے مسئلے کی رُو سے

$c^2 = (a-x)^2 + \boxed{\quad}$

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \boxed{\quad}$ ... (I)

$\triangle ADC$ میں فیثا غورث کے مسئلے کی رُو سے

$b^2 = p^2 + \boxed{\quad}$

$p^2 = b^2 - \boxed{\quad}$ ... (II)

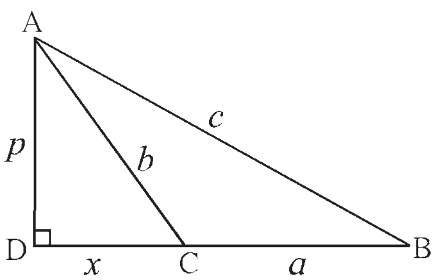
بیان (II) میں حاصل شدہ p^2 کی قیمت بیان (I) میں رکھنے پر،

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$

$\therefore\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$

$\therefore\ AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

مثال (2) : $\triangle ABC$ میں، $\angle ACB$ منفرجہ زاویہ ہے۔



شکل 2.24

شکل 2.24 میں، $BC \perp$ قطعہ AD قطعہ

تو ثابت کیجیے کہ $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

فرض کریں $AD = p$ ،$AC = b$ ،$AB = c$ ،$BC = a$ ،$DC = x$

$\therefore\ DB = a + x$

$\triangle ADB$ میں فیثا غورث کے مسئلے کی رُو سے،

$c^2 = (a + x)^2 + p^2$

$= a^2 + 2ax + x^2 + p^2$ ... (I)

اسی طرح $\triangle ADC$ میں،

$$b^2 = x^2 + p^2$$

$$p^2 = b^2 - x^2 \qquad \text{... (II)}$$

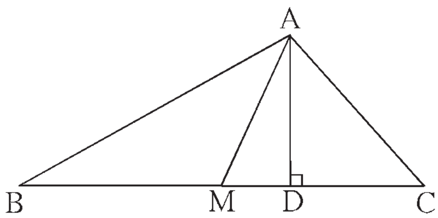
$\therefore$ مساوات (II) میں حاصل ہونے والے p^2 کی قیمت مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$c^2 = a^2 + 2ax + b^2$$

$$\therefore\ AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$$

اپولونیس کا مسئلہ (Apollonius' Theorem)



شکل **2.25**

$\triangle ABC$ میں نقطہ M، ضلع BC کا وسطی نقطہ ہے۔تو

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$$

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ میں ضلع BC کا وسطی نقطہ M ہے۔

ثابت کرنا ہے : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

عمل : قطعہ $AD \perp BC$ قطعہ کھینچیے۔

ثبوت : اگر قطعہ AM، قطعہ BC پر عمود نہ ہو تو $\angle AMB$ اور $\angle AMC$ میں سے کوئی ایک منفرجہ زاویہ ہوگا اور دوسرا حادہ زاویہ ہوگا۔

شکل میں $\angle AMB$، منفرجہ زاویہ ہے اور $\angle AMC$ حادہ زاویہ ہے۔

درج بالا مثال (1) اور (2) سے

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \times MD \qquad \text{... (I)}$$

اور

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \times MD$$

$$\therefore\ AC^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM \times MD \qquad \text{... } (\because\ BM = MC) \quad \text{... (II)}$$

$\therefore$ (I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$$

اگر ضلع $BC \perp AM$ قطعہ ہو تو اس مسئلے کا ثبوت آپ خود لکھیں۔

اس مثال کے ذریعے مثلث کے ضلعوں اور وسطانیہ کے درمیان آپسی تعلق سمجھ میں آتا ہے۔اسے ہی اپولونیس کا مسئلہ کہتے ہیں۔

حل کردہ مثالیں

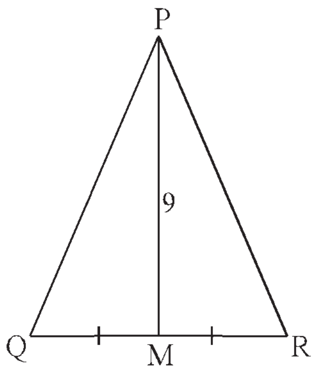
مثال (1) : $\triangle PQR$ میں قطعہ PM وسطانیہ ہے۔ $PM = 9$ اور $PQ^2 + PR^2 = 290$ ہو تو QR معلوم کیجیے۔

حل : $\triangle PQR$ میں قطعہ PM وسطانیہ ہے۔

ضلع QR کا وسطی نقطہ M ہے۔

$$QM = MR = \frac{1}{2} QR$$

اپولونیس کے مسئلے کی رو سے،



شکل 2.26

$$PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2$$

$\therefore$ $290 = 2 \times 9^2 + 2QM^2$

$\therefore$ $290 = 2 \times 81 + 2QM^2$

$\therefore$ $290 = 162 + 2QM^2$

$\therefore$ $2QM^2 = 290 - 162$

$\therefore$ $2QM^2 = 128$

$\therefore$ $QM^2 = 64$

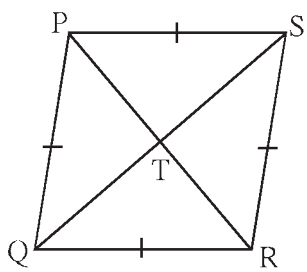
$\therefore$ $QM = 8$

$\therefore$ $QR = 2QM$

$= 2 \times 8$

$= 16$

مثال (2) : ثابت کیجیے کہ معین کے وتروں کے مربعوں کا مجموعہ، اس کے ضلعوں کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔



شکل 2.27

دیا ہوا ہے : PQRS□ ایک معین ہے۔اس کے وتر PR اور QS ایک دوسرے کو نقطہ T پر قطع کرتے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : $PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = PR^2 + QS^2$

ثبوت : معین کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

اس لیے اپولونیس کے مسئلے کے ذریعے،

$PQ^2 + PS^2 = 2PT^2 + 2QT^2$ ... (I)

$QR^2 + SR^2 = 2RT^2 + 2QT^2$ ... (II)

اس لیے (I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$PQ^2 + PS^2 + QR^2 + SR^2 = 2(PT^2 + RT^2) + 4QT^2$

$= 2(PT^2 + PT^2) + 4QT^2$ ... ($\because$ RT = PT)

$= 4PT^2 + 4QT^2$

$= (2PT)^2 + (2QT)^2$

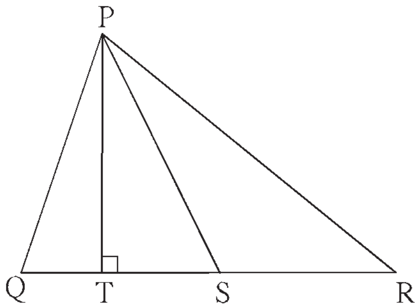
$= PR^2 + QS^2$

(اس مثال کو فیثا غورث کے مسئلے کے ذریعے بھی حل کر سکتے ہیں۔)

مشقی سیٹ 2.2

.1 $\triangle PQR$ میں، ضلع QR کا وسطی نقطہ S ہے۔ اگر $PQ = 11$، $PR = 17$، $PS = 13$ ہو تو QR کی لمبائی معلوم کیجیے۔

.2 $\triangle ABC$ میں $AB = 10$، $AC = 7$، $BC = 9$ ہو تو نقطہ C سے ضلع AB پر کھینچے گئے وسطانیہ کی لمبائی معلوم کیجیے۔



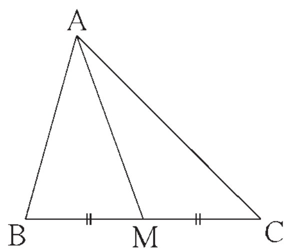
شکل 2.28

.3 شکل 2.28 میں قطعہ PS، یہ $\triangle PQR$ کا وسطانیہ ہے

اور $PT \perp QR$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

(1) $PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$

(2) $PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$

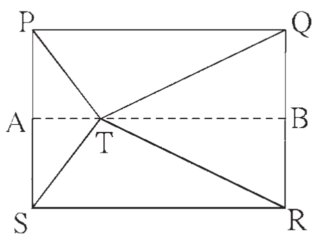


شکل 2.29

.4 شکل 2.29 میں $\triangle ABC$ کے ضلع BC کا وسطی نقطہ M ہے۔

اگر $AB^2 + AC^2 = 290$ مربع سم، $AM = 8$ سم ہو تو

BC معلوم کیجیے۔



شکل 2.30

*.5 شکل 2.30 میں دکھائے ہوئے کے مطابق نقطہ T مستطیل PQRS کے اندرون میں ہے تو ثابت کیجیے کہ

$$TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$$

(شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق $A - T - B$، اس طرح کہ ضلع $AB \parallel$ ضلع SR کھینچیے)

مجموعہ سوالات 2

.1 درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

(1) درج ذیل میں کون سا فیثاغورث کا اعدادِ ثلاثہ ہے؟

(A) (1, 5, 10) (B) (3, 4, 5) (C) (2, 2, 2) (D) (5, 5, 2)

(2) قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ 169 ہے تو اس مثلث کے وتر کی لمبائی کیا ہوگی؟

(A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

(3) درج ذیل میں سے کس تاریخ کو فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ ہوں گے؟

(A) 15 / 08 / 17 (B) 16 / 08 / 16 (C) 3 / 5 / 17 (D) 4 / 9 / 15

(4) مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں a، b، c ہے اگر $a^2 + b^2 = c^2$ ہو تو وہ کس قسم کا مثلث ہوگا؟

(A) منفرجتہ الزاویہ مثلث (B) حادۃ الزاویہ مثلث

(C) قائمتہ الزاویہ مثلث (D) متساوی الاضلاع مثلث

(5) ایک مربع کے وتر کی لمبائی $10\sqrt{2}$ سم ہے۔اس کا احاطہ .... ہے۔

(A) 10 سم (B) $40\sqrt{2}$ سم (C) 20 سم (D) 40 سم

(6) ایک قائمتہ الزاویہ مثلث میں وتر پر بنائے گئے ارتفاع کی وجہ سے وتر کے 4 سم اور 9 سم لمبائی کے دو حصے بنتے ہیں تو اس ارتفاع کی لمبائی کتنی ہے؟

(A) 9 سم (B) 4 سم (C) 6 سم (D) $2\sqrt{6}$ سم

(7) قائمتہ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع 24 سم اور 18 سم لمبائی کے ہیں۔مثلث کے وتر کی لمبائی .... ہوگی۔

(A) 24 سم (B) 30 سم (C) 15 سم (D) 18 سم

(8) $\triangle ABC$ میں $AB = 6\sqrt{3}$ سم، $AC = 12$ سم اور $BC = 6$ سم تو $\angle A$ کی پیمائش کیا ہوگی؟

(A) 30° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

.2 درج ذیل مثالیں حل کیجیے۔

(i) ایک متساوی الاضلاع مثلث کے ضلع کی لمبائی 2a ہے۔مثلث کے ارتفاع کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(ii) کیا 7 سم، 24 سم، 25 سم ضلعوں کی لمبائی والا مثلث قائمتہ الزاویہ مثلث ہوگا؟ وجہ کے ساتھ لکھیے۔

(iii) ایک مستطیل کے اضلاع کی لمبائی 11 سم اور 60 سم ہے۔اس کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(iv) ایک قائمتہ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع کی لمبائی 9 سم اور 12 سم ہے۔مثلث کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(v) متساوی الساقین قائمتہ الزاویہ مثلث کے متماثل اضلاع کی لمبائی x ہے۔وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(vi) $\triangle PQR$ میں $PQ = \sqrt{8}$، $QR = \sqrt{5}$، $PR = \sqrt{3}$ ہو تو کیا $\triangle PQR$ قائمتہ الزاویہ مثلث ہے؟ اگر ہو تو مثلث کا کون سا زاویہ قائمہ زاویہ ہے۔

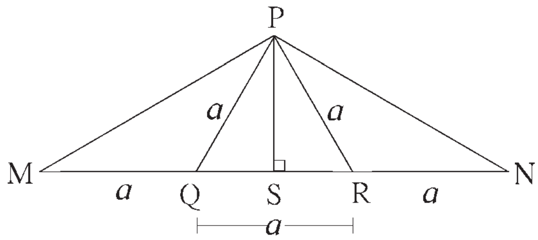
.3 $\triangle RST$ میں $\angle S = 90°$، $\angle T = 30°$، $RT = 12$ سم تو RS اور ST معلوم کیجیے۔

.4 ایک مستطیل کا رقبہ 192 مربع سم ہے۔اس کی لمبائی 16 سم ہے تو اس مستطیل کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

*.5 ایک متساوی الاضلاع مثلث کا ارتفاع $\sqrt{3}$ سم ہے۔مثلث کے ضلع کی لمبائی اور احاطہ معلوم کیجیے۔

.6 $\triangle ABC$ میں قطعہ AP وسطانیہ ہے۔اگر $BC = 18$، $AB^2 + AC^2 = 260$ ہو تو AP معلوم کیجیے۔

*7. $\triangle ABC$ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔قاعدہ BC پر نقطہ P اس طرح ہے کہ $PC = \frac{1}{3}BC$ ، اگر سم $AB = 6$ ہوتو AP معلوم کیجیے۔



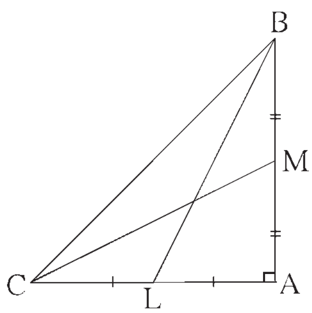
شکل 2.31

8. شکل 2.31 میں $M - Q - R - N$ ہےاور دی ہوئی معلومات کی مدد سے ثابت کیجیے کہ

$PM = PN = \sqrt{3} \times a$

9. ثابت کیجیے کہ متوازی الاضلاع میں وتروں کے مربعوں کا مجموعہ، اس کے ضلعوں کے مربعوں کے مجموعے کے مساوی ہوتا ہے۔

10. نازیہ اور حذیفہ ایک مقام سے ایک ہی وقت میں مشرق اور شمال کی سمت یکساں رفتار سے روانہ ہوئے دو گھنٹے بعد ان کے درمیان فاصلہ $15\sqrt{2}$ کلومیٹر ہے۔تو ان کی فی گھنٹہ رفتار معلوم کیجیے۔

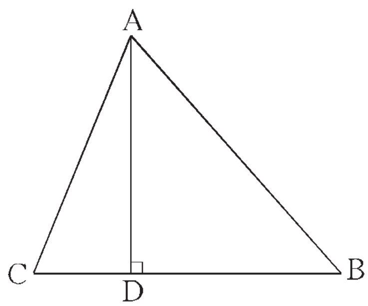


شکل 2.32

*11. $\triangle ABC$ میں $\angle BAC = 90°$، قطعہ BL اور قطعہ CM، مثلث ABC کے وسطانیہ ہیں، تو

ثابت کیجیے کہ $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$

12. ایک متوازی الاضلاع میں دو متصلہ ضلعوں کی لمبائیوں کے مربعوں کا مجموعہ 130 مربع سم ہے۔اس کے ایک وتر کی لمبائی 14 سم ہے۔ دوسرے وتر کی لمبائی کتنی ہے؟



شکل 2.33

13. $\triangle ABC$ میں قطعہ BC $\perp$ قطعہ AD اور

$BD = 3CD$ تو

ثابت کیجیے کہ

$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$

*14. متساوی الساقین مثلث میں متماثل اضلاع کی لمبائی 13 سم ہے۔اُس مثلث کا قاعدہ 10 سم ہے، تو اس مثلث کے ہندسی مرکز سے اور قاعدے کے مقابل کے راس کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

15. ذوزنقہ ABCD میں

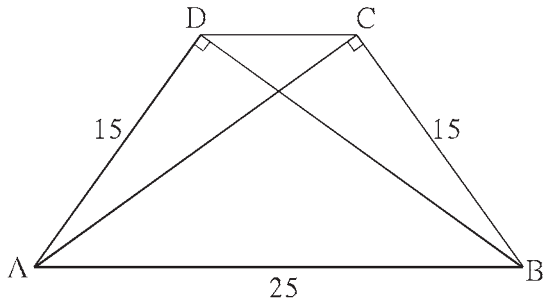
قطعہ DC || قطعہ AB

قطعہ AD ⊥ قطعہ BD

قطعہ BC ⊥ قطعہ AC

اگر AD = 15، BC = 15 اور AB = 25 ہوتو

A (□ABCD) کتنا ہے؟



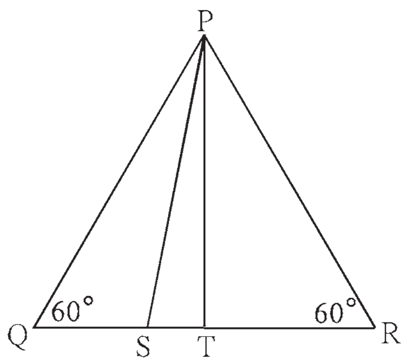
شکل 2.34

*16. شکل 2.35 میں △PQR متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

قطعہ QR پر نقطہ S اس طرح ہے کہ

$QS = \frac{1}{3} QR$ تو ثابت کیجیے کہ

$9PS^2 = 7PQ^2$



شکل 2.35

*17. △PQR کا وسطانیہ قطعہ PM ہے اگر PQ = 40، PR = 42 اور PM = 29 ہوتو QR معلوم کیجیے۔

18. △ABC کا وسطانیہ قطعہ AM ہے اگر AB = 22، AC = 34، BC = 24 ہوتو قطعہ AM کی لمبائی معلوم کیجیے۔

ICT Tools or Links

انٹرنیٹ سے 'Story on the life of Pythagoras' حاصل کیجیے اور Slide show تیار کیجیے۔