6 شماریات (Statistics)

آیئے، سیکھیں۔

- مرکزی رجحان کی پیمائش - جماعت بند تعددی جدول کے لیے میانیہ، وسطانیہ، کثیریہ
- شماریاتی معطیات کی ترسیم کے ذریعے اظہار - مستطیلی ترسیم، تعددی کثیر ضلعی، دائروی ترسیم

انسانی زندگی میں شماریات کئی شعبوں کے لیے مفید ہے جیسے کھیتی، معاشیات، کامرس، علمِ ادویات، علمِ نباتات، بائیوٹیکنالوجی، طبیعات، کیمیا، ایجوکیشن، سماجی علوم، انتظام وغیرہ۔ کسی تجربے کے بعد حاصل ہونے والے نتائج کے کئی ممکنات ہوتے ہیں۔ جب ان کے ممکنات کی جانچ کرنے کی ضرورت ہوتی ہے تب بڑے پیمانے پر تجربہ کرکے، تمام اُمور کو ٹھیک طور پر لکھ لیا جاتا ہے۔ اس اندراج کا استعمال کرکے مختلف نتائج کے احتمال کی جانچ کی جاتی ہے۔ اس کے لیے اعداد و شمار کا علم یعنی شماریات کا اُصول بنایا گیا ہے۔

فرانسس گالٹن (1822-1911) نامی برطانوی ماہرِ علوم نے شماریات میں بنیادی کام کیے ہیں۔ وہ سوالنامہ تیار کرکے لوگوں میں تقسیم کرتا تھا اور اسے پُر کرنے کی گزارش کرتا تھا۔ اس طریقے سے انھوں نے کئی لوگوں سے معلومات جمع کرکے ان کی سابقہ معلومات، معاشی حالت، پسند ناپسند، صحت وغیرہ کا بڑے پیمانے پر اندراج کرتا رہتا تھا۔ یہ ثابت ہو چکا تھا کہ مختلف لوگوں کی اُنگلیوں کے نشان مختلف ہوتے ہیں۔ گالٹن نے کئی لوگوں کی اُنگلیوں کے نشانات کی جانچ کرکے اُن کی جماعت بندی کرنے کا طریقہ طے کیا۔ علم اعداد و شمار کا استعمال کرکے انھوں نے ثابت کرکے دِکھایا کہ مختلف لوگوں کے نشانات یکساں ہونے کے امکانات تقریباً صفر ہوتے ہیں۔ انھوں نے دِکھایا کہ اُنگلیوں کے نشانات پر سے کسی شخص کی شناخت کرنا ممکن ہے، گنہگاروں کو تلاش کرنے کا یہ طریقہ عدالتوں میں منظور ہوا۔ جانوروں اور انسانوں کے نسیج کے بارے میں بہت زیادہ کام کیا۔

فرانسس گالٹن

آیئے، ذرا یاد کریں۔

سروے کے ذریعے حاصل ہونے والے اعدادی شماروں میں عام طور پر ایک خصوصیت دِکھائی دیتی ہے، وہ یہ کہ تمام شماروں کا ایک خاص شمارے کے گرد یا اُس کے آس پاس مرکوز ہونے کا رجحان ہوتا ہے۔ یہ خاص شمارہ اس گروہ کا نمائندہ عدد ہوتا ہے۔ اس عدد کو مرکزی رجحان کی پیمائش کہتے ہیں۔

غیر جماعت بند جدول کے لیے میانیہ، وسطانیہ اور کثیریہ کا مطالعہ ہم اس سے قبل کر چکے ہیں۔

تجربہ 1 : آپ کی جماعت میں تمام طلبہ کی اونچائی ناپ کر سینٹی میٹر میں درج کیجیے۔ آپ محسوس کریں گے کہ کئی طلبہ کی اونچائی کسی خاص عدد کے گرد یا اس کے آس پاس مرکوز ہے۔

تجربہ 2 : پیپل کے درخت کے نیچے گرے ہوئے پتوں کو جمع کیجیے۔ ہر طالب علم کو ایک پتّا دیجیے۔ تمام طلبہ پتّے کی لمبائی ڈنٹھل سے اوپری سرے تک ناپیے اور اندراج کیجیے۔ تمام مشاہدات (شمارے) اندراج کرنے کے بعد ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ایک خاص عدد کے ارد گرد یہ مشاہدات مرکوز ہو رہے ہیں۔

اب ہم تمام شماروں کی مرکزی رجحان کی پیمائش کا میانیہ، وسطانیہ اور کثیریہ کا مزید مطالعہ کریں گے۔ اس کے لیے اس میں استعمال ہوئی اصطلاحات اور علامتوں کی معلومات حاصل کریں گے۔

$$\text{شماروں کا میانیہ} = \frac{\text{تمام شماروں کی جمع}}{\text{کل شمارے}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

(یہاں x_i ، i واں شمارہ ہے۔)

میانیہ $\overline{X}$ سے ظاہر کرتے ہیں اور وہ دیے ہوئے شماروں کا اوسط ہے۔

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

آیئے، سمجھ لیں۔

جماعت بند تعددی تقسیمی جدول کا میانیہ
(Mean for grouped frequency distribution)

جب شماروں کی تعداد زیادہ ہوتی ہے تب مذکورہ بالا ضابطے میں تمام اعداد لکھ کر ان کی جمع کرنا دشوار ہوتا ہے۔ اس کے لیے ہم کوئی دوسرا طریقہ استعمال کرتے ہیں۔

کبھی کبھی بڑے پیمانے پر کیے گئے تجربات کی معلومات کی جماعت بندی جدول میں دی ہوئی ہوتی ہے۔ ایسے وقت معلومات کی جانچ کی تعداد کا میانیہ صحیح معلوم نہیں کیا جا سکتا۔ اس لیے اس کے تقریباً قریب کا عدد معلوم کرنے کی یا اندازاً میانیہ معلوم کرنے کے طریقے کا مطالعہ کریں گے۔

راست طریقہ (Direct Method)

اب ہم جماعت بند شماروں کا میانیہ معلوم کرنے کے طریقے کی مثال کا مطالعہ کریں گے۔

مثال : ذیل میں ایک کام مکمل کرنے کے لیے ہر مزدور کو درکار وقت کے تعدد کی تقسیمی جدول دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے وہ کام پورا کرنے کے لیے ایک مزدور کو درکار وقت کا میانیہ معلوم کیجیے۔

ہر ایک کو کام پورا کرنے کے لیے درکار وقت (گھنٹے)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
مزدوروں کی تعداد	10	15	12	8	5

حل :

(1) جدول میں دِکھائے ہوئے کے مطابق عمودی ستون لیے گئے ہیں۔

(2) پہلے ستون میں 'جماعت' لکھا گیا ہے۔

(3) دوسرے ستون میں وسط جماعت x_i لکھا گیا ہے۔

(4) تیسرے ستون میں اس وقفۂ جماعت کے مزدوروں کی تعداد (تعدد) (f_i) لکھا گیا ہے۔

(5) چوتھے ستون میں ہر جماعت کے لیے $(x_i \times f_i)$ کا حاصل ضرب لکھا گیا ہے۔

(6) چوتھے ستون میں $\sum_{i=1}^{N} x_i f_i$ لکھا گیا ہے۔

جماعت (وقت گھنٹے میں)	وسط جماعت x_i	تعدد (مزدوروں کی تعداد f_i)	تعدد × وسط جماعت $x_i f_i$
15-19	17	10	170
20-24	22	15	330
25-29	27	12	324
30-34	32	8	256
35-39	37	5	185
کل		$\sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 1265$

(7) ضابطے کی مدد سے میانیہ معلوم کیا گیا ہے۔

$$\text{میانیہ} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{1265}{50} = 25.3 \cdots \because \sum f_i = N$$

ایک مزدور کے کام مکمل کرنے کے لیے درکار وقت کا میانیہ 25.3 گھنٹے (اندازاً)

حل کردہ مثالیں

مثال (1) درج ذیل جدول میں 50 طلبہ کے آزمائشی امتحان کے مارکس کا فی صد دیا ہوا ہے۔ اس کی مدد سے مارکس کے فی صد کا میانیہ معلوم کیجیے۔

مارکس کا فی صد	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
طلبہ کی تعداد	3	7	15	20	5

حل : مراحل کے لحاظ سے درج ذیل جدول تیار کی گئی ہے۔

جماعت (مارکس کا فی صد)	وسط جماعت x_i	تعدد (طلبہ کی تعداد) f_i	تعدد × وسط جماعت $x_i f_i$
0-20	10	3	30
20-40	30	7	210
40-60	50	15	750
60-80	70	20	1400
80-100	90	5	450
		$N = \sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 2840$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{2840}{50}$$

$$= 56.8$$

$\therefore$ مارکس کے فی صد کا میانیہ $= 56.8$

مثال (2) گزشتہ موسمِ گرما میں مہاراشٹر میں 30 شہروں کے ایک دن کا اعلیٰ درجۂ حرارت °C میں درج ذیل جدول میں دیا ہوا ہے۔ اس کی مدد سے درجۂ حرارت کا میانیہ معلوم کیجیے۔

اعلیٰ درجۂ حرارت	24-28	28-32	32-36	36-40	40-44
شہروں کی تعداد	4	5	7	8	6

حل :

جماعت (درجۂ حرارت °C)	وسط جماعت x_i	شہروں کی تعداد (تعدد) f_i	تعدد × وسط جماعت $x_i f_i$
24-28	26	4	104
28-32	30	5	150
32-36	34	7	238
36-40	38	8	304
40-44	42	6	252
کل		$N = \sum f_i = 30$	$\sum x_i f_i = 1048$

$$\text{میانیہ} = \bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{1048}{30} = 34.9\ ^\circ C$$

مفروضہ میانیہ کا طریقہ (Assumed Mean Method)

مذکورہ بالا حل کردہ مثالوں کی مدد سے ہمیں سمجھ میں آتا ہے کہ کبھی کبھی x_i اور f_i کا حاصل ضرب $(x_i f_i)$ بہت بڑا عدد آتا ہے۔ اس کی وجہ سے آسان طریقے سے میانیہ معلوم کرنا ذرا دشوار ہوجاتا ہے۔ اس کے لیے مزید ایک طریقے 'مفروضہ میانیہ کا طریقہ' کو ہم سمجھیں گے۔ اس طریقے سے میانیہ معلوم کرتے وقت چھوٹے اعداد کی جمع اور تقسیم کرنے سے کام آسان ہوجاتا ہے۔

مثلاً 40, 42, 43, 45, 47, 48 شمارے دیے ہوئے ہیں۔ ان کا میانیہ معلوم کرنا ہے۔

اس مثال میں اعداد کا مشاہدہ کرتے ہیں تو ہمیں ایسا پتا چلتا ہے کہ شماروں کا میانیہ 40 سے زیادہ ہے۔ اس لیے ہم عدد 40 کو میانیہ فرض کریں گے۔ $40-40=0$، $42-40=2$، $43-40=3$، $45-40=5$، $47-40=7$، $48-40=8$ یہ فرق حاصل ہوا۔ انھیں انحراف کرنے والا کہتے ہیں۔ ان کا میانیہ معلوم کریں گے۔ اسے مفروضہ میانیہ 40 میں ملانے پر ہمیں دیے ہوئے تمام معطیات کا میانیہ حاصل ہوجائے گا۔

یعنی، میانیہ = مفروضہ میانیہ + مفروضہ میانیہ سے انحراف کے فرق کا میانیہ

$$\bar{X} = 40 + \left(\frac{0+2+3+5+7+8}{6}\right) = 40 + \frac{25}{6} = 40 + 4\frac{1}{6} = 44\frac{1}{6}$$

مفروضہ میانیہ کے لیے A ، مفروضہ میانیہ سے انحراف کے لیے d اور انحرافی اعداد کے میانیہ کے لیے $\overline{d}$ کی علامت فرض کرتے ہیں۔ اس طرح ضابطہ حاصل ہوتا ہے: $\overline{X} = A + \overline{d}$

اسی مثال کو ہم مفروضہ میانیہ 43 لے کر حل کریں گے۔ ہر شمارے سے 43 تفریق کریں گے۔ یعنی مفروضہ میانیہ سے انحراف معلوم کریں گے۔

$40 - 43 = -3,\ 42 - 43 = -1,\ 43 - 43 = 0,\ 45 - 43 = 2,\ 47 - 43 = 4,\ 48 - 43 = 5$

مفروضہ میانیہ سے انحرافی اعداد کی جمع $= -3 - 1 + 0 + 2 + 4 + 5 = 7$

اب، $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 43 + \left(\frac{7}{6}\right)$ ...(یہاں انحرافی اعداد کی تعداد 6 ہے)

$= 43 + 1\frac{1}{6}$

$= 44\frac{1}{6}$

ہمیں یہ پتا ہے کہ اس طرح سے مفروضہ میانیہ کا استعمال کرنے سے حسابی عمل کم ہو جاتا ہے۔ اسی طرح شماروں میں سے یا سہولت کے مطابق دیگر کوئی بھی عدد میانیہ مفروضہ مان کر بھی معطیات کا میانیہ تبدیل نہیں ہوتا۔

اب ہم دی ہوئی تعددی جدول کے لیے اس طریقے کو کس طرح استعمال کرسکتے ہیں اس کی ایک مثال کا مطالعہ کریں گے۔

مثال : 100 سبزی فروشوں کی روزانہ کی فروخت کا تعدد ذیل کی جدول میں دیا ہوا ہے۔ مفروضہ میانیہ کے طریقے سے روزانہ کی فروخت کا میانیہ معلوم کیجیے۔

روزانہ کی فروخت (روپے)	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
سبزی فروشوں کی تعداد	15	20	35	30

حل : مفروضہ میانیہ A = 2250 لیں گے ، انحراف $= d_i = x_i - A$

جماعت روزانہ کی فروخت (روپے میں)	وسط جماعت x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2250$	تعدد (سبزی فروشوں کی تعداد) f_i	انحراف × تعدد $f_i d_i$
1000-1500	1250	–1000	15	–15000
1500-2000	1750	–500	20	–10000
2000-2500	2250→A	0	35	0
2500-3000	2750	500	30	15000
کل			$N = \sum f_i = 100$	$\sum f_i d_i = -10000$

درج ذیل مراحل کی مدد سے جدول بنایا گیا ہے۔

(1) مفروضہ میانیہ A = 2250 لیا گیا ہے (عام طور پر جدول میں زیادہ تعدد والے وسط جماعت کا مفروضہ میانیہ فرض کرتے ہیں۔)

(2) پہلے ستون میں فروخت کی جماعت بنا کر اسے پہلے ستون میں لکھا گیا ہے۔

(3) دوسرے ستون میں وسط جماعت لکھا گیا ہے۔

(4) تیسرے ستون میں $d_i = x_i - A = x_i - 2250$ کی قیمت لکھی گئی ہے۔

(5) چوتھے ستون میں ہر جماعت کے سبزی فروشوں کی تعداد لکھی گئی ہے اور اُن کی جمع $\sum f_i$ لکھی گئی ہے۔

(6) پانچویں ستون میں $(f_i \times d_i)$ حاصل ضرب لکھ کر ان کی جمع $\sum f_i d_i$ کی گئی ہے۔

ضابطے کا استعمال کر کے $\overline{d}$ اور $\overline{X}$ معلوم کیا گیا۔

$$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = \frac{-10000}{100} = -100 \quad , \quad \text{میانیہ } \overline{X} = A + \overline{d} = 2250 - 100 = 2150$$

∴ روزانہ کی فروخت کا میانیہ 2150 روپے ہے۔

عملی کام : اسی مثال کو راست طریقے سے حل کیجیے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) درج ذیل جدول میں ایک ٹھیکیدار کے پاس 50 مزدوروں کی روزانہ کی مزدوری کا تعددی تقسیمی جدول دیا ہوا ہے۔ اس کی مدد سے ایک مزدور کی روزانہ کی مزدوری کا میانیہ، مفروضہ میانیہ کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

ہر مزدور کی روزانہ کی مزدوری (روپے)	200-240	240-280	280-320	320-360	360-400
مزدوروں کی تعداد (تعدد)	5	10	15	12	8

حل : فرض کیجیے، مفروضہ میانیہ A = 300

جماعت مزدوری (روپے میں)	وسط جماعت x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 300$	تعدد (مزدوروں کی تعداد) f_i	انحراف × تعدد $f_i d_i$
200-240	220	–80	5	–400
240-280	260	–40	10	–400
280-320	300→A	0	15	0
320-360	340	40	12	480
360-400	380	80	8	640
کل			$\sum f_i = 50$	$\sum f_i d_i = 320$

$$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = \frac{320}{50} = 6.4$$

میانیہ ، $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 300 + 6.4$

$= 306.40$

مزدوروں کی روزانہ کی مزدوری کا میانیہ 306.40 روپے ہے۔

گریز مرحلے کا طریقہ (Step deviation method)

ہم نے میانیہ معلوم کرنے کے لیے راست طریقہ اور مفروضہ میانیہ کے طریقے کا مطالعہ کیا۔ زیادہ آسانی سے میانیہ معلوم کرنے کے طریقے کی مزید ایک مثال کا مطالعہ کریں گے۔

- پہلے A مفروضہ میانیہ کو تفریق کر کے d_i ستون بنائیں گے۔
- تمام d_i کا م ذا 'g' آسانی سے مل جاتا ہے تو $u_i = \frac{d_i}{g}$ کا ستون تیار کریں گے۔
- تمام u_i اعداد کا میانیہ $\overline{u}$ معلوم کریں گے۔
- $\overline{X} = A + \overline{u}\, g$ ضابطہ حاصل کریں گے۔

مثال : 100 خاندانوں کی صحت کے بیمہ کے لیے سرمایہ کاری کی سالانہ رقم تعددی جدول میں دی ہوئی ہے۔ گریز مرحلہ کے طریقے سے خاندانوں کی سالانہ سرمایہ کاری کا میانیہ معلوم کیجیے۔

ہر خاندان کے بیمہ کی رقم (روپے)	800-1200	1200-1600	1600-2000	2000-2400	2400-2800	2800-3000
خاندانوں کی تعداد	3	15	20	25	30	7

حل : فرض کیجیے، A = 2200 ، تمام d_i دیکھ کر $g = 400$ ہے۔

جماعت بیمے کی رقم (روپے)	وسط جماعت x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2200$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	تعدد (خاندانوں کی تعداد) f_i	$f_i u_i$
800-1200	1000	−1200	−3	3	−9
1200-1600	1400	−800	−2	15	−30
1600-2000	1800	−400	−1	20	−20
2000-2400	2200→A	0	0	25	0
2400-2800	2600	400	1	30	30
2800-3200	3000	800	2	7	14
کل				$\sum f_i = 100$	$\sum f_i u_i = -15$

مذکورہ بالا جدول کے مراحل ذیل کے مطابق بنائے گئے ہیں۔

(1) جدول کے پہلے ستون میں بیما میں سرمایہ کاری کرنے والوں کی جماعت لکھی ہوئی ہے۔

(2) دوسرے ستون میں وسط جماعت x_i لکھا ہوا ہے۔

(3) تیسرے ستون میں $d_i = x_i - A$ کی قیمت لکھی ہوئی ہے۔

(4) d_i اس ستون میں تمام اعداد 400 کے گنا میں ہیں اس لیے $g = 400$ لیا گیا ہے۔

چوتھے ستون میں $u_i = \frac{d_i}{g} = \frac{d_i}{400}$ کی قیمت لکھی ہوئی ہے۔

(5) پانچویں ستون میں ہر جماعت کا تعدد (خاندانوں کی تعداد) لکھی ہوئی ہے۔

(6) چھٹے ستون میں $f_i \times u_i$ حاصل ضرب ہر جماعت کے لیے لکھا گیا ہے۔

u_i کا میانیہ ضابطے کی مدد سے معلوم کریں گے۔

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{-15}{100} = -0.15$$

$$\bar{X} = A + \bar{u}\, g$$

$$= 2200 + (-0.15)\,(400)$$

$$= 2200 + (-60.00)$$

$$= 2200 - 60 = 2140$$

∴ خاندانوں کی بیما کی سالانہ سرمایہ کاری کا میانیہ 2140 روپے ہے۔

عملی کام : راست طریقہ سے اور مفروضہ میانیہ طریقے میں سے کسی بھی طریقے سے معلوم کیے گئے میانیہ یکساں آتے ہیں اس کی تصدیق کیجیے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ذیل میں ایک اسکول کے 50 طلبہ نے سیلاب زدگان کے لیے جمع کیے گئے عطیات کی تعددی جدول دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے جمع کی گئی عطیات کا میانیہ معلوم کیجیے۔

عطیات (روپے)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
طلبہ کی تعداد	2	4	24	18	1	1

دو متواتر جماعت میں بہت کم شمارے ہوں، تو ان کو ملا کر ایک جماعت بنانا سہولت بخش ہوتا ہے۔اس مثال میں 0-500 اور 500-1000 کی ایک جماعت اور 2000-2500 اور 2500-3000 کی ایک جماعت بنائیں گے۔

عطیات کی رقم (روپے)	0-1000	1000-1500	1500-2000	2000-3000
طلبہ کی تعداد	6	24	18	2

حل : فرض کیجیے، A = 1250 ، تمام d_i کا مطالعہ کرنے سے پتا چلتا ہے کہ $g = 250$

جماعت عطیات (روپے)	وسط جماعت x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 1250$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	تعدد f_i	$f_i u_i$
0-1000	500	–750	–3	6	–18
1000-1500	1250→A	0	0	24	0
1500-2000	1750	500	2	18	36
2000-3000	2500	1250	5	2	10
				$\sum f_i = 50$	$\sum f_i u_i = 28$

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{28}{50} = 0.56,$$

$$\overline{u}\, g = 0.56 \times 250 = 140$$

$$\overline{X} = A + g\overline{u} = 1250 + 140 = 1390$$

∴ جمع کی گئی عطیات کا میانیہ 1390 روپے ہے۔

عملی کام -

1. اس مثال کو راست طریقے سے حل کیجیے۔
2. اوپر دی ہوئی مثال میں معلوم کیا گیا میانیہ، مفروضہ میانیہ کے طریقے سے معلوم کر کے تصدیق کیجیے۔
3. A = 1750 رکھ کر مذکورہ بالا مثال حل کیجیے۔

مشقی سیٹ 6.1

.1 ذیل میں دسویں جماعت کے 50 طلبہ کے لیے روزانہ مطالعہ کے لیے تفویض کیے گئے گھنٹے اور طلبہ کی تعداد کی تعددی تقسیمی جدول دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے طلبہ کے مطالعے کے لیے دیے ہوئے وقت کا میانیہ راست طریقے سے معلوم کیجیے۔

وقت (گھنٹے)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10
طلبہ کی تعداد	7	18	12	10	3

.2 ذیل میں ایک شاہراہ پر ٹول پلازا پر صبح 6 سے شام 6 کے درمیان آنے جانے والی سواریوں سے جمع ہونے والے ٹیکس (روپے) اور سواریوں کی تعداد کی تعددی جدول دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے جمع ہونے والے ٹیکس کا میانیہ مفروضہ میانیہ کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

جمع ہونے والا ٹیکس (روپے)	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
سواریوں کی تعداد	80	110	120	70	40

.3 ذیل میں ایک دن میں ملک سینٹر سے 50 گاہکوں کو تقسیم کیے گئے دودھ کی تعددی تقسیم کی جدول دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے تقسیم کیے گئے دودھ کا میانیہ راست طریقے سے معلوم کیجیے۔

دودھ کی تقسیم (لٹر)	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
گاہکوں کی تعداد	17	13	10	7	3

.4 ذیل میں بعض باغبانوں کے سنترے کی پیداوار کی تعددی تقسیم کی جدول دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے پیداوار کا میانیہ 'مفروضہ میانیہ' کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

پیداوار (ہزار روپے)	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
باغبانوں کی تعداد	20	25	15	10	10

.5 ذیل میں ایک کمپنی کے 120 ملازمین سے قحط زدگان کے لیے جمع کیے گئے عطیات کی تعددی تقسیم کی جدول دی ہوئی ہے۔ ملازمین کی جمع کیے ہوئے عطیات کا میانیہ 'گریز مرحلہ طریقہ' سے معلوم کیجیے۔

جمع عطیات (روپے)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500
ملازمین کی تعداد	35	28	32	15	10

.6 ذیل میں ایک کارخانے کے 150 مزدوروں کی ہفتہ واری مزدوری کی تعددی تقسیم کی جدول دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے مزدوروں کی ہفتہ واری مزدوری کا میانیہ 'گریز مرحلہ طریقے' سے معلوم کیجیے۔

ہفتہ واری مزدوری (روپے)	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
مزدوروں کی تعداد	25	45	50	30

آیئے، ذرا یاد کریں۔

سائنس کی نمائش میں حصہ لینے کے لیے ایک اسکول سے دو طالب علم اور دو طالبات دو دنوں کے لیے ایک شہر میں گئے تھے۔ انھیں اپنا شام کا کھانا کہاں کھانا ہے، یہ طے کرنا تھا۔ کام کی جگہ سے ایک کلومیٹر کے فاصلے پر طعام دینے والی دس ہوٹلیں تھیں۔ ان کے طعام کا نرخ روپے میں، صعودی ترتیب میں ذیل کے مطابق دیا ہوا ہے۔

$$40,\ 45,\ 60,\ 65,\ 70,\ 80,\ 90,\ 100,\ 500$$

تمام ہوٹلوں میں طعام کی اوسط قیمت $= \dfrac{1130}{10} = 113$ روپے

طلبہ نے کس ہوٹل میں کھانے کا فیصلہ کیا ہوگا؟ 500 روپے نرخ کا طعام دینے والی ہوٹل کو چھوڑ کر دیگر سب ہوٹلوں میں نرخ 113 روپے سے کم تھا۔ طلبہ نے اوسط دام والے ہوٹل کو منتخب کرنا طے کیا۔ پہلے دن 70 روپے نرخ والے اور دوسرے دن 80 روپے نرخ والے ہوٹل میں کھانا کھایا۔ بعض مرتبہ شماروں کے اوسط کی بہ نسبت اُن کا وسطانیہ استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ اس کی ایک مثال ہے۔

گزشتہ جماعت میں غیر جماعت بند معطیات کے لیے وسطانیہ کے تصور کا ہم مطالعہ کر چکے ہیں۔

- دیے ہوئے معطیات میں اعداد صعودی یا نزولی ترتیب میں لکھیں تو اس ترتیب میں وسط میں آنے والے عدد کو معطیات کا وسطانیہ کہتے ہیں۔
- وسطانیہ دیے ہوئے معطیات کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے یعنی دیے ہوئے معطیات کے لیے وسطانیہ کے اوپر اور نیچے دونوں طرف مساوی تعداد میں شمارے ہوتے ہیں۔
- دیے ہوئے شمارے $k_1 \le k_2 \le k_3 \ .\ .\ .\ .\ \ .\ .\ \le k_n$ اس طریقے سے لکھتے ہیں۔
- معطیات میں شمارے طاق ہوں تو $\dfrac{n+1}{2}$ واں شمارہ وسطانیہ ہوتا ہے کیونکہ $k_{\frac{n+1}{2}}$ سے قبل $\dfrac{n-1}{2}$ شمارے اور اُس کے بعد بھی $\dfrac{n-1}{2}$ شمارے ہوتے ہیں۔ $n = 2m + 1$ لے کر اس کی تصدیق کیجیے۔
- معطیات میں شمارہ n اگر جفت ہو تو معطیات کا وسطانیہ درمیانی دو اعداد کا اوسط ہوتا ہے کیونکہ $k_{\frac{n}{2}}$ سے قبل اور $k_{\frac{n+2}{2}}$ کے بعد ہر طرف $\dfrac{n-2}{2}$ شمارہ ہوتا ہے۔ $n = 2m$ لے کر تصدیق کیجیے۔
- یعنی $\dfrac{n}{2}$ واں عدد اور $\dfrac{n+2}{2}$ واں عدد کا اوسط لینے پر آنے والا عدد اس معطیات کا وسطانیہ ہوتا ہے۔

مثال (1) 32, 33, 38, 40, 43, 48, 50 اِن شماروں کی ترتیب میں چوتھا عدد وسط میں ہے، اس لیے دیے ہوئے معطیات کا وسطانیہ = 40 ہے۔

مثال (2) 61, 62, 65, 66, 68, 70, 74, 75 یہاں شماروں کی تعداد 8 یعنی جفت ہے۔ اس لیے چوتھا اور پانچواں یہ دونوں شمارے درمیان میں ہیں، جو 66 اور 68 ہیں، اس لیے اس معطیات کا وسطانیہ $= 67 = \dfrac{66+68}{2}$

آئیے، سمجھ لیں۔

جماعت بند تعددی تقسیم کے لیے وسطانیہ (Median for grouped frequency distribution)

شماروں کی تعداد زیادہ ہوتی ہے تو اس طرح ترتیب دے کر وسطانیہ معلوم کرنا دشوار ہوتا ہے، اس لیے اب ہم جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول سے اندازاً وسطانیہ معلوم کرنے کا طریقہ مثال کی مدد سے سمجھیں گے۔

مثال 1: 8, 12, 15.5, 11, 10.4, 8, 6 اِن شماروں کی جماعت بند جدول ذیل میں دی ہوئی ہے۔

جماعت	شماریاتی نشان	تعدد
6 - 10	| |	2
11 - 15	| |	2
16 - 20	|	1

جماعت	شماریاتی نشان	تعدد
5.5 - 10.5	| | |	3
10.5 - 15.5	| |	2
15.5 - 20.5	| |	2

پہلی جدول میں 10.4 اور 15.5 ، یہ دو شمارے شامل نہیں کیے جا سکے کیونکہ یہ عدد 10-6 ، 15-11 ، 20-16 ان میں سے کسی بھی جماعت میں شامل نہیں ہیں۔

ایسے وقت جماعت کو مسلسل کر لیتے ہیں، یہ ہمیں معلوم ہے۔

اس جدول میں نچلی حد میں سے 0.5 سے کم کرتے ہیں اور اوپری حد میں 0.5 سے بڑھا لیتے ہیں تو مسلسل جماعتیں حاصل ہو جاتی ہیں۔

اس طرح مسلسل جماعتیں حاصل کرکے دوسری جدول تیار کی گئی۔ یہاں 15.5 شمارہ کو 20.5 - 15.5 جماعت میں شامل کیا گیا ہے۔

یہاں شمارہ 15.5 کو جماعت 15.5 - 10.5 میں شامل نہیں کریں گے کیونکہ جماعت کی اوپری حد اس جماعت میں شامل نہیں ہوتی۔

مسلسل کرنے کے طریقے بدلیں تو تعدد بدل سکتا ہے۔ یہ ہمیں اوپر دی ہوئی جدول سے سمجھ میں آتا ہے۔

اسے ذہن میں رکھیں۔

اوپر کی جدول میں 10-6 اِس جماعت کے لیے وسط جماعت ← $= \frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8$ ہے۔

اسی طرح 10.5 - 5.5 اس جماعت کے لیے وسط جماعت ← $= \frac{5.5+10.5}{2} = \frac{16}{2} = 8$ ہے۔

یعنی جماعت کی تشکیل مختلف طریقے سے کرتے ہیں تب بھی وسط جماعت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

تشریحی مثال

دسویں جماعت کے داخلہ امتحان میں حاصل کردہ 100 طلبہ کے مارکس کی تعددی جدول ذیل میں دی ہوئی ہے۔ طلبہ کے مارکس کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

امتحان میں حاصل کردہ مارکس	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
طلبہ کی تعداد	4	20	30	40	6

حل : $N = 100$

$\frac{N}{2} = 50$ اس کے لیے 50 واں عدد اندازاً وسطانیہ ہوگا۔اب 50 نمبر کا شمارہ کس جماعت میں آئے گا یہ ہمیں معلوم کرنا ہے۔جماعت کی اوپری حد ’سے کم قسم‘ کی اجتماعی تعددی جدول سے یہ معلوم کر سکتے ہیں۔

اس لیے ہم اوپر دی ہوئی تعددی جدول سے ’سے کم قسم کی‘ اجتماعی تعددی تقسیمی جدول بنائیں گے۔

جماعت (طلبہ کے حاصل کردہ مارکس)	طلبہ کی تعداد fi	اجتماعی تعدد (سے کم قسم) cf
0-20	4	4
20-40	20	24
40-60	30	54
60-80	40	94
80-100	6	100

اس جدول سے،

- $\frac{N}{2} = 50$ ، اس نمبر کا شمارہ 40-60 جماعت میں ہے۔جس جماعت میں وسطانیہ آتا ہے، اس جماعت کو **وسطانیہ جماعت** کہتے ہیں۔یہاں پر 40-60 وسطانیہ جماعت ہے۔
- 40-60 جماعت کی نچلی حد 40 ہے اور تعدد 30 ہے۔
- پہلے 50 شماروں میں سے شروع کے 24 شمارے 40 سے کم ہیں۔ باقی ماندہ 26 $(= 50 - 24)$ شمارے $(40 - 60)$ جماعت میں ہیں۔اس میں سے 50 ویں شمارہ کا اندازہ ذیل کے مطابق کرتے ہیں۔
- اس جماعت میں کل 30 شماروں میں سے 26 شمارے 50 ویں شمارہ تک ہیں۔اور طول جماعت 20 ہے۔اس لیے 50 واں شمارہ 40 سے $20 \times \frac{26}{30}$ بڑا ہے، ایسا مان لیا جاتا ہے۔

وہ اندازاً ، $57\frac{1}{3} = 40 + \frac{52}{3} = 40 + \frac{26}{30} \times 20$ ہے۔

$\therefore$ وسطانیہ $= 57\frac{1}{3}$

• ضابطے کے لحاظ سے ہم ذیل کے مطابق لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{وسطانیہ} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

اِس ضابطے میں،

L = وسطانیہ جماعت کی نچلی حد، N = کل تعدد

h = وسطانیہ جماعت کا طول جماعت، f = وسطانیہ جماعت کا تعدد

cf = وسطانیہ جماعت سے قبل کی جماعت کا اجتماعی تعدد

مذکورہ مثال میں، $\frac{N}{2} = 50$ ، $cf = 24$ ، $h = 20$ ، $f = 30$ ، $L = 40$

(ضابطہ) . . . $$\text{وسطانیہ} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{50 - 24}{30}\right) \times 20$$

$$= 40 + \frac{26 \times 20}{30}$$

$$= 40 + 17\frac{1}{3}$$

$$= 57\frac{1}{3}$$

اسے ذہن میں رکھیں۔

✦ وسطانیہ معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی جماعت مسلسل نہیں ہو تو اسے مسلسل کرنا ہوتا ہے۔

✦ شماروں کی تعداد بہت زیادہ ہو تو صعودی ترتیب میں ہر شمارہ لکھنا مشکل ہوتا ہے، اس لیے معطیات کی ترتیب جماعت بند کی صورت میں کرتے ہیں۔ ایسے جماعت بند معطیات کا وسطانیہ بالکل صحیح معلوم کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے لیکن اندازاً وسطانیہ معلوم کرنے کے لیے ذیل کا ضابطہ استعمال کرتے ہیں۔

$$\text{وسطانیہ} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) خدمات برائے عوامی آمد و رفت کرنے والی 60 بسوں کا ایک دن میں طے کردہ فاصلوں کا تعدد ذیل کی جدول میں دیا ہوا ہے۔ بسوں کے ذریعے ایک دن میں طے کردہ فاصلوں کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

روزانہ طے کردہ فاصلہ (کلومیٹر)	200-209	210-219	220-229	230-239	240-249
بسوں کی تعداد	4	14	26	10	6

حل : (1) جدول میں دیے ہوئے جماعت مسلسل نہیں ہیں۔

یہاں ایک جماعت کی اوپری حد اور اگلی جماعت کی نچلی حد کے درمیان فرق 1 ہے۔

$\therefore\ 1 \div 2 = 0.5$ ، اس قیمت کو ہر ایک جماعت کی نچلی حد سے تفریق کریں گے اور جماعت کی اوپری حد میں ملا کر جماعت کی حدود کا تعین کریں گے۔ اس کے مطابق جماعت مسلسل کریں گے اور نئی جدول لکھیں گے۔

(2) بعد میں اس میں 'سے کم قسم' کا اجتماعی تعدد کا ستون بنائیں گے۔

دی ہوئی جماعت	مسلسل کی گئی جماعت	تعدد f_i	اجتماعی تعدد (سے کم قسم)
200 - 209	199.5 - 209.5	4	4
210 - 219	209.5 - 219.5	14	18 $\rightarrow$ cf
220 - 229	219.5 - 229.5	26 $\rightarrow$ f	44
230 - 239	229.5 - 239.5	10	54
240 - 249	239.5 - 249.5	6	60

یہاں ، $\Sigma f_i = N = 60$ = کل تعداد ، $\therefore\ \frac{N}{2} = 30$

$\therefore$ وسطانیہ 30 واں شمارہ ہے۔

پہلے 18 شمارے 219.5 سے کم اور باقی ماندہ $30 - 18 = 12$ شمارے جماعت 219.5 - 229.5 میں ہیں، اس لیے یہ وسطانیہ جماعت ہے۔

219.5 - 229.5 جماعت کا اجتماعی تعدد (سے کم قسم) 44 ہے۔

ضابطے کی رو سے ،

L = وسطانیہ جماعت کی نچلی حد = 219.5 ، h = وسطانیہ جماعت کا طول جماعت = 10 ،

cf = وسطانیہ جماعت سے قبل کی جماعت کا اجتماعی تعدد = 18

f = وسطانیہ جماعت کا تعدد = 26

$$\text{وسطانیہ} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$\therefore \text{وسطانیہ} = 219.5 + \left(\frac{30-18}{26}\right)\times 10$$

$$= 219.5 + \left(\frac{12\times 10}{26}\right)$$

$$= 219.5 + 4.62$$

$$= 224.12$$

∴ بسوں کے روزانہ فاصلہ طے کرنے کا وسطانیہ 224.12 کلومیٹر ہے۔

مثال (2) ذیل کی جدول میں ایک دن میں ایک میوزیم میں آنے والے افراد کی عمریں دی ہوئی ہیں۔ اس بنا پر افراد کی عمروں کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

افراد کی تعداد	عمر (سال)
3	10 سے کم
10	20 سے کم
22	30 سے کم
40	40 سے کم
54	50 سے کم
71	60 سے کم

حل : یہاں 'سے کم قسم' کی اجتماعی تعددی تقسیم کی جدول دی ہوئی ہے۔ سب سے پہلے ہم جماعت کی اصل حدود حاصل کریں گے۔ ہمیں پتا ہے کہ 'سے کم قسم' کی اجتماعی تعدد، جماعت کی اوپری حد سے منسلک ہوتی ہے۔ پہلی جماعت کی اوپری حد 10 ہے۔ ہر شخص کی عمر مثبت عدد ہوتی ہے اس لیے پہلی جماعت 0-10 ہوگی۔ دوسری جماعت کی اوپری حد 20 ہے۔ اس لیے دوسری جماعت 10-20 ہوگی۔ اس طرح طول جماعت 10 لے کر ترتیب وار جماعت تیار کریں گے۔ اس کے مطابق آخری جماعت 50-60 ہوگی۔ اس طرح ہم ذیل کے مطابق جماعت لکھ سکتے ہیں۔

اجتماعی تعدد (سے کم قسم)	تعدد (افراد کی تعداد)	جماعت	عمر (سال)
3	3	0-10	10 سے کم
10	10 – 3 = 7	10-20	20 سے کم
22 → cf	22 – 10 = 12	20-30	30 سے کم
40	40 – 22 = 18 → f	30-40	40 سے کم
54	54 – 40 = 14	40-50	50 سے کم
71	71 – 54 = 14	50-60	60 سے کم

یہاں، $N = 71, \quad \therefore \quad \frac{N}{2} = 35.5, \quad h = 10$

جماعت 30-40 میں 35.5 واقع ہے، اس لیے یہ وسطانیہ جماعت ہے۔اس سے قبل کی جماعت کا اجتماعی تعدد 22 ہے

یعنی $cf = 22$ ، $L = 30$ ، $f = 18$

$$\text{وسطانیہ} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 30 + (35.5 - 22) \times \frac{10}{18}$$

$$= 30 + (13.5) \times \frac{10}{18}$$

$$= 30 + 7.5$$

$$= 37.5$$

$\therefore$ میوزیم میں آنے والے افراد کی عمروں کا وسطانیہ 37.5 سال ہے۔

مشقی سیٹ 6.2

1. ذیل میں دی ہوئی جدول میں ایک سافٹ ویئر کمپنی میں روزانہ کام کے گھنٹوں اور اتنا وقت کام کرنے والے ملازمین کی تعداد دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے ملازمین کے روزانہ کام کے گھنٹوں کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

روزانہ کام کے گھنٹے	8-10	10-12	12-14	14-16
ملازمین کی تعداد	150	500	300	50

2. ایک امرئی میں آم کے درخت اور ہر درخت سے ملنے والے آموں کی تعداد کی تعددی تقسیم کی جدول دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے دیے ہوئے معطیات کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

آموں کی تعداد	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300
درختوں کی تعداد	33	30	90	80	17

3. ممبئی - پونے ایکسپریس وے ٹریفک کی نگرانی کرنے والے پولس چوکی پر کیے گئے سروے میں ذیل کا مشاہدہ دِکھائی دیا۔دیے ہوئے اندراج سے وسطانیہ معلوم کیجیے۔

سواریوں کی رفتار (کلومیٹر فی گھنٹا)	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89
سواریوں کی تعداد	10	34	55	85	10	6

4. مختلف کارخانوں میں بنائے جانے والے بلبوں کی تعداد درج ذیل جدول میں دی ہوئی ہے۔اس بنا پر بلبوں کی پیداوار کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

بلبوں کی تعداد (ہزار میں)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
کارخانوں کی تعداد	12	35	20	15	8	7	8

آیئے، سمجھ لیں۔

جماعت بند تعددی تقسیم سے کثیریہ (Mode for grouped frequency distribution)

ہم جانتے ہیں کہ دیے ہوئے شماروں میں سب سے زیادہ مرتبہ آنے والا شمارہ، اس گروہ کا کثیریہ ہوتا ہے۔

مثال: دو پہیہ کی سواری بنانے والی کمپنی مختلف رنگوں میں دو پہیہ والی سواریاں بناتی ہیں۔کس رنگ کی سواری کی پسند سب سے زیادہ ہے، اسے معلوم کرنا اس کمپنی کو بہت ضروری ہے یعنی رنگ کا کثیریہ معلوم ہونا بہت اہم اور ضروری ہے۔اسی طرح مختلف پیداواری کمپنیوں کو سب سے زیادہ مانگ کس پیداوار کی ہے، اسے معلوم کرنا بہت ضروری ہوتا ہے۔ایسے وقت پیداوار کا کثیریہ معلوم کرنا ہوتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ غیر جماعت بند تعددی تقسیم سے کثیریہ کس طرح معلوم کرتے ہیں۔

اب ہم جماعت بند تعددی تقسیم سے کثیریہ کس طرح معلوم کرتے ہیں، اس کا مطالعہ کریں گے۔

ذیل کے ضابطے کی مدد سے اندازاً کثیریہ معلوم کرنے کے طریقے کا مطالعہ کریں گے۔

$$\text{کثیریہ} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

اوپر دیے ہوئے ضابطے میں ،

L = کثیریہ جماعت کی نچلی حد

f_1 = کثیریہ جماعت کا تعدد

f_0 = کثیریہ جماعت سے قبل کی جماعت کا تعدد

f_2 = کثیریہ جماعت کے بعد کی جماعت کا تعدد

h = کثیریہ جماعت کا طولِ جماعت

اس ضابطے کو استعمال کرکے اندازاً کثیریہ کس طرح معلوم کرتے ہیں، مثالوں کے ذریعے سمجھیں گے۔

حل کردہ مثالیں

مثال(1) درج ذیل تعددی تقسیم کی جدول میں میدان پر کھیلنے کے لیے آنے والے لڑکوں کی تعداد اور اُن کی عمروں کی جماعت دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے میدان پر کھیلنے والے لڑکوں کی عمر کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

لڑکوں کی عمروں کی جماعت (سال)	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
لڑکوں کی تعداد	43	58 $\rightarrow f_0$	70 $\rightarrow f_1$	42 $\rightarrow f_2$	27

اوپر دی ہوئی جدول سے یہ سمجھ میں آتا ہے کہ 10-12 عمروں کی جماعت میں طلبہ کی تعداد سب سے زیادہ ہے۔

حل : یہاں $f_1 = 70$ اور اس کی کثیریہ جماعت 10-12 ہے۔یعنی جماعت 10-12 کثیریہ جماعت ہے۔

دی ہوئی مثال میں،

L = کثیریہ جماعت کی نچلی حد = 10

h = کثیریہ جماعت کا طولِ جماعت = 2

f_1 = کثیریہ جماعت کا تعدد = 70

f_0 = کثیریہ جماعت سے قبل کی جماعت کا تعدد = 58

f_2 = کثیریہ جماعت کے بعد کی جماعت کا تعدد = 42

کثیریہ $= L + \left[\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$$= 10 + \left[\frac{70-58}{2(70)-58-42}\right] \times 2$$

$$= 10 + \left[\frac{12}{140-100}\right] \times 2$$

$$= 10 + \left[\frac{12}{40}\right] \times 2$$

$$= 10 + \frac{24}{40}$$

$$= 10 + 0.6$$

$$= 10.6$$

جواب : $\therefore$ میدان پر کھیلنے والے لڑکوں کی عمروں کا کثیریہ 10.6 سال ہے۔

مثال(2) ذیل کی تعددی تقسیم کی جدول میں ایک پٹرول پمپ پر پٹرول بھروانے والی سواریوں کی تعداد اور سواریوں میں بھرے گئے پٹرول کی معلومات دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے بھرے گئے پٹرول کے حجم کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

پٹرول بھروایا گیا (لٹر)	1-3	4-6	7-9	10-12	13-15
سواریوں کی تعداد	33	40	27	18	12

حل : یہاں دی ہوئی جماعت مسلسل نہیں ہے،اس لیے ہم جماعت کو مسلسل بنائیں گے اور تعددی جدول تیار کریں گے۔

جماعت	اصل جماعت کے حدود	تعدد
1 - 3	0.5 - 3.5	$33 \rightarrow f_0$
4 - 6	3.5 - 6.5	$40 \rightarrow f_1$
7 - 9	6.5 - 9.5	$27 \rightarrow f_2$
10 - 12	9.5 - 12.5	18
13 - 15	12.5 - 15.5	12

یہاں، f_1 = کثیریہ جماعت کا تعدد = 40 ، متعلقہ کثیریہ جماعت 3.5 - 6.5

$$\text{کثیریہ} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

$$\text{کثیریہ} = 3.5 + \left[\frac{40-33}{2(40)-33-27}\right] \times h$$

$$= 3.5 + \left[\frac{7}{80-60}\right] \times 3$$

$$= 3.5 + \frac{21}{20}$$

$$= 3.5 + 1.05$$

$$= 4.55$$

∴ سواریوں میں بھرے گئے پٹرول کے حجم کا کثیریہ 4.55 لٹر ہے۔

مشقی سیٹ 6.3

.1 دودھ جمع کرنے کے ایک مرکز پر کسانوں سے جمع کیے گئے گائے کے دودھ اور لیکٹو میٹر سے ناپے گئے دودھ میں موجود چربی (fat) کا تناسب دیا ہوا ہے۔اس کی مدد سے دودھ میں چربی کے تناسب کا کثیر یہ معلوم کیجیے۔

دودھ میں موجود چربی(%)	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
جمع کیا گیا دودھ (لٹر)	30	70	80	60	20

.2 کچھ خاندانوں کا ماہانہ بجلی کا استعمال ذیل کی جماعت بند تعددی تقسیمی جدول میں دیا ہوا ہے۔اس کی مدد سے بجلی کے استعمال کا کثیر یہ معلوم کیجیے۔

بجلی کا استعمال (یونٹ)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
خاندانوں کی تعداد	13	50	70	100	80	17

.3 چائے کی 100 ہوٹلوں کو مہیا کیے گئے دودھ اور ہوٹلوں کی تعداد کی جماعت بند تعددی جدول دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے مہیا کیے گئے دودھ کا کثیر یہ معلوم کیجیے۔

دودھ (لٹر)	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
ہوٹلوں کی تعداد	7	5	15	20	35	18

.4 ذیل کی تعددی تقسیمی جدول میں 200 مریضوں کی عمریں اور ایک ہفتے میں علاج کرانے والے مریضوں کی تعداد دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے مریضوں کی عمر کا کثیر یہ معلوم کیجیے۔

عمر (سال)	5 سے کم	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29
مریضوں کی تعداد	38	32	50	36	24	20

عملی کام :

- آپ کی جماعت میں 20 لڑکوں کے اوزان کا میانیہ معلوم کیجیے۔
- آپ کی جماعت میں لڑکوں کی قمیص کی ناپ کا کثیر یہ معلوم کیجیے۔
- جماعت کا ہر طالب علم اپنی نبض کی ایک منٹ میں ہونے والی رفتار کو شمار کرے اور اس کا اندراج کرے۔اس اندراج کا جدول بنائیے اور اس سے نبض کے دباؤ کا کثیر یہ معلوم کیجیے۔
- جماعت کے ہر طالب علم کی اونچائی کا اندراج کیجیے۔اس اندراج کی جماعت بندی کیجیے۔اونچائی کا کثیر یہ معلوم کیجیے۔

اسے ذہن میں رکھیں۔

ہم نے مرکزی رجحان کا میانیہ، وسطانیہ اور کثیر یہ کی پیمائش کا مطالعہ کیا۔ مرکزی رجحان کی کون سی پیمائش منتخب کرنا، اسے منتخب کرنے کے مقصد سے ہمیں واضح طور پر معلوم ہونا بہت ضروری ہے۔

فرض کیجیے، ایک اسکول میں دسویں جماعت کی پانچ فریقوں میں سے کون سی فریق داخلہ امتحان میں زیادہ کامیاب ہے، اسے طے کرتے وقت اِن پانچ فریقوں کے داخلی امتحان میں مارکس کا 'میانیہ' معلوم کرنا ہوگا۔

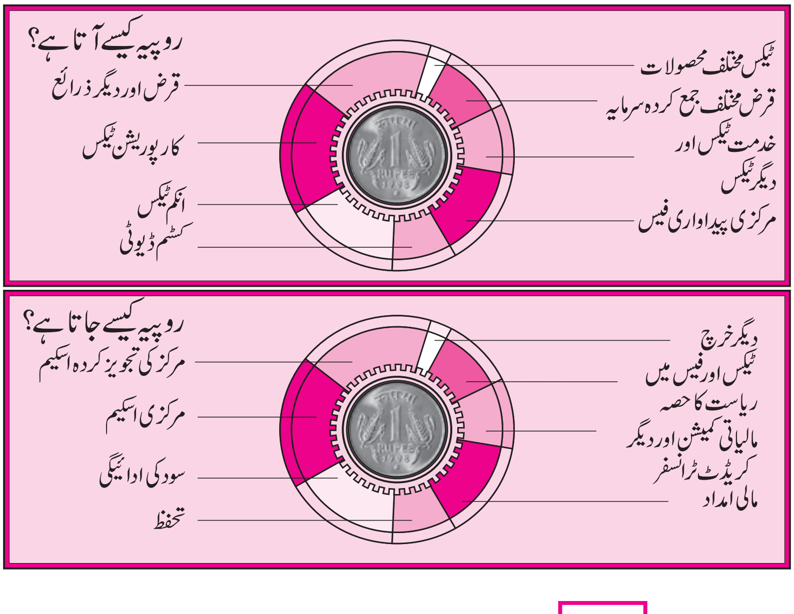
کسی جماعت میں لڑکوں کا امتحان میں حاصل کردہ مارکس کی بنیاد پر دو گروہ بنانا ہو تو اس جماعت کے لڑکوں کے حاصل کردہ مارکس کا 'وسطانیہ' منتخب کرنا ہوگا۔

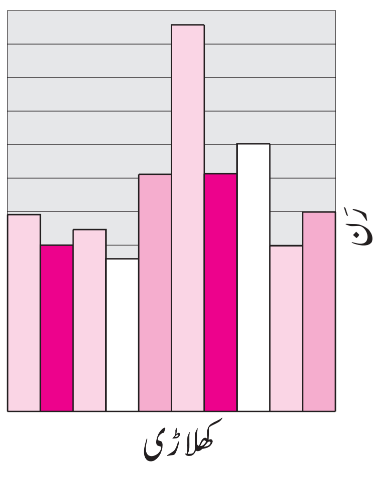
کھریا بنانے والے کسی بچت گٹ کو یہ معلوم کرنا ہو کہ کس رنگ کے کھریے کی سب سے زیادہ مانگ ہے، تو اسے مرکزی رجحان کے 'کثیر یہ' کی ضرورت پیش آئے گی۔

شماریاتی معطیات کا اشکالی اظہار (Pictorial representation of statistical data)

شماریاتی معطیات کا میانیہ، وسطانیہ اور کثیر یہ کی مدد سے یا معطیات کا تجزیہ کر کے اس کا استعمال بعض مخصوص نتائج حاصل کرنے کے لیے کرتے ہیں۔

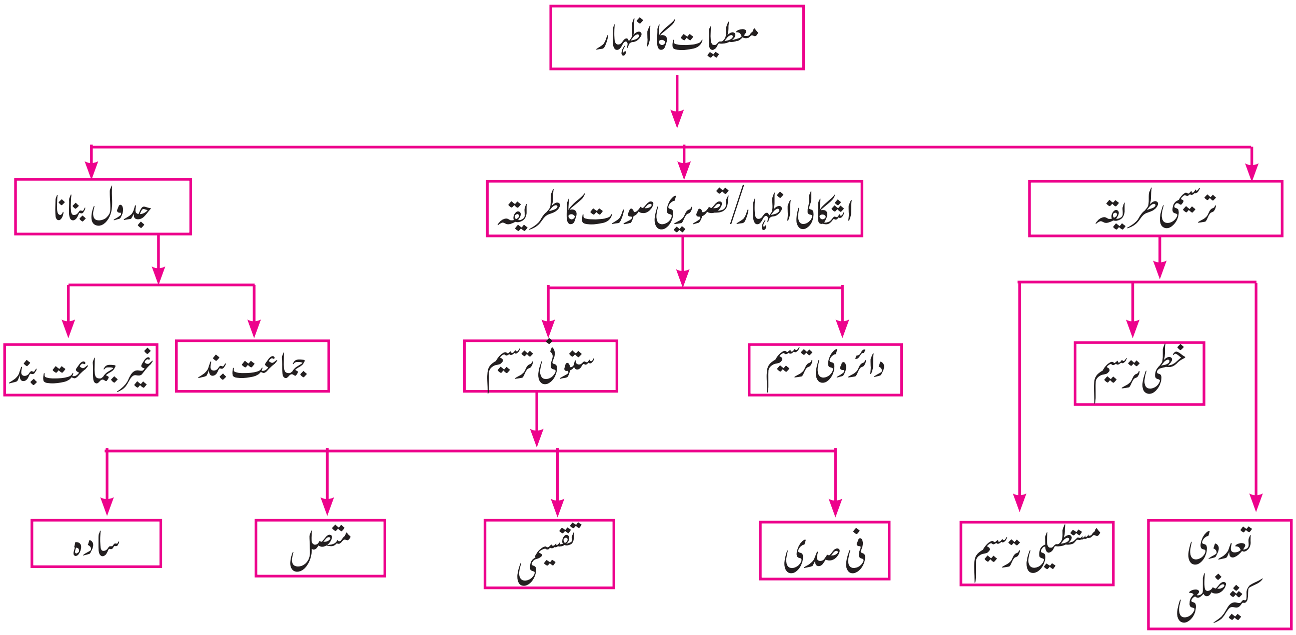
شماریاتی معطیات مختصر صورت میں پیش کرنے کا ایک طریقہ ہمیں معلوم ہے کہ جدول کی صورت میں معطیات کو ترتیب دینا ہے۔ لیکن جدول کی صورت میں ہونے کی وجہ سے بعض باتیں ہمیں فوراً سمجھ میں نہیں آتیں۔ عام انسانوں کو اسے سمجھنے کے لیے، یعنی تمام عام لوگوں کی توجہ معطیات کی اہم باتوں کی طرف مبذول کرانے کے لیے، کیا اس معلومات کا اظہار مختلف طریقوں سے کیا جا سکتا ہے؟ اس سوال پر ہم غور کریں گے۔ مثلاً مالی بجٹ کے بارے میں، کھیل کی معلومات وغیرہ۔





معطیات کی پیش کش (Presentation of Data)

تصویری صورت اور ترسیمی صورت میں اظہار سے معطیات کا مطلب سمجھنے کے لیے مزید توجہ مبذول کرنے والی قسمیں ہیں۔معطیات کے اظہار کے مختلف طریقوں کو دِکھانے والا شجری خاکہ ذیل میں دِکھایا گیا ہے۔



گزشتہ جماعتوں میں ہم نے اِن میں سے چند طریقوں اور ترسیموں کا مطالعہ کیا ہے۔ اب ہم مستطیلی ترسیم، تعددی کثیر ضلعی اور دائروی ترسیم کی مدد سے معطیات کا اظہار کس طرح کرتے ہیں، اس کا مطالعہ کریں گے۔

فلورینس نائیٹنگیل (Florence Nightingale) (1820-1910) یہ عظیم خاتون بہترین اور بامقصد عظیم کے طور پر مشہور ہے۔ کریمیائی جنگ میں زخمی فوجیوں کی بے لوث خدمت کرکے اس نے کئی فوجیوں کی جان بچائی۔ علمِ اعداد وشمار (شماریات) میں بھی فلورینس نائیٹنگیل نے بنیادی کام کیا ہے۔ کئی فوجیوں کی حالت، ان پر کیا جانے والا علاج اور اس کا استعمال، ان تمام کا ٹھیک ٹھیک طور پر اندراج کرکے، اس نے بہت اہم نتیجہ اخذ کیا۔ فوجیوں کی اموات کا زیادہ سبب انھوں نے ان کے زخم سے زیادہ ٹائیفائڈ، کالرا جیسی بیماریوں کو مانا۔ اس کی وجہ اطراف کے ماحول کی گندگی، پینے کے آلودہ پانی، مریضوں کا بھیڑ بھاڑ میں رہنا تھا۔ یہ وجوہات فوراً دھیان میں آجائیں اس لیے فلورینس نے پائے چارٹ بنایا۔ مناسب علاج اور صفائی کے اُصول کو اپنا کر اس نے فوجیوں کی اموات کی شرح کو بہت کم کیا۔ شہروں کو صحت مند رکھنے کے لیے، ٹھیک طور پر فضلات کی نکاسی کرنے والے ڈرینیج اور پینے کے لیے صاف پانی ضروری ہے۔ اسے نگر پالیکاؤں نے منظور کیا ہے۔ کئی نگرانیوں اور مشاہدوں کے ذریعے کیے گئے بہترین اندراجات، شماریات کی مدد سے بھروسہ مند نتیجہ اخذ کرنے میں مدد دیتا ہے۔ یہ سب اس خاتون کے کاموں سے سمجھ میں آتا ہے۔

آیئے، سمجھ لیں۔

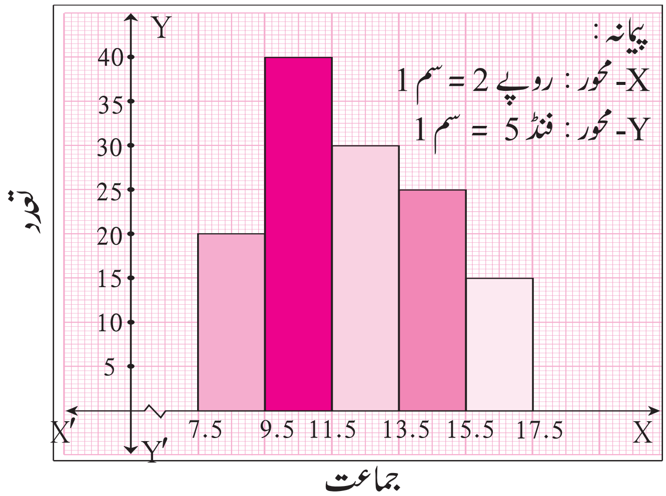
مستطیلی ترسیم (Histogram): مستطیلی ترسیم اور اسے بنانے کا طریقہ ہم ایک مثال سے سمجھیں گے۔

مثال : ذیل کی جدول میں مختلف کمپنیوں کے میچول فنڈ کی ایک یونٹ کی نقد جائیداد کی قیمت (Net asset value) دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے مستطیلی ترسیم بنایئے۔

نقد جائیداد کی قیمت (روپے)(NAV)	8-9	10-11	12-13	14-15	16-17
میچول فنڈ کی تعداد	20	40	30	25	15

حل : اوپر دی ہوئی جدول میں جماعتیں مسلسل نہیں ہیں۔ان کی سب سے پہلے مسلسل جماعتیں بنائیں گے۔

مسلسل کی ہوئی جماعت	7.5 - 9.5	9.5 - 11.5	11.5 - 13.5	13.5 - 15.5	15.5 - 17.5
تعدد	20	40	30	25	15



شکل 6.1

مستطیلی ترسیم بنانے کا عملی کام

(1) جماعت مسلسل نہ ہو تو جماعتوں کو مسلسل بنایئے۔ ایسی جماعتوں کو توسیع شدہ وقفہ جماعت (extended class intervals) کہتے ہیں۔

(2) توسیع جماعتوں کو X - محور پر مناسب پیمانہ لے کر دکھایئے۔

(3) Y - محور پر مناسب پیمانہ لے کر تعدد کو دکھایئے۔

(4) X - محور پر ہر توسیع جماعت کا قاعدہ لے کر اس پر مستطیل بنایئے۔ مستطیل کی اونچائی نظیری تعدد کے مطابق لیجیے۔

دھیان دیجیے۔

X - محور پر مبدا اور پہلی جماعت کے درمیان ’ ‘ ، ایسا نشان ہے۔(اس نشان کو محور کا سکڑنا krink mark کہتے ہیں)اس کا مطلب ہے مبدا سے پہلی جماعت تک کوئی بھی مشاہدہ نہیں ہوا۔اس لیے X - محور کو تہہ کاری کے جیسا نشان ہے۔ضرورت پڑنے پر Y - محور پر بھی یہ نشان استعمال کر سکتے ہیں۔اس کی وجہ سے مناسب شکل کی ترسیم بنائی جاسکتی ہے۔

مشقی سیٹ 6.4

1. ذیل کی معطیات کو مستطیلی ترسیم کے ذریعے دِکھایئے۔

طلبہ کی اونچائی (سینٹی میٹر)	135-140	140-145	145-150	150-155
طلبہ کی تعداد	4	12	16	8

2. ذیل کی جدول میں جوار کی فی ایکڑ پیداوار دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے مستطیلی ترسیم بنایئے۔

فی ایکڑ پیداوار (کوئنٹل)	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11
کسانوں کی تعداد	30	50	55	40	20

3. ذیل کی جدول میں 210 خاندانوں کی سالانہ سرمایہ کاری دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے مستطیلی ترسیم بنایئے۔

سرمایہ کاری (ہزار روپے)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
خاندانوں کی تعداد	30	50	60	55	15

4. ذیل کی جدول میں طلبہ کا امتحان کی تیاری کے لیے دیا ہوا وقت دِکھایا گیا ہے۔اس کی مدد سے مستطیلی ترسیم بنایئے۔

وقت (منٹ)	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160
طلبہ کی تعداد	14	20	24	22	16

آیئے، سمجھ لیں۔

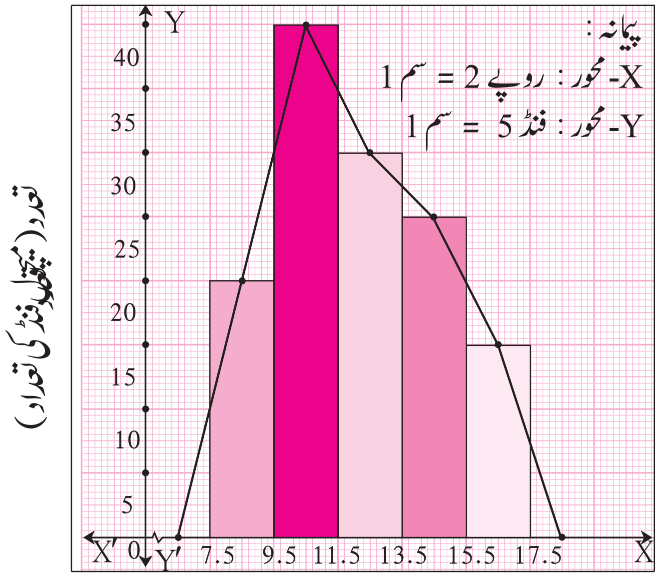
تعددی کثیر ضلعی (Frequency polygon)

تعددی جدول میں معلومات (معطیات) مختلف طرح سے دِکھائی جاتی ہے۔ہم مستطیلی ترسیم کا مطالعہ کر چکے ہیں۔دوسری قسم ’تعددی کثیر ضلعی‘ ہے۔

تعددی کثیر ضلعی بنانے کے لیے دو طریقوں کا مطالعہ کریں گے۔

(1) مستطیلی ترسیم کی مدد سے (2) مستطیلی ترسیم استعمال کیے بغیر

(1) مستطیلی ترسیم کی مدد سے تعددی کثیر ضلعی بنانے کا طریقہ سمجھنے کے لیے ہم شکل 6.1 میں دِکھائے ہوئے طریقے سے مستطیلی ترسیم کا ہی استعمال کریں گے۔



جماعت (نقد سرمایہ قیمت)

شکل 6.2

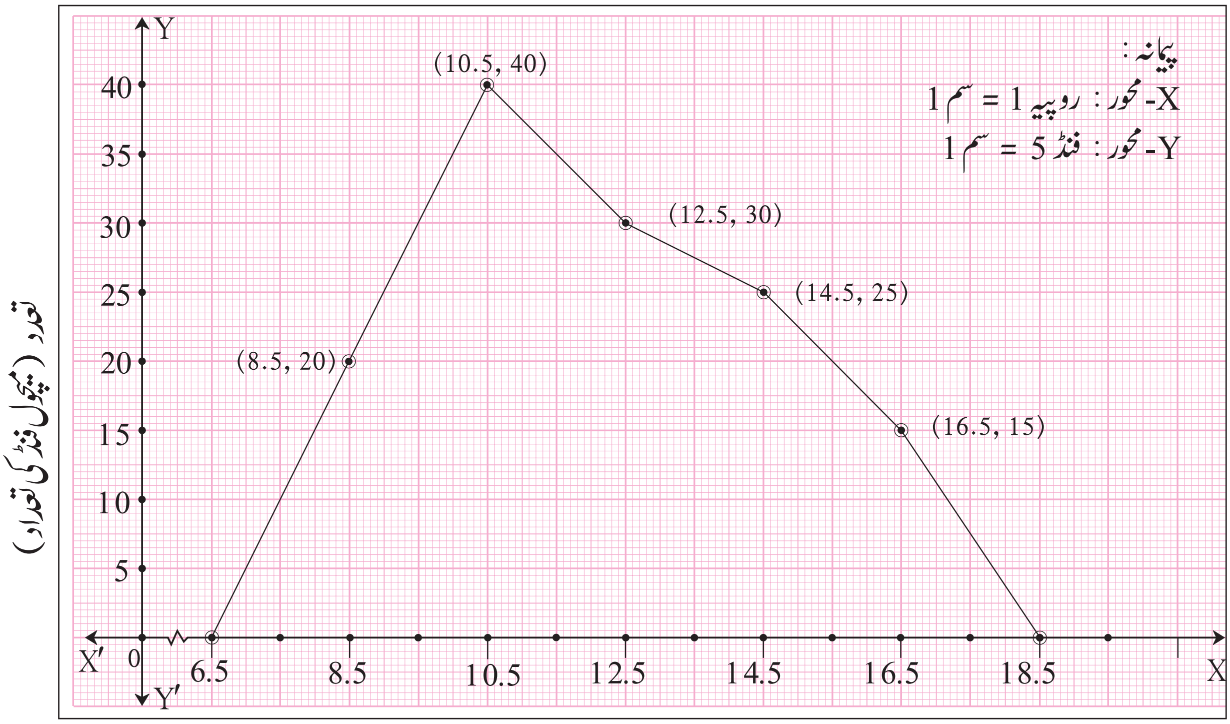
1. مستطیلی ترسیم میں ہر مستطیل کے اوپری حصے کا وسطی نقطہ لیجیے۔
2. پہلے مستطیل سے قبل صفر اونچائی کا مستطیل ہے۔ ایسا فرض کرکے اس کا وسطی نقطہ لیجیے۔ اسی طرح آخری مستطیل کے بعد ایک صفر اونچائی کا مستطیل فرض کرکے اس کا بھی وسطی نقطہ لیجیے۔ یہ نقاط X - محور پر ہی ہیں۔
3. تمام وسطی نقاط کو ترتیب سے مستقیم خط سے جوڑیے۔

اس طرح بننے والی بند شکل یعنی تعددی کثیر ضلعی ہے۔

(2) بغیر مستطیلی ترسیم بنائے، تعددی کثیر ضلعی بنانے کے لیے نقاط کے محددین کس طرح طے کرتے ہیں، اسے ذیل کی جدول سے سمجھ لیں۔ یہاں نقاط کے محددین ; (تعدد , وسط جماعت) کے مطابق لکھے گئے ہیں۔

جماعت	مسلسل جماعتیں	وسط جماعت	تعدد	نقاط کے محددین
6 - 7	5.5 - 7.5	6.5	0	(6.5, 0)
8 - 9	7.5 - 9.5	8.5	20	(8.5, 20)
10 - 11	9.5 - 11.5	10.5	40	(10.5, 40)
12 - 13	11.5 - 13.5	12.5	30	(12.5, 30)
14 - 15	13.5 - 15.5	14.5	25	(14.5, 25)
16 - 17	15.5 - 17.5	16.5	15	(16.5, 15)
18 - 19	17.5 - 19.5	18.5	0	(18.5, 0)

جدول میں پانچویں ستون میں دیے ہوئے محددین سے نظیری نقاط ترسیمی کاغذ پر مرتسم کرتے ہیں۔ انھیں ترتیب سے جوڑیں تو تعددی کثیر ضلعی حاصل ہوتا ہے۔ یہ کثیر ضلعی شکل 6.3 میں دِکھائی گئی ہے۔ اس کا مشاہدہ کیجیے۔



جماعت (نقد سرمایہ کاری)

شکل 6.3

حل کردہ مثالیں

مثال (1) متصلہ شکل میں دِکھائے ہوئے تعددی کثیر ضلعی کی مدد سے ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔

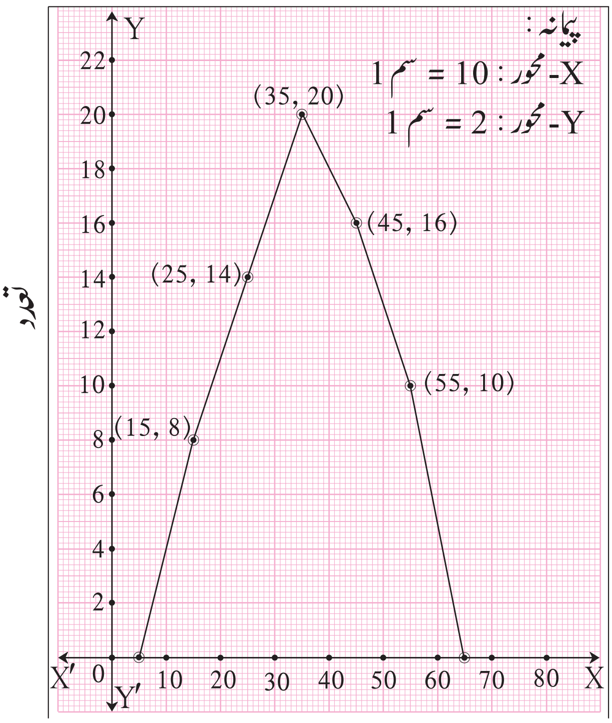
(1) جماعت 50-60 کا تعدد لکھیے۔

(2) جس جماعت کا تعدد 14 ہے، اس جماعت کو لکھیے۔

(3) وسط جماعت 55 والی جماعت لکھیے۔

(4) سب سے زیادہ تعدد والی جماعت لکھیے۔

(5) صفر تعدد والی جماعتوں کو لکھیے۔



جماعت

شکل 6.4

حل :

(1) وسط جماعت X- محور پر دِکھایا گیا ہے۔ جماعت 60-50 کا وسط جماعت 55 ہے۔ترسیم میں 55 کے نشان سے Y - محور پر عمود کھینچیں تو وہ 10 عدد کو ظاہر کرتا ہے۔لہٰذا جماعت 60-50 کا تعدد 10 ہے۔

(2) Y- محور پر تعدد دِکھایا گیا ہے۔Y - محور پر 14 کے عدد کا نشان دیکھیے۔اس نقطہ سے X - محور پر عمود کھینچیں تو وہ جماعت 30-20 کے وسط جماعت پر X - محور سے ملتا ہے۔اس لیے 14 تعدد والی جماعت 30-20 ہے۔

(3) جماعت 60-50 کا وسط جماعت 55 ہے۔

(4) Y- محور پر تعدد دِکھایا گیا ہے۔تعددی کثیر ضلعی کی سب سے بڑی قیمت 20 ہے۔اس سے متعلقہ x محدد 35 ہے جو جماعت 40-30 کا وسط جماعت ہے۔لہٰذا جماعت 40-30 کا تعدد سب سے زیادہ ہے۔

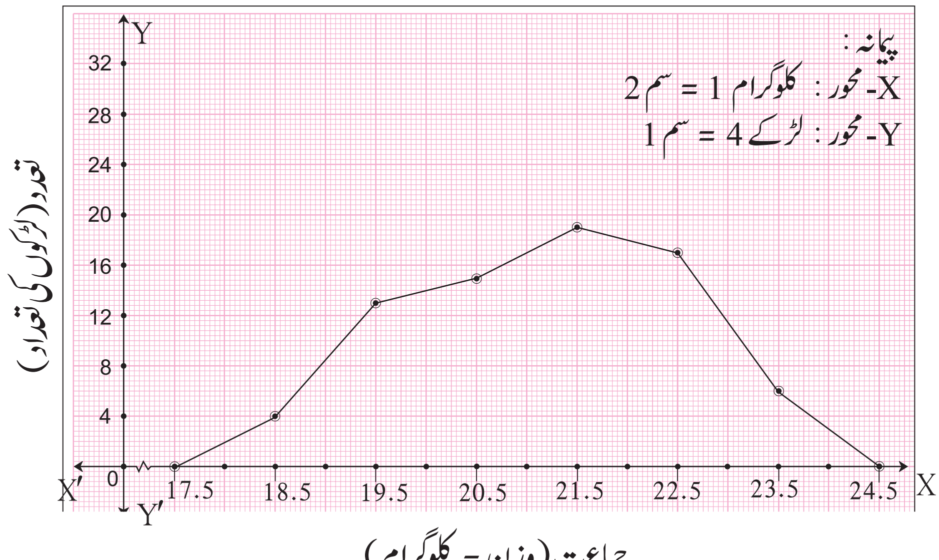
(5) صفر تعدد والی جماعتیں 10-0 اور 70-60 ہیں۔

مثال (2) ذیل کی جدول میں لڑکوں کا وزن اور اس کی تعداد دی ہوئی ہے۔اس معطیات کی مدد سے تعددی کثیر ضلعی بنائیے۔

لڑکوں کا وزن (کلوگرام)	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
لڑکوں کی تعداد	4	13	15	19	17	6

تعددی کثیر ضلعی بنانے کے لیے ضروری نقاط کے ساتھ ذیل کی جدول بنا کر تعددی کثیر ضلعی بنائیں گے۔

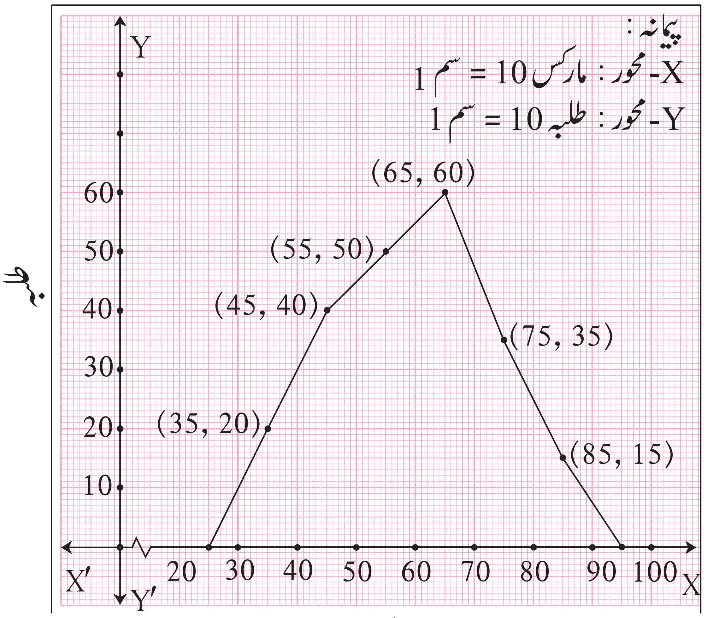
جماعت	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
وسط جماعت	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5
تعدد	4	13	15	19	17	6
نقاط کے محددین	(18.5, 4)	(19.5, 13)	(20.5, 15)	(21.5, 19)	(22.5, 17)	(23.5, 6)



شکل 6.5

مشقی سیٹ 6.5

.1 اوپر دی ہوئی تعددی کثیر ضلعی کا مشاہدہ کرکے ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔



شکل 6.6

(i) زیادہ سے زیادہ طلبہ کس جماعت میں ہیں؟

(ii) صفر تعدد والی جماعت لکھیے۔

(iii) 50 طلبہ کی تعداد والی جماعت کا وسط جماعت کتنا ہے؟

(iv) وسط جماعت 85 والی جماعت کی نچلی اور اوپری حد لکھیے۔

(v) 80-90 مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

.2 ذیل کی معطیات کے لیے تعددی کثیر ضلعی بنائیے۔

بجلی بل (روپے)	0-200	200-400	400-600	600-800	800-1000
خاندان	240	300	450	350	160

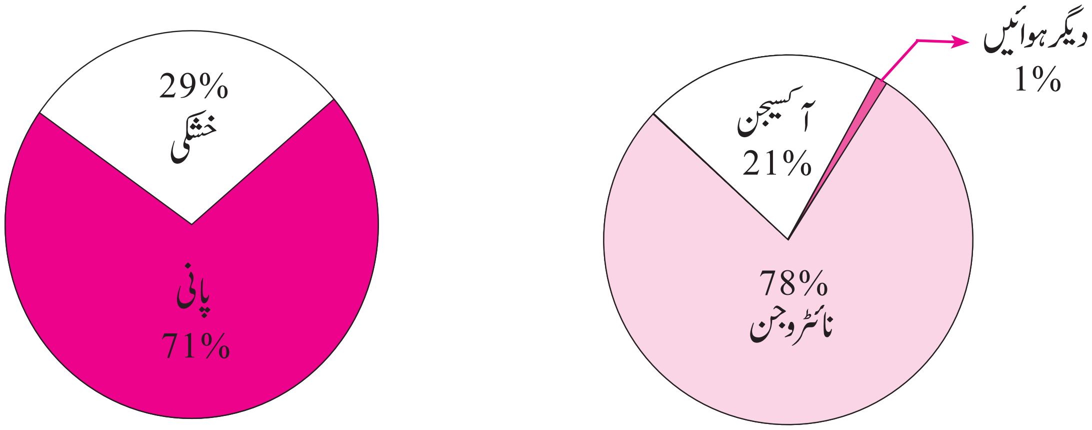
.3 ایک امتحان کے نتیجے سے متعلق معطیات ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہے۔اس معطیات کے لیے تعددی کثیر ضلعی بنائیے۔

نتیجہ (فی صد)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
طلبہ کی تعداد	7	33	45	65	47	18	5

آئیے، ذرا یاد کریں۔

دائروی ترسیم (Pie diagram)

گزشتہ جماعت میں ہم نے جغرافیہ اور سائنس مضامین میں ذیل کی ترسیم دیکھی ہے۔ایسی ترسیمات کو دائروی ترسیم یا پائے ڈائیگرام کہتے ہیں۔



ہوا میں مختلف گیسوں کا تناسب   زمین پر خشکی اور پانی کا تناسب

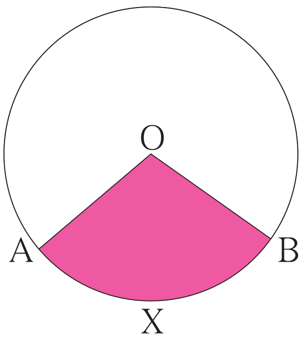
شکل 6.7

دائروی ترسیم میں شماریاتی معطیات مکمل دائرے میں دِکھائے جاتے ہیں۔ معطیات میں مختلف اجزا تناسب میں دائروی تراشوں کے ذریعے دِکھائے جاتے ہیں۔

شکل 6.8 میں دائرے کا مرکز O ہے۔ OA اور OB دائرے کے نصف قطر ہیں۔

$\angle AOB$ مرکزی زاویہ ہے۔

O − AXB یہ خط کشیدہ علاقہ، دائرہ کا تراشہ (sector of a circle) ہے۔



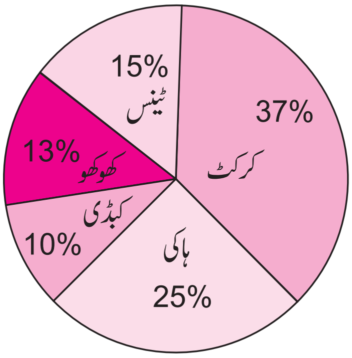
شکل 6.8

آئیے، سمجھ لیں۔

دائروی ترسیم پڑھنا (Reading of Pie diagram)

دائروی ترسیم کی مدد سے بیک نظر معلومات کس طرح حاصل ہوتی ہے، یہ ذیل کی مثال کی مدد سے سمجھ لیجیے۔

دسویں جماعت میں 120 لڑکوں کو 'تمھارا پسندیدہ کھیل کون سا ہے؟' سوال پوچھا گیا۔ حاصل ہونے والی معلومات کو دائروی ترسیم سے دِکھایا گیا۔ کون سا کھیل سب سے زیادہ پسندیدہ ہے؟ کتنے فی صد لڑکے کھوکھو پسند کرتے ہیں؟ کبڈی پسند کرنے والوں کا کتنا فی صد ہے؟ ایسے سوالوں کے جواب ہمیں ایک نظر میں دائروی ترسیم سے مل جاتے ہیں۔

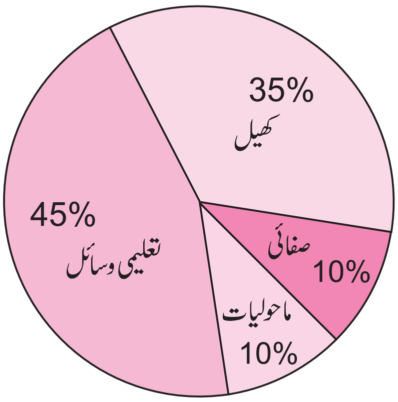


شکل 6.9

مزید ایک دائروی ترسیم دیکھیے۔

متصلہ شکل میں دائروی ترسیم، ایک اسکول کے سالانہ مالیاتی کو ظاہر کرتی ہے۔ اس دائروی ترسیم سے ہمیں یہ سمجھ میں آتا ہے کہ ،

- 45% رقم تعلیمی وسائل کے لیے محفوظ کی گئی ہے۔
- 35% رقم کھیل کے سامان ولوازمات کے لیے دی گئی ہے۔
- 10% رقم صاف صفائی کے سامان کے لیے رکھی گئی ہے۔
- 10% رقم ماحولیات کے تحفظ کے لیے رکھی گئی ہے۔



شکل 6.10

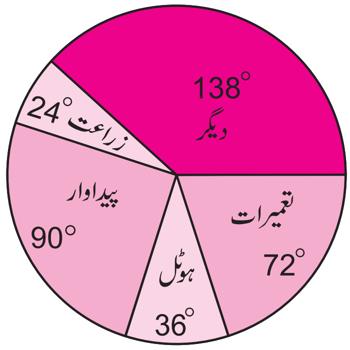
اب ہم دائروی ترسیم کی مزید معلومات حاصل کریں گے۔

بسا اوقات مختلف قسم کی مختلف معلومات دائروی ترسیم کے ذریعے دی ہوئی ہوتی ہے، اسے ہم اخبارات میں دیکھتے ہیں، جیسے سالانہ بجٹ، اولمپک مقابلوں میں مختلف ممالک کی کارکردگی، ملک میں روپیہ کیسے آتا ہے؟ اور کیسے جاتا ہے؟ وغیرہ۔

اس کے لیے ہم معلومات کس طرح تلاش کریں، یہ مثالوں کے ذریعے سمجھیں گے۔

تشریحی مثالیں

ایک سروے میں حاصل کردہ ہنرمند افراد کی جماعت بندی ذیل کے دائروی ترسیم میں دِکھائی گئی ہے۔ اگر پیداواری شعبے میں کام کرنے والے افراد 4500 ہوں تو ذیل کے سوالوں کے جواب دیجیے۔



شکل 6.11

(i) تمام شعبوں میں کل ہنرمند افراد کتنے ہیں؟

(ii) تعمیراتی شعبے میں ہنرمند افراد کی تعداد کتنی ہے؟

(iii) زراعت کے شعبے میں ہنرمند افراد کتنے ہیں؟

(iv) پیداواری اور تعمیراتی شعبے میں ہنرمند افراد کی تعداد کے درمیان کتنا فرق ہے؟

حل : (i) فرض کیجیے، تمام شعبوں میں ہنرمند افراد کی کل تعداد x ہے۔

$\therefore$ x افراد کے لیے مرکزی زاویہ $= 360^\circ$

پیداواری شعبے میں ہنرمند افراد کے لیے مرکزی زاویہ $= \dfrac{\text{پیداواری شعبے میں ہنرمند افراد}}{\text{کل ہنرمند افراد}} \times 360$

$$90 = \frac{4500}{x} \times 360$$

$\therefore$ $x = 18000$

$\therefore$ تمام شعبوں میں ہنرمند افراد کی کل تعداد $= 18000$

(ii) تعمیراتی شعبے کے لیے مرکزی زاویہ 72° دیا ہوا ہے۔

$$72 = \frac{\text{تعمیراتی شعبے میں ہنرمند افراد}}{18000} \times 360$$

تعمیراتی شعبے کے ہنرمند افراد $= \dfrac{72 \times 18000}{360} = 3600$

(iii) زراعت کے شعبے کے لیے مرکزی زاویہ 24° ہے۔

$\therefore$ $24 = \dfrac{\text{زراعت کے شعبے میں ہنرمند افراد}}{18000} \times 360$

$\therefore$ زراعت کے شعبے میں ہنرمند افراد $= \dfrac{24 \times 18000}{360}$

$\therefore$ زراعت کے شعبے کے ہنرمند افراد $= \dfrac{24 \times 18000}{360} = 1200$

(iv) پیداواری اورتعمیراتی شعبہ کے لیے مرکزی زاویوں میں فرق $= 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$

$\therefore$ مرکزی زاویوں میں فرق $= \dfrac{\text{دونوں شعبوں میں افراد کی تعداد کا فرق}}{\text{کل ہنرمند افراد}} \times 360$

$18 = \dfrac{\text{دونوں شعبوں میں افراد کی تعداد کا فرق}}{18000} \times 360$

$\therefore$ پیداواری اورتعمیراتی شعبوں میں ہنرمند افراد کی تعداد میں فرق $= \dfrac{18 \times 18000}{360}$

$= 900$

اسے ذہن میں رکھیں۔

- معطیات میں موجود ہر مَد کوایک تراشے کے ذریعے دِکھایا جاتا ہے۔
- تراشے کے مرکزی زاویے کی پیمائش، اس مخصوص مَد کے تناسب میں ہوتی ہے۔
- مرکزی زاویے کی پیمائش $(\theta) = \dfrac{\text{منسلک مد میں موجود تعداد}}{\text{تمام مدوں میں موجود کل تعداد}} \times 360$
- مناسب نصف قطر کا دائرہ بنا کر مدوں کی تعداد کے مطابق مرکزی زاویے معلوم کرتے ہیں اور مرکزی زاویوں کے مطابق دائرے کو تراشوں میں تقسیم کرنا چاہیے۔

آ یئے، سمجھ لیں۔

دائروی ترسیم بنانا (To draw Pie diagram)

1. دائروی ترسیم بناتے وقت پورے دائرے کی تقسیم تناسب کے مطابق تراشوں میں کرتے ہیں۔
2. ہر مَد سے متعلق تراشے کے مرکزی زاویے کی پیمائش ذیل کے ضابطے سے معلوم کرتے ہیں۔

تراشے کے مرکزی زاویے کی پیمائش $(\theta) = \dfrac{\text{اُس مَد میں تعداد}}{\text{تمام مدوں میں موجود کل تعداد}} \times 360$

مناسب نصف قطر کا دائرہ کھینچ کر، معطیات میں مَدوں کی جتنی تعداد ہے اتنے ہی تراشوں میں دائرے کو تقسیم کرتے ہیں۔

دائروی ترسیم بنانے کا عمل ذیل کی مثال سے سمجھ لیجیے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) دو پہیہ سواریوں کی ایک دکان میں دو پہیہ سواریوں کی خریدی کے لیے رنگوں کی پسند ذیل کے مطابق تھی۔ اس معلومات سے دائروی ترسیم دِکھانے کے لیے ہر مَد کے تراشے کے مرکزی زاویے کی پیمائش طے کیجیے۔

حل: دو پہیہ سواریوں کی کل مانگ 36 ہے۔ ان میں سے 10 دو پہیہ سواریاں سفید ہیں۔

$\therefore$ سفید دو پہیہ سواریوں کو دِکھانے والے تراشے کے مرکزی زاویے کی پیمائش

$= \dfrac{\text{سفید دو پہیہ سواریوں کی تعداد}}{\text{دو پہیہ سواریوں کی کل تعداد}} \times 360$

$= \frac{10}{36} \times 360 = 100$

رنگ	دو پہیہ سواریوں کا رنگ	تراشے کا مرکزی زاویہ
سفید	10	$\frac{10}{36} \times 360 = 100^\circ$
سیاہ	9	$\frac{9}{36} \times 360 = 90^\circ$
نیلا	6	60°
سرمئی	7	70°
سرخ	4	40°
کل	36	360°

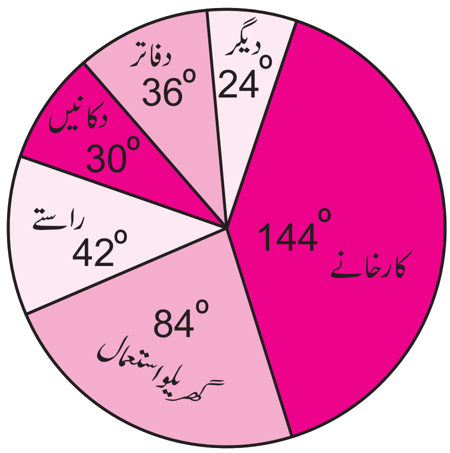
اس طرح دیگر رنگوں کی دو پہیہ سواریوں کے لیے نظیری تراشوں کے مرکزی زاویوں کی پیمائش معلوم کرکے جدول میں دِکھائی گئی ہے۔

مثال (2) ایک گاؤں میں مختلف مقامات پر روزانہ ہونے والی بجلی کی بہم رسانی ذیل کی جدول میں دِکھائی گئی ہے۔ اس معلومات کا دائروی ترسیم بنائیے۔

مقامات	کارخانے	گھریلو استعمال	راستے	دکانیں	دفاتر	دیگر
بجلی کی بہم رسانی (ہزار یونٹ)	24	14	7	5	6	4

حل: کل بجلی کی بہم رسانی 60 ہزار یونٹ ہے۔ اس کی مدد سے مرکزی زاویوں کی پیمائش معلوم کرکے جدول میں دِکھائیں گے۔

بجلی کی بہم رسانی	یونٹ	مرکزی زاویوں کی پیمائش
کارخانے	24	$\frac{24}{60} \times 360 = 144^\circ$
گھریلو استعمال	14	$\frac{14}{60} \times 360 = 84^\circ$
راستے	7	$\frac{7}{60} \times 360 = 42^\circ$
دکانیں	5	$\frac{5}{60} \times 360 = 30^\circ$
دفاتر	6	$\frac{6}{60} \times 360 = 36^\circ$
دیگر	4	$\frac{4}{60} \times 360 = 24^\circ$
کل	60	360°



شکل 6.12

دائروی ترسیم بنانے کے مراحل :

(1) پہلی شکل میں دِکھائے ہوئے کے مطابق دائرہ بنا کر ایک نصف قطر بنایا۔ بعد میں جدول میں معلوم کیے ہوئے مرکزی زاویوں کی پیائشوں کے تراشے ایک کے بعد ایک $(\overrightarrow{144^\circ, 84^\circ, 42^\circ, 30^\circ, 36^\circ, 24^\circ})$ اس طرح گھڑی کی سوئی کے غیر ساعت دار سمت میں بنایا۔ (تراشوں کو ایک ہی سمت میں ایک کے بعد ایک بناتے وقت اگر اُن کی ترتیب تبدیل بھی ہوجائے گی تو کوئی ہرج نہیں۔)

(2) ہر تراشے میں متعلق مد کا اندراج کریں۔

عملی کام :

ایک خاندان کے مختلف مدوں پر ہونے والا ماہانہ خرچ ذیل میں دیا ہوا ہے۔ اس کی مدد سے مرکزی زاویوں کی پیائش معلوم کر کے دائروی ترسیم بنائیے۔

مرکزی زاویوں کی پیائش	فی صدی اخراجات	مختلف مدیں
$\frac{40}{100} \times 360 = \square$	40	اناج
$\square \times \square = \square$	20	کپڑے
$\square \times \square = \square$	15	گھر کا کرایہ
$\square \times \square = \square$	20	تعلیم
$\square \times \square = \square$	05	دیگر اخراجات
360°	100	کل

مشقی سیٹ 6.6

1. ذیل کی جدول میں خون کا عطیہ کے ایک کیمپ میں مختلف عمروں کی جماعت میں سے 200 افراد نے خون کا عطیہ دیا۔ اس کی مدد سے دائروی ترسیم بنائیے۔

35-40	30-35	25-30	20-25	عمروں کی جماعت (سال)
25	35	60	80	افراد کی تعداد

2. ذیل کی جدول میں ایک طالب علم نے مختلف مضامین میں 100 میں سے حاصل کردہ مارکس دیے ہوئے ہیں۔ اس معلومات کو دائروی ترسیم کے ذریعے دِکھائیے۔

ہندی	سماجی علوم	ریاضی	سائنس	اُردو	انگریزی	مضمون
50	60	90	80	70	50	مارکس

.3 شجرکاری مہم کے تحت ایک اسکول میں مختلف جماعتوں کے طلبہ کے ذریعے لگائے گئے درختوں کی تعداد ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہے۔ یہ معلومات دائروی ترسیم کے ذریعے دِکھائیے۔

جماعت	پانچویں	چھٹی	ساتویں	آٹھویں	نویں	دسویں
درختوں کی تعداد	40	50	75	50	70	75

.4 ایک پھل فروش کے پاس مختلف پھلوں کی مانگ فی صدی میں ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہے۔اس معلومات کی دائروی ترسیم بنائیے۔

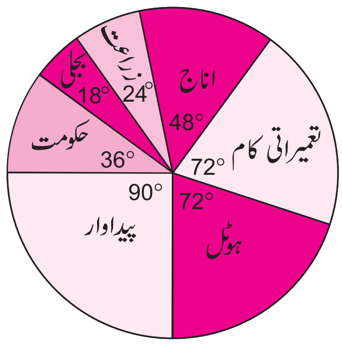
پھل	آم	موسمبی	سیب	چیکو	سنترے
مانگ کا فی صد	30	15	25	20	10

.5 ایک گاؤں کے مختلف پیشہ وروں کا تناسب ظاہر کرنے والا دائروی ترسیم 6.13 میں دیا ہوا ہے۔اس کی مدد سے درج ذیل سوالوں کے جواب لکھیے۔

(1) کل پیشہ وروں کی تعداد 10000 ہو تو تعمیراتی شعبے میں کتنے افراد ہیں؟

(2) سرکاری شعبہ میں کتنے افراد کام کرتے ہیں؟

(3) پیداواری شعبہ میں کتنے فی صد افراد ہیں؟



شکل 6.13

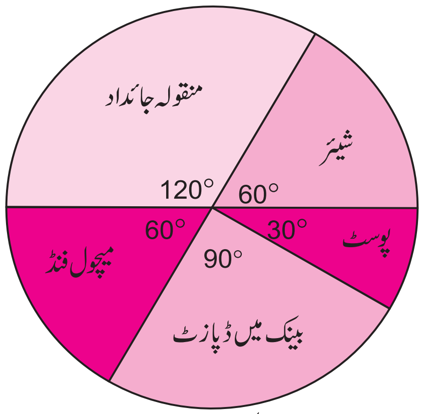
.6 ایک خاندان کی سالانہ سرمایہ کاری کی دائروی ترسیم متصلہ شکل میں دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے ذیل کے سوالوں کے جواب دیجیے۔

(1) شیئرز میں سرمایہ کاری کی ہوئی رقم 2000 روپے ہو تو کل سرمایہ کاری کتنی ہے؟

(2) بینک میں امانت کی ہوئی رقم کتنی ہے؟

(3) میچول فنڈ کی بہ نسبت منقولہ جائداد میں کتنی رقم زائد سرمایہ کاری کی گئی ہے؟

(4) پوسٹ میں سرمایہ کاری کتنی ہے؟



شکل 6.14

مجموعۂ سوالات 6

.1 ذیل میں دیے ہوئے سوالوں کے کثیر متبادل جواب دیے ہوئے ہیں۔اُن میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(1) مختلف خون کے گروپ کے افراد کا خون کے گروپ کے مطابق جماعت بندی کر کے دائروی ترسیم میں دِکھانا ہے۔ O - خون کے گروپ والے افراد %40 ہوں تو O - خون کے گروپ والے افراد کے لیے دائروی ترسیم میں مرکزی زاویہ کتنا لیں گے؟

(A) 114° (B) 140° (C) 104° (D) 144°

(2) ایک عمارت کے تعمیراتی کام کے مختلف اخراجات دائروی ترسیم کے ذریعے دِکھائے جائیں تو سیمنٹ کا خرچ 75° کے مرکزی زاویے سے دِکھایا گیا ہے۔ سیمنٹ کا خرچ 45,000 روپے ہو تو عمارت کی تعمیر کا کل خرچ کتنے روپے ہیں؟

(A) 2,16,000 (B) 3,60,000 (C) 4,50,000 (D) 7,50,000

(3) جماعت بند تعددی جدول میں اجتماعی تعدد کا استعمال .... معلوم کرنے کے لیے ہوتا ہے۔

(A) میانیہ (B) وسطانیہ (C) کثیریہ (D) ان میں سے سب

(4) جماعت بند تعددی جدول میں معطیات کا میانیہ معلوم کرنے کے لیے ذیل کے ضابطے میں،

$$\overline{X} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times g$$

$$u_i = ...$$

(A) $\frac{x_i + A}{g}$ (B) $(x_i - A)$ (C) $\frac{x_i - A}{g}$ (D) $\frac{A - x_i}{g}$

(5)

فی لٹر طے کردہ فاصلہ (کلومیٹر)	12-14	14-16	16-18	18-20
کار کی تعداد	11	12	20	7

اوپر دی ہوئی معطیات کے لیے کار کا فی لٹر طے کردہ فاصلے کا وسطانیہ .... جماعت میں ہے۔

(A) 12-14 (B) 14-16 (C) 16-18 (D) 18-20

(6)

ہر طالب علم کے ذریعے لگائے گئے درخت	1-3	4-6	7-9	10-12
طلبہ کی تعداد	7	8	6	4

اوپر کی تعددی جدول میں معطیات کے لیے تعددی کثیر ضلعی بنائیے۔ جماعت 4-6 میں طلبہ کو دِکھانے کے لیے نقطہ کے محددین ....

(A) (4, 8) 0 (B) (3, 5) (C) (5, 8) (D) (8, 4)

2. ایک مرتبہ انگور کے موسم میں باغبانوں کو حاصل ہونے والی پیداوار کی جماعت بند تعددی جدول ذیل میں دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے پیداوار کا میانیہ معلوم کیجیے۔

پیداوار (ہزار روپے)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
باغبان	10	11	15	16	18	14

3. ذیل کی جماعت بند تعددی جدول میں کھیتی کے تالاب کے لیے ایک بینک کے ذریعے دیے گئے قرض ہیں تو بینک سے دی ہوئی رقم کا میانیہ معلوم کیجیے۔

قرض (ہزار روپے)	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
کھیتی کے تالاب کی تعداد	13	20	24	36	7

.4 ذیل میں ایک کارخانے کے 120 مزدوروں کے ایک ہفتے کی مزدوری جماعت بند تعددی تقسیمی جدول میں دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے مزدوروں کے ایک ہفتے کی مزدوری کا میانیہ معلوم کیجیے۔

ہفتہ واری مزدوری (روپے)	0-2000	2000-4000	4000-6000	6000-8000
مزدوروں کی تعداد	15	35	50	20

.5 ذیل کی جماعت بند تعددی جدول میں 50 سیلاب زدہ خاندانوں کو دی گئی امداد کی رقم دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے رقم کا میانیہ معلوم کیجیے۔

امداد کی رقم (ہزار روپے)	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
خاندانوں کی تعداد	7	13	20	6	4

.6 ذیل کی جماعت بند تعددی جدول میں عوامی بس خدمت کی 250 بسوں کا ایک دن میں طے کردہ فاصلہ دیا ہوا ہے۔اس کی مدد سے ایک دن میں طے شدہ فاصلے کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

فاصلہ (کلومیٹر)	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
بسوں کی تعداد	40	60	80	50	20

.7 ایک جنرل اسٹور میں مختلف اشیا کی قیمت اور اُن اشیا کی مانگ کی جماعت بند تعددی جدول دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے قیمتوں کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

قیمت (روپے)	20 سے کم	20-40	40-60	60-80	80-100
اشیا کی تعداد	140	100	80	60	20

.8 ذیل کی جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول میں ایک مٹھائی کی دکان میں مختلف اوزان کی مٹھائی کی مانگ دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے وزن کی مانگ کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

مٹھائی کا وزن (گرام)	0-250	250-500	500-750	750-1000	1000-1250
گاہکوں کی تعداد	10	60	25	20	15

.9 ذیل کی تعددی جدول کے لیے مستطیلی ترسیم بنائیے۔

بجلی کا استعمال (یونٹ)	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170
خاندانوں کی تعداد	150	400	460	540	600	350

.10 ایک ہاتھ کرگھا کارخانے میں مزدوروں کو ساڑی بُننے کے لیے درکار دنوں اور مزدوروں کی تعداد کی جماعت بند تعددی جدول دی ہوئی ہے۔اس معطیات کے لیے تعددی کثیرضلعی بنائیے۔

دن	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
مزدوروں کی تعداد	5	16	30	40	35	14

.11 ایک جماعت کے طلبہ کو سائنس کا تجربہ کرنے کے لیے درکار وقت کی جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول دی ہوئی ہے۔اس معلومات کے لیے مستطیلی ترسیم بنا کر تعددی کثیرضلعی بنائیے۔

تجربہ کے لیے درکار وقت (منٹ)	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32
طلبہ کی تعداد	8	16	22	18	14	12

.12 ذیل کی جماعت بند تعددی جدول کے لیے تعددی کثیرضلعی بنائیے۔

خون کا عطیہ دینے والوں کی عمر (سال)	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
خون کا عطیہ دینے والوں کی تعداد	38	46	35	24	15	12

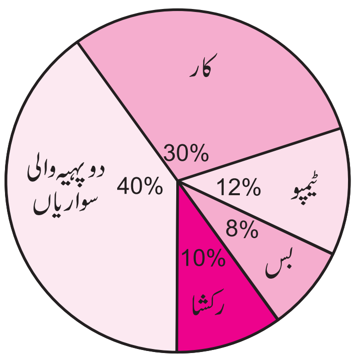
.13 ذیل کی جدول میں 150 گاؤں میں سالانہ بارش کے اوسط کا اندراج دیا ہوا ہے۔اس کے لیے تعددی کثیرضلعی بنائیے۔

بارش کا اندراج (سم)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
گاؤں کی تعداد	14	12	36	48	40

.14 صبح 8 بجے سے 10 بجے کے درمیان ایک شہر کے ایک چوک کے سگنل سے گزرنے والی مختلف سواریوں کا فی صد دائروی ترسیم میں دیا ہوا ہے۔

(1) ہر قسم کی سواریوں کے لیے مرکزی زاویہ کی پیائش معلوم کیجیے۔

(2) دو پہیہ والی سواریوں کی تعداد 1200 ہو تو کل سواریوں کی تعداد معلوم کیجیے۔



شکل 6.15

.15 ذیل کی جدول میں صوتی آلودگی پیدا کرنے والے ذرائع دیے ہوئے ہیں۔اس کے لیے دائروی ترسیم بنائیے۔

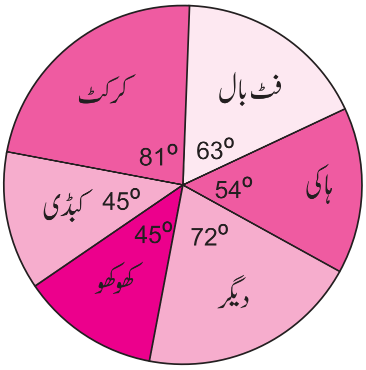
تعمیراتی کام	راہداری/رہگذر	ہوائی جہاز کی پرواز	صنعتی	ریلوے
10%	50%	9%	20%	11%

.16 ایک سروے میں اسکول کے طلبہ کی مختلف کھیلوں سے متعلق دلچسپی ذیل کے دائروی ترسیم میں دِکھائی گئی ہے۔طلبہ کی کل تعداد 1000 ہو تو،

(1) کرکٹ پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد کتنی؟

(2) فٹ بال کتنے طلبہ پسند کرتے ہیں؟

(3) دیگر کھیلوں کو پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد کتنی؟



شکل 6.16

.17 ایک گاؤں میں صحت کے مرکز (دواخانے) میں 180 خواتین کی طبّی جانچ ہوئی۔اُن میں سے 50 خواتین کا ہیموگلوبن کم تھا۔ 10 خواتین کو موتیابند کی تکلیف تھی۔ 25 خواتین کو سانس کی تکلیف تھی۔ باقی ماندہ خواتین صحت مند تھیں۔اس معلومات کو دِکھانے والا دائروی ترسیم بنائیے۔

.18 جنگل کی آبادکاری کے منصوبے میں ایک اسکول کے طلبہ نے 'یوم ِ ماحولیات' کے موقع پر 120 درخت لگائے۔اس کی معلومات ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہے۔اس معلومات کو دِکھانے والا دائروی ترسیم بنائیے۔

درختوں کے نام	بانس	دیودر	ارجُن	گل مہر	نیم
درختوں کی تعداد	20	28	24	22	26

□□□