3 حسابی تصاعد (Arithmetic Progression)

آ یئے، سیکھیں۔

- تواتر
- حسابی تصاعد میں n واں رکن
- حسابی تصاعد
- حسابی تصاعد میں پہلے n ارکان کی جمع

آ یئے، سمجھ لیں۔

تواتر (Sequence)

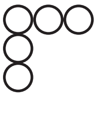
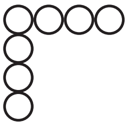
ہم $1, 2, 3, 4, \ldots$ اِن اعداد کو ترتیب سے لکھتے ہیں۔ یہ اعداد کی ایک ترتیب ہے۔ اس ترتیب میں کون سا عدد کس مقام پر ہے، یہ ہم بتا سکتے ہیں جیسے 13 عدد 13 ویں نمبر پر ہے۔ اعداد کی دوسری ترتیب $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots.$ دیکھیے۔ اس میں اعداد ایک خاص ترتیب سے لکھے ہوئے ہیں۔ یہاں عدد $16 = 4^2$ چوتھے نمبر پر، جبکہ عدد $25 = 5^2$ 5 ویں مقام پر ہے۔ عدد $49 = 7^2$ ساتویں مقام پر ہے یعنی اس ترتیب میں کون سا عدد کس مقام پر ہے، ہم بتا سکتے ہیں۔

طبعی اعداد کے مطابق خاص ترتیب میں لکھے ہوئے اعداد کے گروہ کو **تواتر** کہتے ہیں۔

تواتر میں خاص مقام پر ایک خاص طبعی عدد لکھا جاتا ہے۔ ان طبعی اعداد کو a_n ,........ , a_4 , a_3 , a_2 , a_1 اس ترتیب میں لکھتے ہیں تو سمجھ میں آتا ہے کہ a_1 پہلا، a_2 دوسرا،.... اس طرح a_n یہ n واں عدد ہے۔ اعداد کے تواتر کو $f_1, f_2, f_3, \ldots.$ جیسے حروف سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہاں ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ اس میں بھی ایک خاص ترتیب سے اعداد لکھے ہوئے ہیں۔

کسی جماعت میں بچے قواعد کے لیے میدان پر ایک قطار میں کھڑے ہوتے ہیں ان کی ترتیب طے ہوتی ہے۔ اس سے ان کا تواتر بنتا ہے۔ ہمیں تجربہ ہے کہ کچھ تواتر میں خاص ترتیبی سلسلہ ہوتا ہے۔

ذیل کے تواتر کو مکمل کیجیے۔

تواتر									
دائروں کی تعداد	1	3	5	7					

تواتر	ΔΔ Δ ΔΔ	ΔΔΔ Δ Δ ΔΔΔ	ΔΔΔΔ Δ Δ Δ ΔΔΔΔ				
مثلثوں کی تعداد	5	8	11				

اعداد کا اس طرح تیار ہونے والا تواتر دیکھیے ۔ پہلے والے عدد پر کون سا عمل کریں گے کہ اگلا (بعد والا) عدد حاصل ہوتا ہے؟ اس اصول کو معلوم کیجیے۔اس اُصول سے بعد کے تمام اعداد لکھ سکتے ہیں۔

آ گے دیے ہوئے اعداد کا سلسلہ دیکھیے۔ $2,\ 11,\ -6,\ 0,\ 5,\ -37,\ 8,\ 2,\ 61$ →

یہاں $a_1 = 2$ ، $a_2 = 11$ ، $a_3 = -6$ ، .... ان اعداد کی فہرست بھی تواتر ہے۔لیکن ایک خاص رکن اس مقام پر کیوں ہے، یہ بتا نہیں سکتے۔اسی طرح ان ترتیب وار ارکان میں کیا تعلق ہے، یہ صحیح طور پر بتا نہیں سکتے۔

عام طور پر جس ترتیب سے بعد میں آنے والا رکن بتا سکے، اس کا ایک اصول ہوتا ہے۔آ ئیے، اس ترتیب پر غور کریں۔

مثال: (i) $4, 8, 12, 16, \ldots$ → (ii) $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ (iii) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \ldots$

تواتر میں ارکان (Terms in sequence)

تواتر میں ترتیب وار ارکان $t_1,\ t_2,\ t_3, \ldots\ t_n, \ldots$ → اس طرح بھی ظاہر کرتے ہیں۔عام طور پر تواتر کو $\{t_n\}$ لکھتے ہیں۔

تواتر غیر مختتم ہو تو اس وقت یہ فرض کرلیا جاتا ہے کہ ہر مثبت صحیح عدد n ، سے منسلک ایک عدد ہوتا ہے۔

عملی کام I : درج ذیل تواتر دیکھیے۔اس میں ارکان کے نمبر t_1 ، t_2 ، t_3 ، . . . سے دِکھائیے۔

(1) $9,\ 15,\ 21,\ 27, \ldots$ → یہاں $t_1 = 9$ ، $t_2 = 15$ ، $t_3 = 21$ ، . . .

(2) $7,\ 7,\ 7,\ 7, \ldots$ → یہاں $t_1 = 7$ ، $t_2 = \square$ ، $t_3 = \square$ ، . . .

(3) $-2,\ -6,\ -10,\ -14, \ldots$ → یہاں $t_1 = -2$ ، $t_2 = \square$ ، $t_3 = \square$ ، . . .

عملی کام II : ذیل میں کچھ تواتر دیے ہوئے ہیں۔اُن کے ارکان میں اگر کوئی اُصول سمجھ میں آتا ہو تو وہ بتائیے۔دو تواتر میں یکسانیت تلاش کیجیے۔ان تواتر کے ارکان میں کچھ اُصول دِکھائی دیتا ہو تو اسے سمجھنے کے لیے ذیل میں دی ہوئی ترتیب کا مشاہدہ کیجیے اور اگلے صفحے پر دیے ہوئے خالی چوکون پُر کیجیے۔

(1) $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$ (2) $6, 12, 18, 24, \ldots$ (3) $3, 3, 3, 3, \ldots$

(4) $4, 16, 64, \ldots$ (5) $-1, -1.5, -2, -2.5, \ldots$ (6) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$

اس تواتر میں تعلق معلوم کیجیے۔اس پر غور و خوض کیجیے۔

(1) 1, 4, 7, 10, □, □, . . .

$1 (+3)$ $4 (+3)$ $7 (+3)$ $10 (+3)$ □

(2) 6, 12, 18, 24, □, □, . . .

$6 + 6$ $12 + 6$ $18 + 6$ □   □

(3) 3, 3, 3, 3, □, □ . . .

$3 + 0$ $3 + 0$ $3 + 0$ □   □

(4) 4, 16, 64, □, □, □, . . .

4×4 16×4 64×4 $□ \times 4$ $□ \times 4$

(5) −1, −1.5, −2, −2.5, □ . . .

$(-1)+(-0.5)$ $-1.5 +(-0.5)$ $-2 + (-0.5)$ $-2.5 + (-0.5)$

(6) 1^3, 2^3, 3^3, . . .

یہاں تواتر (1) ، (3) ، (5) میں پہلے والے رکن میں متعین عدد ملا کر بعد کا رکن ملتا ہے۔ یہ یکسانیت ہے۔اس قسم کے تواتر کو حسابی تصاعد کہتے ہیں۔

اوپر دیا ہوا (4) کا تواتر حسابی تصاعد نہیں ہے۔اس تواتر میں پہلے والے رکن کو ایک متعین عدد سے ضرب دے کر بعد والا رکن حاصل ہوتا ہے۔اس قسم کے تواتر کو ہندسی تصاعد (Geometric Progression) کہتے ہیں۔

اوپر دیا ہوا (6) تواتر حسابی تصاعد نہیں ہے اور نہ ہی ہندسی تصاعد ہے۔

اس جماعت میں ہم حسابی تصاعد کا مطالعہ کرنے والے ہیں۔

حسابی تصاعد (Arithmetic Progression)

ذیل میں کچھ تواتر دیے ہوئے ہیں۔ ہر تواتر کے آگے آنے والے تین ارکان لکھیے۔

(1) 100, 70, 40, 10, . . .   (2) −7, −4, −1, 2, . . .   (3) 4, 4, 4, . . .

ذیل میں دیے ہوئے تواتر میں بعد میں آنے والے ارکان معلوم کرنے کے لیے کون سا عمل کیا گیا ہے۔ اسے سمجھ لیجیے۔

پہلا رکن   دوسرا رکن   تیسرا رکن

(1) 100, 70, 40, 10, $\boxed{-20}$, $\boxed{-50}$, . . .

100+(−30)   70+(−30)   40+(−30)   10+(−30)   (−20)+(−30)

(2) −7, −4, −1, 2, $\boxed{5}$, $\boxed{8}$, . . .

−7+3   −4+3   −1+3   2+3   5+3

(3) 4, 4, 4, 4, 4, . . .

4 + 0   4 + 0   4 + 0   4 + 0

مذکورہ بالا اعداد کی ہر فہرست میں ہر رکن اُس سے پہلے والے رکن میں ایک متعین عدد ملانے سے حاصل ہوتا ہے۔ دو متواتر ارکان کے درمیان فرق مستقل ہے۔

مثال (1) میں فرق منفی ہے، (2) میں فرق مثبت ہے اور (3) میں فرق 0 ہے۔

دو متواتر ارکان میں فرق مستقل ہو تب اس کو مشترک فرق (common difference) کہتے ہیں۔ اس فرق کو 'd' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

دیے ہوئے تواتر میں کوئی بھی دو متواتر ارکان کے درمیان فرق $(t_{n+1} - t_n)$ مستقل ہو تب اس تواتر کو حسابی تصاعد کہتے ہیں۔

ایسے تواتر میں $t_{n+1} - t_n = d$ مشترک فرق ہوتا ہے۔

حسابی تصاعد کا پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہو، تب ،

$$t_1 = a, \quad t_2 = a + d, \quad t_3 = (a + d) + d = a + 2d$$

پہلا رکن a اور مشترک فرق d والا حسابی تصاعد ذیل میں دیا ہوا ہے۔

$$a, (a + d), (a + 2d), (a + 3d), \ . \ . \ .$$

حسابی تصاعد سے متعلق کچھ مثالیں دیکھتے ہیں۔

مثال (1) عارف ہر ماہ 100 روپے کی بچت کرتا ہے۔ ایک سال میں ہر ماہ کے آخر میں کل بچت ذیل کے مطابق ہے۔

مہینہ	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
بچت (₹)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

ماہانہ کل بچت دِکھانے والے اعداد حسابی تصاعد میں ہیں۔

مثال (2) پرکاش نے اپنے دوست سے 10000 روپے قرض لیے اور ہر ماہ 1000 روپے کے حساب سے قرض کی ادائیگی طے ہوئی تو ہر ماہ کتنی رقم ادا کرنا باقی رہ جائے گی، وہ ذیل کے مطابق ہے۔

مہینے کا نمبر شمار	1	2	3	4	5	...	...	...	...
ادائیگی کے لیے باقی رقم ₹	10,000	9,000	8,000	7,000	...	...	2,000	1,000	0

مثال (3) 5 کا پہاڑہ یعنی 5 سے تقسیم پذیر اعداد ذیل میں دیے ہوئے ہیں۔

$\rightarrow 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ .\ .\ .\ 50,\ 55,\ 60,\ .\ .\ .$ یہ حسابی تصاعد ہے۔

اوپر دی ہوئی مثال (1) اور مثال (2) محدود حسابی تصاعد ہے جبکہ مثال (3) لامحدود حسابی تصاعد ہے۔

اسے ذہن میں رکھیں۔

(1) اگر تواتر میں $(t_{n+1} - t_n)$ فرق مستقل ہو تب اس تواتر کو حسابی تصاعد کہتے ہیں۔

(2) حسابی تصاعد کے دو متواتر ارکان کے درمیان مستقل فرق کو d حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

(3) مشترک فرق 'd' مثبت، منفی یا صفر ہو سکتا ہے۔

(4) حسابی تصاعد میں پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہو تب اس حسابی تصاعد کے ارکان $a,\ (a+d),\ (a+2d),\ .\ .\ .$ ہوتے ہیں۔

عملی کام : محدود حسابی تصاعد اور لامحدود حسابی تصاعد کی ایک ایک مثال لکھیے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ذیل میں کون سا تواتر حسابی تصاعد ہے، پہچانیے۔ اگر ہو تو اس کے بعد کے دو ارکان معلوم کیجیے۔

(1) $5,\ 12,\ 19,\ 26,\ .\ .\ .$ (2) $2,\ -2,\ -6,\ -10,\ .\ .\ .$

(3) $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ .\ .\ .$ (4) $\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ .\ .\ .$

حل (1): $5,\ 12,\ 19,\ 26,\ .\ .\ .$ اِس تواتر میں،

پہلا رکن $= t_1 = 5,\quad t_2 = 12,\quad t_3 = 19,\ .\ .\ .$

$t_2 - t_1 = 12 - 5 = 7$

$t_3 - t_2 = 19 - 12 = 7$

یہاں، پہلا رکن = 5 اور مشترک فرق $= d = 7$ ہے اور یہ مستقل ہے۔

$\therefore$ یہ تواتر حسابی تصاعد ہے۔ اس حسابی تصاعد کے بعد والے دو ارکان

$26 + 7 = 33,\qquad 33 + 7 = 40$

یہاں 33 اور 40 دیے ہوئے حسابی تصاعد کے بعد کے دو ارکان ہیں۔

(2) اس تواتر میں $2, -2, -6, -10, \ldots$،

$t_1 = 2, \quad t_2 = -2, \quad t_3 = -6, \quad t_4 = -10 \ldots$

$t_2 - t_1 = -2 - 2 = -4$

$t_3 - t_2 = -6 - (-2) = -6 + 2 = -4$

$t_4 - t_3 = -10 - (-6) = -10 + 6 = -4$

اِس بنا پر ہر دو متواتر ارکان کے درمیان فرق، یعنی $t_{n+1} - t_n = -4$ ہے۔ اس لیے مشترک فرق $d = -4$ ہے۔
جو مستقل ہے۔ اس لیے یہ حسابی تصاعد ہے۔

اس حسابی تصاعد کے بعد والے دو ارکان $(-10) + (-4) = -14$ اور $(-4) + (-14) = -18$ ہیں۔

(3) تواتر $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots \rightarrow$ میں،

$t_1 = 1, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 2, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 3, \quad t_6 = 3 \ldots$

$t_2 - t_1 = 1 - 1 = 0, \qquad t_3 - t_2 = 2 - 1 = 1$

$t_4 - t_3 = 2 - 2 = 0, \qquad t_3 - t_2 \neq t_2 - t_1$

اس تواتر میں متواتر دو ارکان کے درمیان فرق مستقل نہیں ہے۔ اس لیے دیا ہوا تواتر حسابی تصاعد نہیں ہے۔

(4) تواتر $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ میں،

$t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_3 = -\frac{1}{2}, \quad t_4 = -\frac{3}{2}$

$t_2 - t_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_3 - t_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_4 - t_3 = -\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

یہاں مشترک فرق $d = -1$ ہے جو مستقل ہے۔

$\therefore$ دیا ہوا تواتر حسابی تصاعد ہے۔

اس کے بعد والے دو ارکان معلوم کریں گے۔

$-\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}, \qquad -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$

$\therefore$ بعد کے دو ارکان $-\frac{5}{2}$ اور $-\frac{7}{2}$ ہیں۔

مثال (2) پہلا رکن a اور مشترک فرق d ذیل میں دیے ہوئے ہیں۔اس کے مطابق پہلے چار ارکان معلوم کر کے حسابی تصاعد لکھیے۔

(1) $a = -3, \; d = 4$ (2) $a = 200, \; d = 7$

(3) $a = -1, \; d = -\frac{1}{2}$ (4) $a = 8, \; d = -5$

حل: (1) $a = -3, \quad d = 4$ اِس بنا پر

$a = t_1 = -3$

$t_2 = t_1 + d = -3 + 4 = 1$

$t_3 = t_2 + d = 1 + 4 = 5$

$t_4 = t_3 + d = 5 + 4 = 9$

$\therefore$ حسابی تصاعد، $\rightarrow -3, 1, 5, 9, \ldots$

(2) $a = 200, \quad d = 7$

$a = t_1 = 200$

$t_2 = t_1 + d = 200 + 7 = 207$

$t_3 = t_2 + d = 207 + 7 = 214$

$t_4 = t_3 + d = 214 + 7 = 221$

$\therefore$ حسابی تصاعد، $200, 207, 214, 221, \ldots$

(3) $a = -1, \quad d = -\frac{1}{2}$

$a = t_1 = -1$

$t_2 = t_1 + d = -1 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

$t_3 = t_2 + d = -\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{2} = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-\frac{1}{2})$

$= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ حسابی تصاعد، $-1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \ldots$

(4) $a = 8, \quad d = -5$

$a = t_1 = 8$

$t_2 = t_1 + d = 8 + (-5) = 3$

$t_3 = t_2 + d = 3 + (-5) = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-5) = -7$

$\therefore$ حسابی تصاعد، $8, 3, -2, -7, \ldots$

مشقی سیٹ 3.1

.1 درج ذیل میں سے کون سا تواتر حسابی تصاعد ہے؟ اگر حسابی تصاعد ہو تو ان میں سے ہر ایک کا مشترک فرق معلوم کیجیے۔

(1) $2, 4, 6, 8, \ldots$ (2) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$ (3) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(4) $0.3, 0.33, .0333, \ldots$ (5) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (6) $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \ldots$

(7) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ (8) $127, 132, 137, \ldots$

.2 اگر حسابی تصاعد کا پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہو تب حسابی تصاعد لکھیے۔

(1) $a = 10, d = 5$ (2) $a = -3, d = 0$ (3) $a = -7, d = \frac{1}{2}$

(4) $a = -1.25, d = 3$ (5) $a = 6, d = -3$ (6) $a = -19, d = -4$

.3 ذیل میں دیے ہوئے ہر حسابی تصاعد کا پہلا رکن اور مشترک فرق معلوم کیجیے۔

(1) $5, \ 1, \ -3, \ -7, \ \ldots$ (2) $0.6, \ 0.9, \ 1.2, \ 1.5, \ \ldots$

(3) $127, \ 135, \ 143, \ 151, \ \ldots$ (4) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \ \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \ldots$

آیئے، غور کریں۔

• $5, \ 8, \ 11, \ 14, \ \ldots$ کیا یہ حسابی تصاعد ہے؟ اگر ہے تو اس کا 100 واں رکن بتائیے۔
کیا اس تصاعد میں 92 ہے؟ کیا 61 ہے؟

آیئے، سمجھ لیں۔

حسابی تصاعد کا *n* واں رکن (n^{th} term of an A.P.)

تواتر $5, \ 8, \ 11, \ 14, \ \ldots$ میں دو متواتر ارکان کے درمیان فرق 3 ہے۔ اس لیے یہ تواتر حسابی تصاعد ہے۔ اس میں پہلا رکن 5 ہے۔ 5 میں 3 ملانے سے 8 دوسرا رکن حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح 100 واں رکن حاصل کرنے کے لیے کیا کرنا ہوگا؟

	پہلا رکن	دوسرا رکن	تیسرا رکن	...
عدد →	$5,$	$5 + 3 = 8,$	$8 + 3 = 11,$	...

اس طریقے سے 100 ویں رکن تک پہنچنے کے لیے بہت وقت درکار ہوگا۔ اس کے لیے کیا کوئی ضابطہ حاصل ہوگا؟ آیئے، دیکھتے ہیں۔

5	8	11	14	...	...	...	...
5	$5 + 1 \times 3$	$5 + 2 \times 3$	$5 + 3 \times 3$	...	$5 + (n-1) \times 3$	$5 + n \times 3$	...
پہلا رکن t_1	دوسرا رکن t_2	تیسرا رکن t_3	چوتھا رکن t_4	...	n واں رکن t_n	$n + 1$ واں رکن $t_n + 1$	...

عام طور پر t_1، t_2، t_3، . . . اس حسابی تصاعد میں پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہو تو،

$t_1 = a$

$t_2 = t_1 + d = a + d = a + (2 - 1)\,d$

$t_3 = t_2 + d = a + d + d = a + 2d = a + (3 - 1)d$

$t_4 = t_3 + d \ = a + 2d + d = a + 3d = a + (4 - 1)d$

یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

$$t_n = a + (n - 1)\,d$$

اب اس ضابطے کا استعمال کرکے حسابی تصاعد $5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots$ کا 100 واں رکن معلوم کریں گے۔

یہاں $a = 5$ اور $d = 3$ ہے۔

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore \quad t_{100} = 5 + (100 - 1) \times 3$$

$$= 5 + 99 \times 3$$

$$= 5 + 297$$

$$= 302$$

اس لیے اس حسابی تصاعد کا 100 واں رکن 302 ہے۔

اب کیا عدد 61 اس تصاعد میں ہے؟ یہ جواب حاصل کرنے کے لیے اسی ضابطے کا استعمال کرتے ہیں۔

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$t_n = 5 + (n - 1) \times 3$$

اگر n واں رکن 61 ہو، یعنی t_n

$$61 = 5 + 3n - 3$$

$$= 3n + 2$$

$$\therefore \quad 3n = 59$$

$$\therefore \quad n = \frac{59}{3}$$

لیکن n طبعی عدد نہیں ہے۔

$\therefore$ 61 اس تصاعد میں نہیں ہے۔

آیئے، غور کریں۔

کبیر کی والدہ، اس کی ہر سالگرہ کے وقت اس کی اونچائی نوٹ کرتی ہیں۔ وہ ایک سال کا تھا تب اس کی اونچائی 70 سم تھی۔ 2 سال کی عمر کا تھا تب 80 سم اونچائی تھی۔ 3 سال کی عمر پر اونچائی 90 سم تھی۔ اُس کی خالہ جان دسویں جماعت میں پڑھتی تھی۔ اس نے کہا کبیر کی اونچائی ہر سال حسابی تصاعد کی صورت میں بڑھتی ہوئی دِکھائی دیتی ہے۔ اسے تسلیم کرتے ہوئے اس نے بتایا کہ کبیر جب 15 سال کی عمر میں دسویں میں داخل ہوگا تب اس کی اونچائی کتنی ہوگی؟ اسے تعجب ہوا۔ آپ بھی کبیر کی اونچائی حسابی تصاعد کی صورت میں بڑھتی ہے، اس بات کو تسلیم کرتے ہوئے 15 سال کی عمر میں اس کی اونچائی کتنی ہوگی، معلوم کیجیے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ذیل کے حسابی تصاعد کے لیے t_n معلوم کیجیے اور اس بنا پر اس تصاعد کا 30 واں رکن معلوم کیجیے۔

$$3,\ 8,\ 13,\ 18,\ \ldots$$

حل: $3,\ 8,\ 13,\ 18,\ \ldots$ (دیا ہوا حسابی تصاعد)

یہاں $t_1 = 3,\ t_2 = 8,\ t_3 = 13,\ t_4 = 18,\ \ldots$

$d = t_2 - t_1 = 8 - 3 = 5,\quad n = 30$

ہمیں معلوم ہے کہ $t_n = a + (n-1)\,d$

$\therefore\ t_n = 3 + (n-1) \times 5 \ldots (\because a = 3,\ d = 5)$

$\therefore\ t_n = 3 + 5n - 5$

$\therefore\ t_n = 5n - 2$

$\therefore$ 30 واں رکن $= t_{30} = 5 \times 30 - 2$

$= 150 - 2 = 148$

مثال (2) درج ذیل حسابی تصاعد کا 560 کون سا رُکن ہے؟

$$2,\ 11,\ 20,\ 29,\ \ldots$$

حل: دیا ہوا حسابی تصاعد $2,\ 11,\ 20,\ 29,\ \ldots \rightarrow$

یہاں $a = 2$ ، $d = 11 - 2 = 9$

فرض کیجیے، اس تصاعد کا n واں رکن 560 ہے۔ $t_n = 560$

$t_n = a + (n-1)d$

$\therefore\ 560 = 2 + (n-1) \times 9$

$= 2 + 9n - 9$

$\therefore\ 9n = 567$

$\therefore\ n = \frac{567}{9} = 63$

$\therefore$ دیے ہوئے حسابی تصاعد کا 63 واں رکن 560 ہے۔

مثال (3) دیے ہوئے تواتر $5, 11, 17, 23, \ldots$ میں کیا 301 عدد ہے؟

حل: تواتر $5, 11, 17, 23, \ldots$ میں

$t_1 = 5,\ t_2 = 11,\ t_3 = 17,\ t_4 = 23,\ \ldots$

$t_2 - t_1 = 11 - 5 = 6$

$t_3 - t_2 = 17 - 11 = 6$

$\therefore$ یہ تواتر حسابی تصاعد ہے۔

اس تصاعد میں پہلا رکن $a = 5$ اور $d = 6$ ہے۔

فرض کیجیے، n واں رکن 301 ہے۔

$t_n = a + (n-1)\,d = 301$

$\therefore\ 301 = 5 + (n-1) \times 6$

$= 5 + 6n - 6$

$\therefore\ 6n = 301 + 1 = 302$

$\therefore\ n = \frac{302}{6}\quad \ldots$ (یہ مثبت صحیح عدد نہیں ہے۔)

اس بنا پر دیے ہوئے تواتر میں 301 عدد موجود نہیں ہے۔

مثال (4) 4 سے تقسیم ہونے والے دو ہندسی عدد کتنے ہیں؟

حل: 4 سے تقسیم پذیر دو ہندسی اعداد کی فہرست :

$\rightarrow 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ \ldots,\ 96$

اس طرح یہ اعداد کتنے ہیں، ہم معلوم کریں گے۔

یہاں $t_n = 96$ ، $a = 12$ ، $d = 4$ اور $n = ?$

اس کی مدد سے ہم n کی قیمت معلوم کریں گے۔

$\therefore$ ضابطے کے مطابق ،

$t_n = a + (n-1)\,d$

$96 = 12 + (n-1) \times 4$

$= 12 + 4n - 4$

$\therefore\ 4n = 88$

$\therefore\ n = 22$

$\therefore$ 4 سے تقسیم پذیر دو ہندسی اعداد کی تعداد 22 ہے۔

مثال (5) اگر ایک حسابی تصاعد کا 10 واں رکن 25 اور 18 واں رکن 41 ہو تب اس تصاعد کا 38 واں رکن معلوم کیجیے۔ اسی طرح n واں رکن 99 ہو تب n کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : دیے ہوئے حسابی تصاعد میں $t_{10} = 25$ اور $t_{18} = 41$

ہمیں ضابطہ معلوم ہے کہ $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore \quad t_{10} = a + (10 - 1)\,d$

$\therefore \quad 25 = a + 9d \qquad \ldots \text{(I)}$

اِس طرح, $\quad t_{18} = a + (18 - 1)\,d$

$\therefore \quad 41 = a + 17d \qquad \ldots \text{(II)}$

$25 = a + 9d$ $\qquad \ldots$ [(I) سے]

$\therefore \quad a = 25 - 9d$

یہ قیمت مساوات (II) میں رکھنے پر

$\therefore \quad a + 17d = 41$ $\qquad \ldots$ (مساوات II)

$\therefore \quad 25 - 9d + 17d = 41$

$\therefore \quad 8d = 41 - 25 = 16$

$\therefore \quad d = 2$

$d = 2$ مساوات I میں لکھنے پر،

$a + 9d = 25$

$\therefore \quad a + 9 \times 2 = 25$

$\therefore \quad a + 18 = 25$

$\therefore \quad a = 7$

اب، $t_n = a + (n - 1)\,d$ ضابطہ لیں گے۔

$\therefore t_{38} = 7 + (38 - 1) \times 2$

$= 7 + 37 \times 2$

$= 7 + 74$

$= 81$

اب، n واں رکن 99 ہو تب n کی قیمت معلوم کرنا ہے۔

$t_n = a + (n - 1)\,d$

$99 = 7 + (n - 1) \times 2$

$99 = 7 + 2n - 2$

$99 = 5 + 2n$

$\therefore \quad 2n = 94$

$\therefore \quad n = 47$

$\therefore$ دیے ہوئے تصاعد کا 38 واں رکن 81 ہے اور 47 واں رکن 99 ہے۔

مشقی سیٹ 3.2

.1 ذیل میں دیے ہوئے حسابی تصاعد کی مدد سے چوکونوں میں صحیح عدد لکھیے۔

(1) $1, 8, 15, 22, \ldots$

یہاں $a = \square, \; t_1 = \square, \; t_2 = \square, \; t_3 = \square, \ldots$

$t_2 - t_1 = \square - \square = \square$

$t_3 - t_2 = \square - \square = \square, \; \therefore \; d = \square$

(2) $3, 6, 9, 12, \ldots$

یہاں $t_1 = \square, \; t_2 = \square, \; t_3 = \square, \; t_4 = \square, \ldots$

$t_2 - t_1 = \square, \; t_3 - t_2 = \square, \; \therefore \; d = \square$

(3) $-3, -8, -13, -18, \ldots$

یہاں $t_1 = \square, \; t_2 = \square, \; t_3 = \square, \; t_4 = \square, \ldots$

$t_2 - t_1 = \square, \; t_3 - t_2 = \square, \; \therefore \; a = \square, d = \square$

(4) $70, 60, 50, 40, \ldots$

یہاں، $t_1 = \square, \; t_2 = \square, \; t_3 = \square, \ldots$

$\therefore \; a = \square, d = \square$

.2 ذیل میں دیا ہوا تواتر حسابی تصاعد ہے یا نہیں، طے کیجیے۔ اگر ہے تو اس حسابی تصاعد کا بیسواں رکن معلوم کیجیے۔

$-12, -5, 2, 9, 16, 23, 30, \ldots$

.3 حسابی تصاعد $12, 16, 20, 24, \ldots \rightarrow$ کا 24 واں رکن معلوم کیجیے۔

.4 ذیل میں دیے ہوئے حسابی تصاعد کا 19 واں رکن معلوم کیجیے۔

$7, 13, 19, 25, \ldots$

.5 ذیل میں دیے ہوئے حسابی تصاعد کا 27 واں رکن معلوم کیجیے۔

$9, 4, -1, -6, -11$

.6 تین ہندسی طبعی اعداد کے سیٹ میں 5 سے تقسیم پذیر اعداد کتنے ہیں؟ انھیں معلوم کیجیے۔

.7 ایک حسابی تصاعد کا 11 واں رکن 16 اور 21 واں رکن 29 ہے تو اس تصاعد کا 41 واں رکن معلوم کیجیے۔

.8 حسابی تصاعد $11, 8, 5, 2, \ldots \rightarrow$ میں -151 عدد کون سا رُکن ہے؟

.9 10 سے 250 تک کے طبعی اعداد میں سے کتنے اعداد 4 سے تقسیم پذیر ہیں؟

.10 ایک حسابی تصاعد کا 17 واں رکن، 10 ویں رکن سے 7 زیادہ ہے تو مشترک فرق معلوم کیجیے۔

عقل مند اتالیق

ایک راجا تھا۔اس نے اپنے بچوں یشونت راج اور گیتا دیوی کو گھڑسواری سکھانے کے لیے بالترتیب تارا اور میرا نامی اتالیق کو مقرر کیا۔ ان دونوں کو سال بھر کتنی تنخواہ دی جائے، اُن سے پوچھا۔

تارا نے کہا، ''مجھے پہلے مہینے کی تنخواہ 100 سکے دیے جائیں اور بعد کے ہر مہینے میں 100 سکوں کا اضافہ کیا جائے۔'' میرا نے کہا، مجھے پہلے مہینے 10 سکے تنخواہ دیجیے اور بعد کے ہر مہینے میں قبل والے مہینے کی تنخواہ کے دُگنا تنخواہ دی جائے۔''

مہاراجا نے اسے منظور کرلیا۔تین مہینے بعد یشونت راج نے اپنی بہن سے کہا، ''میری اتالیق تیری اتالیق سے زیادہ عقل مند محسوس ہوتی ہے، اس نے زیادہ تنخواہ مانگی ہے۔'' گیتا دیوی نے کہا، ''مجھے پہلے ایسا ہی محسوس ہوا لیکن میں نے میری اتالیق سے بھی پوچھا، ''آپ نے تنخواہ کم کیوں مانگی؟'' تب اس نے مسکراتے ہوئے کہا کہ آٹھ مہینے بعد دلچسپ واقعہ وقوع پذیر ہوگا۔اس وقت دیکھنا۔ میں نے آٹھویں مہینے کی تنخواہ معلوم کی۔ آپ بھی معلوم کرکے دیکھیے۔''

مہینہ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
تارا کی تنخواہ	100	200	300	400	500	600	700	800	900	. . .	. . .	. . .
میرا کی تنخواہ	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	. . .	. . .	. . .

آپ یہ جدول مکمل کیجیے۔

تارا کی تنخواہ 100، 200، 300، 400، ... یہ حسابی تصاعد ہے۔کیا آپ کی سمجھ میں آیا۔

$$t_1 = 100,\quad t_2 = 200,\ t_3 = 300, \ldots \quad ; \qquad t_2 - t_1 = 100 = d$$

یہاں مشترک فرق 100 ہے۔

میرا کی تنخواہ 10، 20، 40، 80، ...حسابی تصاعد نہیں ہے کیونکہ $20 - 10 = 10$ ، $40 - 20 = 20$ ، $80 - 40 = 40$

یعنی یہاں مشترک فرق d مستقل نہیں ہے حالانکہ اس تصاعد میں ہر رکن اس سے قبل کے رکن کے دُگنا ہوجاتا ہے۔

یہاں ، $\frac{t_2}{t_1} = \frac{20}{10} = 2,\quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{40}{20} = 2,\qquad \frac{t_4}{t_3} = \frac{80}{40} = 2$

اس لیے $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ یعنی بعد کے رکن اور قبل کے رکن کی نسبت مساوی ہے۔اس تصاعد کو ہندسی تصاعد کہتے ہیں۔ $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ نسبت 1 سے زیادہ ہو تب ہندسی تصاعد حسابی تصاعد کی بہ نسبت تیزی سے بڑھتا ہے۔اسے معلوم کیجیے۔

اگر نسبت 1 کی بہ نسبت کم ہو تو وہ تصاعد کس طرح بدلتا ہے، اسے بھی معلوم کیجیے۔ہم ان میں سے صرف حسابی تصاعد کا مطالعہ کرنے والے ہیں۔حسابی تصاعد میں n واں رکن کس طرح معلوم کرتے ہیں، اس کا مطالعہ کرچکے ہیں۔اب پہلے n ارکان کی جمع کس طرح معلوم کریں، اس کا مطالعہ کریں گے۔

فوراً جمع

تین سو سال قبل کی بات ہے۔ جرمنی میں بیوٹنر (Buttner) نام کے ایک استاد کا یک معلّمی اسکول تھا۔ جوہان مارٹن بارٹیلس نام کا صرف ایک معاون مددگاران کے پاس تھا۔ اس کا کام بچوں کو حروفِ تہجی سکھانا اور انھیں لکھنے کے قابل بنانا تھا۔ بیوٹنر کا سخت نظم وضبط تھا۔ بیوٹنر ماسٹر کو کوئی کام پورا کرنا تھا۔ جماعت میں طلبہ شور وغل نہ کریں، اس لیے کام میں مشغول رکھنے کے لیے انھوں نے ان بچوں کو حساب دینے کا فیصلہ کیا۔ انھوں نے طلبہ سے کہا، 1 سے 100 تک اعداد سلیٹ پر لکھو اور ان کی جمع کرو۔ ماسٹر صاحب نے اپنا کام شروع کر دیا۔ بچے اعداد لکھنے لگے۔ پانچ ہی منٹ میں ایک سلیٹ نیچے رکھنے کی آواز آئی۔ انھوں نے کارل گاؤس کی طرف دیکھا اور پوچھا، یہ کیا؟ میں نے تجھے 1 سے 100 اعداد لکھنے کے لیے کہا، اُن کی جمع کرنے کے لیے بھی کہا، سلیٹ اُلٹ کر کیوں رکھ دی؟ کیا تمھیں کچھ کرنا نہیں ہے؟''

کارل گاؤس نے کہا، ''میں جمع کر چکا ہوں۔''

ماسٹر صاحب نے کہا، ''کیا! اتنی جلدی جمع کر لی؟ اعداد بھی نہیں لکھا ہوگا، جواب کتنا آیا؟''

کارل گاؤس نے کہا، ''پانچ ہزار پچاس۔''

ماسٹر صاحب حیرت زدہ رہ گئے اور پوچھا، ''کس طرح جمع کیا؟''

کارل گاؤس کا فوراً جمع کرنے کا طریقہ :

متواتر ترتیب سے اعداد	1 +	2 +	3 +	4 +	. . . .	100 +
اُلٹ ترتیب سے اعداد	100	99	98	97	. . . .	1
جمع	101	101	101	101	. . . .	101

ہر جوڑی کے عددوں کی جمع 101 آتی ہے۔ یہ جمع 100 مرتبہ کی گئی یعنی 101×100 کا ضرب کیا۔ وہ 10100 آیا۔ یہاں 1 سے 100 تک اعداد کو دو مرتبہ لیا گیا ہے۔ اس لیے 10100 کا نصف کیا۔ وہ 5050 آیا۔ لہٰذا $1, 2, 3, \ldots, 100$ اِن اعداد کی جمع 5050 ہے۔ ماسٹر صاحب نے اسے شاباشی دی۔

اب گاؤس کی جمع کرنے کی تکنیک کا استعمال کر کے حسابی تصاعد کے n ارکان کی جمع معلوم کرنے کا ضابطہ حاصل کریں گے۔

جوہان فریڈرِچ کارل گاؤس

30 اپریل 1777 - 23 فروری 1855

کارل گاؤس ایک عظیم جرمن ریاضی داں تھے۔ وہ براؤن سوائک میں ایک غیر تعلیم یافتہ خاندان میں پیدا ہوئے۔ بیوٹنر کے اسکول میں انھوں نے اپنی ذہانت کی جھلک دِکھائی۔ اسی دوران بیوٹنر کے معاون مددگار جوہان مارٹن بارٹیلس سے گاؤس کی دوستی ہوگئی۔ دونوں نے مل کر الجبرا پر ایک کتاب شائع کی۔ بارٹیلس نے گاؤس کی غیر معمولی ذہانت کو بہت سے لوگوں کے سامنے اُجاگر کیا۔

آیئے، سمجھ لیں۔

حسابی تصاعد کے پہلے *n* ارکان کی جمع (Sum of first *n* terms of an A.P.)

حسابی تصاعد $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ ...a+(n-1)d$

اس تصاعد میں پہلا رکن a ہے اور مشترک فرق d ہے۔ اس تصاعد میں پہلے n ارکان کی جمع S_n سے ظاہر کریں گے۔

$$S_n = [a] + [a+d] + \ ...\ + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]$$

اِن ارکان کو اُلٹی ترتیب میں لکھنے پر،

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \ ...\ + [a+d] + [a]$$

جمع کرنے پر،

$$2S_n = [a+a+(n-1)d] + [a+d+a+(n-2)d] + \ ...\ + [a+(n-2)d+a+d] + [a+(n-1)d+a]$$

$$2S_n = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + \ ...\ + [2a+(n-1)d]\ ...\ n \text{ مرتبہ}$$

$$2S_n = n\,[2a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \quad \text{یا} \quad S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

مثال: حسابی تصاعد $14,\ 16,\ 18,\ ...$ کے پہلے 100 ارکان کی جمع معلوم کیجیے۔

یہاں $a = 14$ ، $d = 2$ ، $n = 100$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore\ S_{100} = \frac{100}{2}[2\times 14+(100-1)\times 2]$$

$$= 50\,[28 + 198]$$

$$= 50\times 226 = 11300$$

$\therefore$ دیے ہوئے حسابی تصاعد کے پہلے 100 ارکان کی جمع 11,300 ہے۔

اسے ذہن میں رکھیں۔

دیے ہوئے حسابی تصاعد کا پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہو تب

$$t_n = a+(n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

حسابی تصاعد کے پہلے n ارکان کی جمع کا ایک اور ضابطہ معلوم کریں گے۔

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots [a+(n-1)d]$$

اس حسابی تصاعد میں، پہلا رکن $t_1 = a$ ہے اور n واں رکن $[a+(n-1)d]$ ہے۔

اب ، $S_n = \frac{n}{2}[\underline{a}+\underline{a+(n-1)d}]$

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n] = \frac{n}{2}$ [پہلا رکن + آخری رکن]

حل کردہ مثالیں

مثال (1) پہلے n طبعی اعداد کی جمع کیجیے۔

حل : پہلے n طبعی اعداد $1, 2, 3, \ldots, n$ ہیں۔

یہاں $a = 1$ ، $d = 1$ ، n واں رکن $= n$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$S_n = \frac{n}{2}$ [پہلا رکن + آخری رکن]

$$= \frac{n}{2}[1+n] \quad = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\therefore$ پہلے n طبعی اعداد کی جمع $\frac{n(n+1)}{2}$ ہے۔

مثال (2) پہلے n جفت طبعی اعداد کی جمع کیجیے۔

حل : پہلے n جفت طبعی اعداد $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n \rightarrow$ ہیں۔

t_1 = پہلا رکن $= 2$ ، t_n = آخری رکن $= 2n$

طریقہ I

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[2\times 2+(n-1)2]$$

$$= \frac{n}{2}[4+2n-2]$$

$$= \frac{n}{2}[2+2n]$$

$$= \frac{n}{2}\times 2(1+n)$$

$$= n(1+n) = n(n+1)$$

طریقہ II

$$S_n = 2+4+6\ldots+2n$$

$$= 2(1+2+3+\ldots+n)$$

$$= \frac{2[n(n+1)]}{2}$$

$$= n(1+n)$$

$$= n(n+1)$$

طریقہ III

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$$

$$= \frac{n}{2}[2+2n]$$

$$= \frac{n}{2}\times 2(1+n)$$

$$= n(1+n)$$

$$= n(n+1)$$

$\therefore$ پہلے n جفت طبعی اعداد کی جمع $n(n+1)$ ہوتی ہے۔

مثال (3) پہلے n طاق طبعی اعداد کی جمع معلوم کیجیے۔

حل: پہلے n طاق طبعی اعداد

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ (2n-1)$$

$$a = t_1 = 1,\ \ t_n = (2n-1),\ \ d = 2$$

طریقہ I

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$$
$$= \frac{n}{2}[1 + (2n-1)]$$
$$= \frac{n}{2}[1 + 2n - 1]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2n$$
$$= n^2$$

طریقہ II

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$= \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 2]$$
$$= \frac{n}{2}[2 + 2n - 2]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2n$$
$$= n^2$$

طریقہ III

$$S_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$$
$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 2n)$$
$$- (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n)$$
$$= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{2n(n+1)}{2}$$
$$= (2n^2 + n) - (n^2 + n)$$
$$= n^2$$

اس لیے پہلے n طاق طبعی اعداد کا مجموعہ n^2 ہوتا ہے۔

مثال (4): 1 سے 150 تک تمام طاق اعداد کی جمع کیجیے۔

حل: 1 سے 150 تک تمام طاق اعداد $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 149$ یہ حسابی تصاعد ہے۔

یہاں $a = 1$، $d = 2$، پہلے 1 سے 150 تک طاق اعداد کتنے ہیں معلوم کریں گے یعنی n کی قیمت معلوم کریں گے۔

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$149 = 1 + (n-1)2 \quad , \quad \therefore\ 149 = 1 + 2n - 2 \quad , \quad \therefore\ n = 75$$

اب $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 149$ ان 75 اعداد کا مجموعہ معلوم کریں گے۔

$$a = 1,\ d = 2,\ n = 75$$

طریقہ I

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$S_n = \boxed{}$$
$$S_n = \boxed{} \times \boxed{}$$
$$S_n = \boxed{}$$

طریقہ II

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$$
$$S_n = \frac{75}{2}[1 + 149]$$
$$S_n = \boxed{} \times \boxed{}$$
$$S_n = \boxed{}$$

مشقی سیٹ 3.3

.1 ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن 6 اور مشترک فرق 3 ہے تو S_{27} معلوم کیجیے۔

$a = 6,\ d = 3,\ S_{27} = ?$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[\square + (n-1)\,d]$$

$$S_{27} = \frac{27}{2}\,[12 + (27-1)\,\square]$$

$$= \frac{27}{2} \times \square$$

$$= 27 \times 45 \quad = \square$$

.2 پہلے 123 جفت طبعی اعداد کی جمع کیجیے۔

.3 1 اور 350 کے درمیان تمام جفت اعداد کی جمع کیجیے۔

.4 ایک حسابی تصاعد کا 19 واں رکن 52 اور 38 واں رکن 128 ہے۔اس کے پہلے 56 ارکان کی جمع معلوم کیجیے۔

.5 درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔ 1 اور 140 کے درمیان، 4 سے تقسیم پذیر طبعی اعداد کتنے ہیں، معلوم کیجیے۔ان اعداد کی جمع کیجیے۔جمع کرنے کے لیے درج ذیل عمل کیجیے۔

1 اور 140 کے درمیان 4 سے تقسیم پذیر اعداد

↓

$4,\ 8,\ \ldots\ \ldots\ \ldots,\ 136$

↓

یہ کل کتنے اعداد ہیں؟ $\therefore\ n = \square$

↓

$a = \square,\ d = \square,\ t_n = \square$

↓

$t_n = a + (n-1)d$

↓

$136 = \square + (n-1) \times \square$

→ $n = \square$ → $S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n-1)d]$

$$S_{\square} = \frac{\square}{2}\,[\qquad\qquad] \quad = \square$$

$\therefore$ 1 اور 140 کے درمیان 4 سے تقسیم پذیر اعداد کی جمع $= \square$

.6★ ایک حسابی تصاعد کے پہلے 55 ارکان کی جمع 3300 ہے، اس کا 28 واں رکن معلوم کیجیے۔

7.★ ایک حسابی تصاعد کے متواتر تین ارکان کی جمع 27 اور ان کا حاصل ضرب 504 ہے۔ وہ ارکان معلوم کیجیے۔ [فرض کیجیے تین مسلسل اعداد $a-d,\ a,\ a+d$ ہے]

8.★ ایک حسابی تصاعد کے متواتر چار ارکان کی جمع 12 ہے۔ ان چار متواتر ارکان میں سے تیسرے اور چوتھے ارکان کی جمع 14 ہے۔ وہ چار ارکان معلوم کیجیے۔ (فرض کیجیے، چار متواتر ارکان $a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$ ہیں۔)

9.★ ایک حسابی تصاعد کا 9 واں رکن صفر ہے تو دِکھایئے کہ 29 واں رکن، 19 ویں رکن کا دگنا ہے۔

آیئے، سمجھ لیں۔

حسابی تصاعد کا اطلاق (Application of A.P.)

مثال (1) مکسر بنانے والی ایک کمپنی نے تیسرے سال 600 مکسر تیار کیے اور ساتویں سال 700 مکسر بنائے۔ ہر سال تیار ہونے والے مکسر کی تعداد میں مخصوص اضافہ ہو تو ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) پہلے سال کی پیداوار (ii) 10 ویں سال کی پیداوار (iii) پہلے سات سال میں کل پیداوار

حل : کمپنی ہر سال مخصوص مقدار (تعداد) میں مکسر کی پیداوار میں اضافہ کرتی ہے۔

اس بنا پر لگاتار ہر سال میں تیار کیے گئے مکسروں کی تعداد حسابی تصاعد میں ہوگی۔

(i) فرض کیجیے، کمپنی نے n ویں سال t_n مکسر کی پیداوار کی ہے۔ دی ہوئی معلومات کی بنا پر $t_3 = 600,\ \ t_7 = 700$

ہم جانتے ہیں کہ $t_n = a+(n-1)d$

$t_3 = a+(3-1)d$

$= 600 = a+2d \qquad \ldots \text{(I)}$

$t_7 = a+(7-1)d$

$= a+6d = 700 \qquad \ldots \text{(II)}$

(مساوات (II) میں مساوات (I) رکھنے پر) $a+2d = 600\ ,\quad \therefore\ a = 600 - 2d$

$600 - 2d + 6d = 700$

$4d = 100\ ,\quad \therefore\ d = 25$

$a+2d = 600\ ,\quad \therefore\ a + 2\times 25 = 600$

$a + 50 = 600\ ,\quad \therefore\ a = 550$

اس لیے پہلے سال کی پیداوار 550 ہوگی۔

(ii) $t_n = a+(n-1)d$

$t_{10} = 550+(10-1)\times 25$

$= 550 + 225 = 775$

اس لیے 10 ویں سال پیداوار 775 ہوگی۔

(iii) پہلے 7 سال میں کل پیداوار کے لیے S_n کا ضابطہ استعمال کریں گے۔

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore\ S_7 = \frac{7}{2}[1100 + 150] = \frac{7}{2}[1250] = 7 \times 625 = 4375$$

اس لیے پہلے سات سالوں میں 4375 مکسر تیار کیے گئے۔

مثال (2) قرض لی گئی رقم 3,25,000 روپے واپس ادا کرنے کے لیے اَجئے شرما پہلے مہینے میں 30,500 روپے دیتا ہے۔ اس کے بعد انھیں ہر ماہ پہلے مہینے میں ادا کی گئی رقم سے 1500 روپے کم دینے ہوتے ہیں تو قرض لی گئی رقم کو ادا کرنے کے لیے انھیں کتنے مہینے درکار ہوں گے؟

حل : فرض کیجیے قرض لی گئی رقم ادا کرنے کے لیے n مہینے درکار ہوں گے۔ 30,500 روپے میں سے ہر ماہ 1500 روپے کم دینے ہیں۔

$\therefore$ 30500, 30500 − 1500, 30500 − 2 × 1500 . . . (ادا کی جانے والی رقمیں حسابی تصاعد میں ہوں گی)

پہلا رکن $= a = 30500,\ d = -1500,$ قرض لی گئی رقم $= S_n = 3{,}25{,}000$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$325000 = \frac{n}{2}[2\times 30500+(n-1)\times(-1500)]$$

$$= \frac{n}{2}[2\times 30500 - 1500n + 1500]$$

$$325000 = 30500n - 750n^2 + 750n$$

$$\therefore\ 750n^2 - 31250n + 325000 = 0$$

$$\therefore\ 3n^2 - 125n + 1300 = 0 \quad \ldots$$ (طرفین کو 250 سے تقسیم کرنے پر)

$$\therefore\ 3n^2 - 60n - 65n + 1300 = 0$$

$$\therefore\ 3n(n-20) - 65(n-20) = 0$$

$$\therefore\ (n-20)(3n-65) = 0$$

$\therefore\ n - 20 = 0$ یا $3n - 65 = 0$

$n = 20$ یا $n = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$

n حسابی تصاعد کے ارکان کا نمبر شمار ہے اس لیے n طبعی عدد ہے۔

$\therefore\ n \neq \frac{65}{3}$ ، $\therefore\ n = 20$

(یا، 20 مہینے بعد $S_{20} = 3{,}25{,}000$ اس لیے اس وقت قرض لی گئی تمام رقم ادا کی جائے گی۔ اس کے بعد کی قسط کا خیال کرنا ضروری نہیں ہے۔)

$\therefore$ قرض لی گئی رقم، واپس ادا کرنے کے لیے 20 مہینے درکار ہوں گے۔

مثال (3) انور ہر ماہ مخصوص رقم کی بچت کرتا ہے۔ پہلے مہینے میں وہ 200 روپے کی بچت کرتا ہے۔ دوسرے مہینے میں 250 روپے، تیسرے مہینے میں 300 روپے بچت کرتا ہو تو بتائیے 1000 روپے کی بچت کس نمبر کے مہینے میں ہوگی؟ اور اس مہینے میں اس کی کل کتنی بچت ہوئی ہوگی؟

حل : پہلے مہینے میں بچت 200 روپے، دوسرے مہینے میں بچت 250 روپے، . . .

اس طرح ہر ماہ ہونے والی بچت $200, 250, 300, \ldots$ یہ حسابی تصاعد ہے۔

یہاں $a = 200$ ، $d = 50$ ، t_n کے ضابطے کی مدد سے پہلے n معلوم کریں گے۔ بعد میں S_n معلوم کریں گے۔

$$t_n = a+(n-1)d$$
$$= 200 + (n-1)50$$
$$= 200 + 50n - 50$$
$$\therefore \quad 1000 = 150 + 50n$$
$$150 + 50n = 1000$$
$$50n = 1000 - 150$$
$$50n = 850$$
$$\therefore \quad n = 17$$

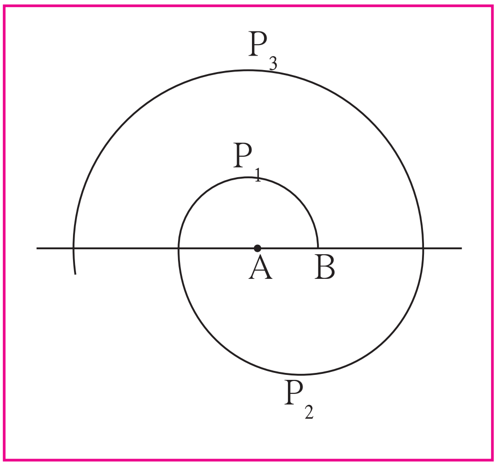
اس لیے 1000 روپے کی بچت 17 ویں مہینے میں ہوگی۔

اب ، 17 مہینوں میں کل کتنی بچت ہوئی، معلوم کرتے ہیں۔

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$
$$= \frac{17}{2}[2 \times 200+(17-1) \times 50]$$
$$= \frac{17}{2}[400 + 800]$$
$$= \frac{17}{2}[1200]$$
$$= 17 \times 600$$
$$= 10200$$

اس لیے 17 مہینوں میں کل بچت 10200 روپے ہوگی۔

مثال (4) مندرجہ ذیل کے مطابق ایک خط پر A مرکز لے کر 0.5 سم نصف قطر کا P_1 نصف دائرہ بنایا گیا۔ وہ خط کو نقطہ B پر قطع کرتا ہے۔ اب B مرکز لے کر 1 سم نصف قطر کا P_2 نصف دائرہ خط کے مخالف پہلو میں بنایا گیا۔



اب دوبارہ نقطہ A کو مرکز مان کر 1.5 سم نصف قطر لے کر نصف دائرہ P_3 بنایا گیا۔ اسی طرح A اور B مرکز مان کر بالترتیب 0.5 سم، 1 سم، 1.5 سم، 2 سم، ...... نصف قطروں کے نصف دائرے بنانے پر ایک پیچ دار (spiral) شکل بن جاتی ہے تو اس ترتیب سے 13 نصف دائروں سے بنی پیچ دار شکل (منحنی) کی کل لمبائی کتنی ہوگی۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

حل : فرض کیجیے، A، B، A، B، ... اس ترتیب سے مرکز مان کر نکالے گئے نصف دائروں کے محیط کی لمبائی بالترتیب P_1، P_2، P_3، ... ہے۔

پہلے نصف محیط کا نصف قطر 0.5 سم ہے۔ دوسرے نصف محیط کا نصف قطر 1.0 سم، ... اس طرح اس معلومات کی بنا پر P_1، P_2، P_3، ...، P_{13} معلوم کریں گے۔

پہلے نصف محیط کی لمبائی $= P_1 = \pi r_1 = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$P_2 = \pi r_2 = \pi \times 1 = \pi$$

$$P_3 = \pi r_3 = \pi \times 1.5 = \frac{3}{2}\pi$$

P_1، P_2، P_3، ... یہ نصف محیط ہیں یعنی $\frac{1}{2}\pi, 1\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ → یہ اعداد حسابی تصاعد ہیں۔

یہاں $a = \frac{1}{2}\pi$ ، $d = \frac{1}{2}\pi$ اس بنا پر S_{13} معلوم کریں گے۔

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}\left[2 \times \frac{\pi}{2} + (13-1) \times \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{13}{2}[\pi + 6\pi]$$

$$= \frac{13}{2} \times 7\pi$$

$$= \frac{13}{2} \times 7 \times \frac{22}{7}$$

$= 143$ سم

اس لیے 13 نصف دائروں سے بنی ہوئی پیچ دار شکل (منحنی) کی کل لمبائی 143 سم ہے۔

مثال (5) ایک گاؤں کی آبادی میں سال 2010ء میں 4000 لوگ خواندہ تھے۔ اس میں ہر سال 400 کا اضافہ ہوتا ہے تو سال 2020ء میں کتنے لوگ خواندہ ہوجائیں گے؟

حل :

سال	2010ء	2011ء	2012ء	. . .	2020ء
خواندہ لوگ	4000	4400	4800	. . .	

$a = 4000,\quad d = 400,\quad n = 11$

$t_n = a + (n-1)d$

$= 4000 + (11-1)400$

$= 4000 + 4000$

$= 8000$

سال 2020ء میں 8000 خواندہ لوگ ہوجائیں گے۔

مثال (6) محترمہ رقیہ شیخ کو 2015ء کی سالانہ تنخواہ 1,80,000 روپے کی نوکری ملی۔ آفس کی جانب سے انھیں سالانہ 10,000 روپے اضافہ دینا منظور کیا گیا تو بتایئے کس سن میں ان کی سالانہ تنخواہ 2,50,000 روپے ہوجائے گی؟

حل :

سال	پہلے سال (2015)	دوسرے سال (2016)	تیسرے سال (2017)	. . .
تنخواہ	[1,80,000]	[1,80,000 + 10,000]	. . .	. . .

$a = 1,80,000,\qquad d = 10,000,\qquad n = ?\qquad t_n = 2,50,000$ روپے

$t_n = a + (n-1)d$

$\therefore\quad 250000 = 180000 + (n-1) \times 10000$

$\therefore\quad (n-1) \times 10000 = 70000$

$\therefore\quad n - 1 = 7$

$\therefore\quad n = 8$

$\therefore$ 8 ویں سال یعنی 2023ء میں ان کی تنخواہ 2,50,000 روپے ہوجائے گی۔

مشقی سیٹ 3.4

.1 صائمہ نے 1 جنوری 2016 کو طے کیا کہ وہ آج 10 روپے، دوسرے دن 11 روپے، تیسرے دن 12 روپے اس طرح بچت کرتی رہے گی تو بتائیے 31 دسمبر 2016 تک اس کی کل کتنی بچت ہوئی؟

.2 ایک صاحب خانہ نے 8000 روپے بطور قرض لیا اور اس پر 1360 روپے سود ادا کرنا قبول کیا۔ ہر ایک قسط پہلی والی قسط سے 40 روپے کم دے کر کل 12 ماہانہ قسطوں میں رقم ادا کی تو اس نے پہلی قسط اور آخری قسط کتنی ادا کی تھی؟

.3 سچن نے قومی بچت سرٹیفکیٹ میں پہلے سال 5000 روپے، دوسرے سال 7000 روپے، تیسرے سال 9000 روپے؛ اس طرح سرمایہ کاری کی تو 12 سال میں اس نے کل کتنی سرمایہ کاری کی؟

.4 ایک تماشہ گاہ (تھیٹر) میں کرسیوں کی کل 27 قطاریں ہیں۔ پہلی قطار میں 20 کرسیاں ہیں، دوسرے قطار میں 22 کرسیاں، تیسری قطار میں 24 کرسیاں ہیں تو 15 ویں قطار میں کل کتنی کرسیاں ہوں گی اور تھیٹر میں کل کتنی کرسیاں ہیں؟

.5 کارگل میں ایک ہفتے کے پیر سے سنیچر تک کا درجۂ حرارت نوٹ کیا گیا۔ وہ درجۂ حرارت حسابی تصاعد میں ہے۔ پیر اور سنیچر کے درجۂ حرارت کا مجموعہ، منگل اور سنیچر کے درجۂ حرارت کے مجموعے سے 5° سیلسی اَس زیادہ ہے۔ اگر بدھ کا درجۂ حرارت -30° سیلسی اَس ہو تو ہر روز کا درجۂ حرارت معلوم کیجیے۔

.6 'عالمی یومِ ماحولیات' کے موقع پر ایک اسکول کے میدان میں مثلثی شکل میں درخت لگانے کا پروگرام ترتیب دیا گیا۔ پہلی قطار میں ایک درخت، دوسری قطار میں 2 درخت، تیسری قطار میں 3 درخت اور اسی طرح آگے بھی۔ اگر کل 25 قطاریں ہوں تو درختوں کی کل تعداد معلوم کیجیے۔

مجموعۂ سوالات 3

.1 درج ذیل متبادل میں سے درست جواب تلاش کیجیے۔

(1) تواتر $-10, -6, -2, 2, \ldots \rightarrow$ .... ہے۔

(A) حسابی تصاعد ہے کیونکہ $d = -16$ (B) حسابی تصاعد ہے کیونکہ $d = 4$

(C) حسابی تصاعد ہے کیونکہ $d = -4$ (D) حسابی تصاعد نہیں ہے۔

(2) ایسا حسابی تصاعد جس کا پہلا رکن -2 اور مشترک فرق -2 ہے اس کے پہلے چار ارکان .... ہیں۔

(A) $-2, 0, 2, 4$ (B) $-2, 4, -8, 16$

(C) $-2, -4, -6, -8$ (D) $-2, -4, -8, -16$

(3) پہلے 30 طبعی اعداد کی جمع درج ذیل میں سے کیا ہے؟

(A) 464 (B) 465 (C) 462 (D) 461

(4) دیے ہوئے حسابی تصاعد میں $d = -4$, $n = 7$, $t_n = 4$ ہو تو $a = \ldots$

(A) 6 (B) 7 (C) 20 (D) 28

(5) ایک حسابی تصاعد کے لیے $a = 3.5$، $d = 0$ ہو تو $t_n = \ldots\ldots\ldots$

(A) 0 (B) 3.5 (C) 103.5 (D) 104.5

(6) ایک حسابی تصاعد کے پہلے دو ارکان -3 اور 4 ہیں تو 21 واں رکن .... ہے۔

(A) -143 (B) 143 (C) 137 (D) 17

(7) اگر ایک حسابی تصاعد کے لیے $d = 5$ ہو تو $t_{18} - t_{13} = \ldots\ldots\ldots$

(A) 5 (B) 20 (C) 25 (D) 30

(8) 3 کے پہلے 5 ضعف کی جمع .... ہے۔

(A) 45 (B) 55 (C) 15 (D) 75

(9) حسابی تصاعد $15, 10, 5, \ldots$ کے پہلے 10 ارکان کی جمع .... ہے۔

(A) -75 (B) -125 (C) 75 (D) 125

(10) ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن 1 اور n واں رکن 20 ہے۔ اگر $S_n = 399$ ہو تو $n = \ldots\ldots\ldots$

(A) 42 (B) 38 (C) 21 (D) 19

2. حسابی تصاعد $-11, -8, -5, \ldots, 49$ کا آخر سے چوتھا رکن معلوم کیجیے۔

3. ایک حسابی تصاعد کا 10 واں رکن 46 ہے۔ 5 ویں اور 7 ویں ارکان کی جمع 52 ہے تو وہ حسابی تصاعد لکھیے۔

4. ایک حسابی تصاعد کا چوتھا رکن -15 اور 9 واں رکن -30 ہے تو پہلے 10 ارکان کی جمع معلوم کیجیے۔

5. دو حسابی تصاعد $9, 7, 5, \ldots$ اور $24, 21, 18, \ldots$ اس طرح دیے ہوئے ہیں۔ اگر ان دو حسابی تصاعد کا n واں رکن مساوی ہو تو n کی قیمت معلوم کیجیے اور n واں رکن بھی معلوم کیجیے۔

6. اگر ایک حسابی تصاعد کے تیسرے اور آٹھویں رکن کی جمع 7 ہو اور ساتویں اور 14 ویں ارکان کی جمع -3 ہو تو 10 واں رکن معلوم کیجیے۔

7. ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن -5 اور آخری رکن 45 ہے۔ اگر ان تمام ارکان کی جمع 120 ہو تو وہ کتنے ارکان ہیں؟ اور ان کا مشترک فرق معلوم کیجیے۔

.8 1 سے n تک طبعی اعداد کی جمع 36 ہو تو n کی قیمت معلوم کیجیے۔

.9 عدد 207 کے تین حصے اس طرح کیجیے کہ وہ اعداد حسابی تصاعد میں ہوں اور دونوں چھوٹے حصوں کا حاصل ضرب 4623 ہو۔

.10 ایک حسابی تصاعد میں 37 ارکان ہیں۔ وسط کے تین ارکان کی جمع 225 ہے اور آخر کے تین ارکان کی جمع 429 ہے۔ وہ حسابی تصاعد لکھیے۔

.11★ ’’ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن a ہے۔ دوسرا رکن b ہے اور تیسرا رکن c ہے تو اس حسابی تصاعد کے ان تینوں ارکان کی جمع $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ ہے۔‘‘ ثابت کیجیے۔

.12★ اگر کسی حسابی تصاعد (A.P.) میں پہلے p ارکان کی جمع اور پہلے q ارکان کی جمع مساوی ہو تو دِکھائیے کہ پہلے $(p+q)$ ارکان کی جمع صفر ہوتی ہے۔ $(p \neq q)$

.13★ اگر ایک حسابی تصاعد کے m ویں رکن کا m گنا اور n ویں رکن کا n گنا مساوی ہوں تب دِکھائیے کہ حسابی تصاعد کا $(m+n)$ واں رکن صفر ہے۔ $(m \neq n)$

.14 تصدیق کیجیے کہ 1000 روپے کی رقم %10 مفرد سود کی شرح سے سرمایہ کاری کی گئی ہو تو ہر سال کے آخر میں حاصل ہونے والی رقم حسابی تصاعد میں ہوگی۔ اگر وہ حسابی تصاعد ہو تو 20 سال بعد حاصل ہونے والا سود معلوم کیجیے۔ اس کے لیے درج ذیل عملی کام کیجیے۔

مفرد سود $= \frac{P \times R \times N}{100}$

1 سال بعد حاصل ہونے والا سود $= \frac{1000 \times 10 \times 1}{100} = \square$

2 سال بعد حاصل ہونے والا سود $= \frac{1000 \times 10 \times 2}{100} = \square$

3 سال بعد حاصل ہونے والا سود $= \frac{\square \times \square \times \square}{100} = 300$

اس طرح 4، 5، 6 سال بعد حاصل ہونے والا سود بالترتیب 400، □، □ ہوگا۔

ان اعداد کی بنا پر $a = \square$ اور $d = \square$

20 سال بعد حاصل ہونے والا سود،

$t_n = a + (n-1)d$

$t_{20} = \square + (20-1)\square$

$t_{20} = \square$

$\therefore$ 20 سال بعد حاصل ہونے والا سود $= \square$

NI9F5P