2 مربعی مساواتیں (Quadratic Equations)

آئیے، سیکھیں۔

- مربعی مساوات : تعارف
- مربعی مساوات حل کرنے کے طریقے
- مربعی مساوات کے جذروں کی نوعیت
- جذر اور ضریب میں تعلق
- مربعی مساوات کا اطلاق

آئیے، ذرا یاد کریں

عزیز طلبہ! نویں جماعت میں ہم نے کثیر رکنی کا مطالعہ کیا ہے۔اس میں کثیر رکنی کے درجے کی بنیاد پر ہونے والی مختلف قسموں کا ہم نے مطالعہ کیا ہے۔ایک متغیر کی جس کثیر رکنی کا درجہ ایک ہوتا ہے اسے خطی کثیر رکنی اور جس کا درجہ دو ہو اسے مربعی کثیر رکنی کہتے ہیں۔

عملی کام : درج ذیل کثیر رکنیوں کو خطی کثیر رکنی اور مربعی کثیر رکنی میں جماعت بندی کیجیے۔

$5x + 9$, $x^2 + 3x - 5$, $3x - 7$, $3x^2 - 5x$, $5x^2$

خطی کثیر رکنی	مربعی کثیر رکنی

اب ہم مربعی کثیر رکنی کی قیمت 0 رکھ کر جو مساوات حاصل ہوتی ہے اس کا مطالعہ کریں گے۔ایسی مساوات کو مربعی مساوات کہتے ہیں۔ہم روزمرہ کئی مرتبہ ان مربعی مساواتوں کا استعمال کرتے ہیں۔

مثال: ریحان نے 200 مربع میٹر رقبے کا ایک مستطیلی زمین کا قطعہ ٔاراضی خریدا۔زمین کی لمبائی، چوڑائی سے 10 میٹر زیادہ ہے تو اس زمین کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

فرض کیجیے،قطعہ اراضی کی چوڑائی x میٹر ہے۔

$\therefore$ لمبائی $= (x + 10)$ میٹر

مستطیل نما قطعہ ٔاراضی کا رقبہ = لمبائی × چوڑائی

$\therefore \quad 200 = (x + 10) \times x$

$\therefore \quad 200 = x^2 + 10x$

یعنی، $x^2 + 10x = 200$

$\therefore \quad x^2 + 10x - 200 = 0$

اب مربعی مساوات $x^2 + 10x - 200 = 0$ کو حل کر کے ہم قطعۂ اراضی کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں گے۔
مربعی مساوات کس طرح حل کرنا ہے، اس کا ہم مطالعہ کریں گے۔

آ ئیے، ذرا یاد کریں۔

عملی کام : $x^2 + 3x - 5,\ 3x^2 - 5x,\ 5x^2$ ← اِن کثیر رکنیوں کو قوت نمائی صورت میں لکھ کر ان کے ارکان کے ضربیوں کا مشاہدہ کر کے خالی چوکون میں مناسب طریقے سے لکھیں۔

$x^2 + 3x - 5,\quad 3x^2 - 5x + 0,\quad 5x^2 + 0x + 0$

- ✦ x^2 کے ضریب بالترتیب $\boxed{1}$ ، $\boxed{3}$ اور $\boxed{5}$ ہیں یعنی 0 نہیں ہے۔
- ✦ x کے ضریب بالترتیب 3 ، $\boxed{}$ اور $\boxed{}$ ہیں۔
- ✦ مستقل رکن بالترتیب $\boxed{}$ ، $\boxed{}$ اور $\boxed{}$ ہیں۔

یہاں دوسرے اور تیسرے کثیر رکنی میں مستقل رکن صفر (0) ہے۔

آ ئیے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات کی معیاری صورت (Standard form of quadratic equation)

جس متغیر کے تمام قوت نما مکمل عدد ہوں اور متغیر کا قوت نما بڑے سے بڑا 2 ہو، اس مساوات کو مربعی مساوات کہتے ہیں۔ اُسے عمومی صورت یا عام صورت میں $ax^2 + bx + c = 0$ اس طرح لکھتے ہیں۔ اس میں a ، b اور c حقیقی اعداد ہیں اور a غیر صفر عدد ہے۔

$ax^2 + bx + c = 0$ ، اِس صورت میں مساوات کو مربعی مساوات کی عام صورت یا معیاری صورت کہتے ہیں۔

عملی کام : درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

مربعی مساوات	معیاری صورت	a	b	c
$x^2 - 4 = 0$	$x^2 + 0x - 4 = 0$	1	0	-4
$y^2 = 2y - 7$	. . . .	. . .	. . .	. . .
$x^2 + 2x = 0$	. . . .	. . .	. . .	. . .

حل کردہ مثالیں

مثال : درج ذیل میں کون سی مساواتیں مربعی مساواتیں ہیں، بتائیے۔

(1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ (2) $9y^2 + 5 = 0$

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ (4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

حل : (1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ اس میں ایک ہی متغیر ہے اور متغیر کا سب سے بڑا قوت نما 2 ہے اس لیے یہ مساوات مربعی مساوات ہے۔

(2) $9y^2 + 5 = 0$ ، اس میں $\boxed{\ }$ متغیر ہے، متغیر کا سب سے بڑا قوت نما $\boxed{\ }$ ہے اس لیے یہ مساوات مربعی مساوات $\boxed{\ }$ ۔

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ ، ایک ہی متغیر ہے اس میں متغیر کا سب سے بڑا قوت نما 2 نہیں ہے اس لیے یہ مساوات مربعی مساوات $\boxed{\ }$ ہے۔

(4)

$$(l + 2)(l - 5) = 0$$

$$\therefore \quad l(l - 5) + 2(l - 5) = 0$$

$$\therefore \quad l^2 - 5l + 2l - 10 = 0$$

$$\therefore \quad l^2 - 3l - 10 = 0$$

(اس میں صرف $\boxed{\ }$ ایک ہی متغیر ہے اور متغیر کا سب سے بڑا قوت نما $\boxed{\ }$ ہے) ...

اس لیے دی ہوئی مساوات مربعی مساوات $\boxed{\ }$ ۔

آیئے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات کی جذریں (حل) (Roots of quadratic equation)

ہم نے سابقہ جماعت میں دیکھا ہے کہ x کی قیمت a رکھنے پر کثیر رکنی کی قیمت صفر آتی ہو تو $(x - a)$ اس کثیر رکنی کا جز ضربی ہوتا ہے، یعنی اگر $p(x)$ کثیر رکنی ہو اور $p(a) = 0$ ہو تو $(x - a)$ ، یہ $p(x)$ کا جز و ضربی ہوتا ہے۔ اس صورت میں کہتے ہیں کہ $p(x) = 0$ کا ایک حل a ہے یا $p(x) = 0$ کا ایک جذر a ہے۔

مثال:

کثیر رکنی $x^2 + 5x - 6$ میں $x = -6$ رکھنے پر،

$$x^2 + 5x - 6 = (-6)^2 + 5 \times (-6) - 6$$
$$= 36 - 30 - 6 = 0$$

اس لیے مساوات $x^2 + 5x - 6 = 0$ کا ایک حل $x = -6$ ہے۔

یعنی مساوات $x^2 + 5x - 6 = 0$ کا ایک جذر -6 ہے۔

کثیر رکنی $x^2 + 5x - 6$ میں $x = 2$ رکھنے پر،

$$x^2 + 5x - 6 = 2^2 + 5 \times 2 - 6$$
$$= 4 + 10 - 6$$
$$= 8 \neq 0$$

اس لیے مساوات $x^2 + 5x - 6 = 0$ کا حل $x = 2$ نہیں ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال: مساوات $2x^2 - 7x + 6 = 0$ کے (i) $x = \frac{3}{2}$ اور (ii) $x = -2$ جذر ہیں یا نہیں، طے کیجیے۔

حل: (i) کثیر رکنی $2x^2 - 7x + 6$ میں $x = \frac{3}{2}$ رکھنے پر کثیر رکنی کی قیمت معلوم کریں۔

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{3}{2}\right) + 6$$

$$= 2 \times \frac{9}{4} - \frac{21}{2} + 6$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{21}{2} + \frac{12}{2} = 0$$

اس لیے دی ہوئی مساوات کا ایک حل $x = \frac{3}{2}$ ہے۔

(ii) کثیر رکنی $2x^2 - 7x + 6$ میں $x = -2$ قیمت رکھ کر کثیر رکنی کی قیمت معلوم کریں گے۔

$$2x^2 - 7x + 6 = 2(-2)^2 - 7(-2) + 6$$

$$= 2 \times 4 + 14 + 6$$

$$= 28 \neq 0$$

اس لیے $x = -2$ مساوات $2x^2 - 7x + 6$ کا حل نہیں ہے۔

عملی کام: اگر $x = 5$، مساوات $kx^2 - 14x - 5 = 0$ کا ایک جذر ہو تو k کی قیمت معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔

حل: $kx^2 - 14x - 5 = 0$ اس مساوات کا ایک جذر $\square$ ہے۔ اس لیے $x = \square$ ، اوپر کی مربعی مساوات میں رکھنے پر،

$$\therefore \quad k\square^2 - 14\square - 5 = 0$$

$$\therefore \quad 25k - 70 - 5 = 0$$

$$\therefore \quad 25k - \square = 0$$

$$\therefore \quad 25k = \square$$

$$\therefore \quad k = \frac{\square}{\square} = 3$$

اسے ذہن میں رکھیں۔

(1) مربعی مساوات کی معیاری صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ہے۔ اس میں a، b اور c حقیقی اعداد ہیں اور a غیر صفر عدد ہے۔

(2) متغیر کی جن قیمتوں سے مربعی مساوات کے دونوں بازو (طرفین) مساوی ہوتے ہیں۔ (یعنی مربعی مساوات مطمئن ہوتی ہے) ان قیمتوں کو مربعی مساوات کے حل یا مربعی مساوات کے جذر کہتے ہیں۔

مشقی سیٹ 2.1

.1 کوئی دو مربعی مساواتیں لکھیے۔

.2 درج ذیل مساواتوں میں سے مربعی مساواتیں پہچانیے۔

(1) $x^2 + 5x - 2 = 0$ (2) $y^2 = 5y - 10$ (3) $y^2 + \frac{1}{y} = 2$

(4) $x + \frac{1}{x} = -2$ (5) $(m + 2)(m - 5) = 0$ (6) $m^3 + 3m^2 - 2 = 3m^3$

.3 درج ذیل مساواتیں $ax^2 + bx + c = 0$ کی صورت میں لکھیے۔ ہر ایک کے لیے a، b اور c کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $2y = 10 - y^2$ (2) $(x - 1)^2 = 2x + 3$ (3) $x^2 + 5x = -(3 - x)$

(4) $3m^2 = 2m^2 - 9$ (5) $p(3 + 6p) = -5$ (6) $x^2 - 9 = 13$

.4 مربعی مساواتوں کے مقابل دی ہوئی متغیر کی قیمت، ان مساواتوں کے جذر ہیں یا نہیں، طے کیجیے۔

(1) $x^2 + 4x - 5 = 0,\ x = 1, -1$ (2) $2m^2 - 5m = 0,\ m = 2, \frac{5}{2}$

.5 اگر مربعی مساوات $kx^2 - 10x + 3 = 0$ کا ایک جذر $x = 3$ ہو تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

.6 اگر مربعی مساوات $5m^2 + 2m + k = 0$ کا ایک جذر $\frac{-7}{5}$ ہو تو k کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ذیل کی سرگرمی (عملی کام) مکمل کیجیے۔

حل: مربعی مساوات $5m^2 + 2m + k = 0$ کا ایک جذر $\boxed{\quad}$ ہے۔

$\therefore\ m = \boxed{\quad}$ . . . (اوپر کی مساوات میں رکھنے پر)

$\therefore\ 5 \times \boxed{\quad}^2 + 2 \times \boxed{\quad} + k = 0$

$\therefore\ \boxed{\quad} + \boxed{\quad} + k = 0$

$\therefore\ \boxed{\quad} + k = 0$

$\therefore\ k = \boxed{\quad}$

آئیے، ذرا یاد کریں۔

ہم نے گزشتہ سال کثیر رکنی باب میں $x^2 - 4x - 5$، $2m^2 - 5m$، $a^2 - 25$ اس قسم کے مربعی کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے طریقے کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ درج ذیل عملی کام کے ذریعے اس کا اعادہ کرتے ہیں۔

عملی کام: درج ذیل مربعی کثیر رکنی کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(1) $x^2 - 4x - 5$

$= \underline{x^2 - 5x} + \underline{1x - 5}$

$= x(\ .\ .\ .\ .\ ) + 1(\ .\ .\ .\ .\ )$

$= (\ .\ .\ .\ .\ )\ (\ .\ .\ .\ .\ )$

(2) $2m^2 - 5m$

$= .\ .\ .\ \ .\ .\ .$

(3) $a^2 - 25$

$= a^2 - 5^2$

$= (\ .\ .\ .\ .\ )\ (\ .\ .\ .\ .\ )$

آیئے، سمجھ لیں۔

اجزائے ضربی کے طریقے سے جذر معلوم کرنا (Solution of a quadratic equation by factorisation)

ہم نے متغیر کی مختلف قیمتیں لے کر مربعی مساوات کی جذریں معلوم کر چکے ہیں لیکن اس طریقے میں کافی وقت درکار ہوتا ہے۔ اس لیے ہم اس حصے میں مربعی مساواتوں کے جذر، اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کرنے کے طریقے کا مطالعہ کریں گے۔

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)\ (x + 1)$$

یہاں کثیر رکنی $x^2 - 4x - 5$ کے دو خطی جزو ضربی $(x - 5)$ اور $(x + 1)$ ہیں اس لیے $x^2 - 4x - 5$ اس مربعی کثیر رکنی سے حاصل ہونے والے مربعی مساوات $x^2 - 4x - 5 = 0$ کو درج ذیل کے مطابق لکھ سکتے ہیں۔

$$(x - 5)\ (x + 1) = 0$$

اگر دو اعداد کا حاصل ضرب صفر ہو تو اُن دو اعداد میں سے کم از کم ایک عدد صفر ہوتا ہے۔

$\therefore\ x - 5 = 0$ یا $x + 1 = 0$

$\therefore\ x = 5$ یا $x = -1$

اس لیے دیے ہوئے مربعی مساوات کے جذر 5 اور -1 ہیں۔

اس مثال کو حل کرتے وقت ہم نے پہلے مربعی کثیر رکنی کے دو خطی جزو ضربی حاصل کیے۔ اس طریقے کو مربعی مساوات حل کرنے کا اجزائے ضربی کا طریقہ کہتے ہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال: ذیل کی مربعی مساوات اجزائے ضربی کے طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$ (2) $3x^2 - x - 10 = 0$

(3) $3y^2 = 15y$ (4) $x^2 = 3$ (5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

حل:

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

$\therefore\ \underline{m^2 - 13m} - \underline{1m + 13} = 0$

$\therefore\ m(m - 13) - 1(m - 13) = 0$

$\therefore\ (m - 13)(m - 1) = 0$

$\therefore\ m - 13 = 0$ یا $m - 1 = 0$

$\therefore\ m = 13$ یا $m = 1$

$\therefore$ دی ہوئی مربعی مساوات کے جذر 13 اور 1 ہیں۔

(2) $3x^2 - x - 10 = 0$

$\therefore\ \underline{3x^2 - 6x} + \underline{5x - 10} = 0$

$\therefore\ 3x(x - 2) + 5(x - 2) = 0$

$\therefore\ (3x + 5)(x - 2) = 0$

$\therefore\ 3x + 5 = 0$ یا $x - 2 = 0$

$\therefore\ x = -\frac{5}{3}$ یا $x = 2$

$\therefore$ دی ہوئی مربعی مساوات کے جذر $-\frac{5}{3}$ اور 2 ہیں۔

(3) $3y^2 = 15y$

$\therefore\ 3y^2 - 15y = 0$

$\therefore\ 3y(y - 5) = 0$

$\therefore\ 3y = 0$ یا $y - 5 = 0$

$\therefore\ y = 0$ یا $y = 5$

اس لیے مربعی مساوات کے جذر 0 اور 5 ہیں۔

(4) $x^2 = 3$

$\therefore\ x^2 - 3 = 0$

$\therefore\ x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

$\therefore\ (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ x + \sqrt{3} = 0$ یا $x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ x = -\sqrt{3}$ یا $x = \sqrt{3}$

اس لیے دی ہوئی مربعی مساوات کے جذر $-\sqrt{3}$ اور $\sqrt{3}$ ہیں۔

(5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

$\therefore\ 6\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ 6\sqrt{3}x^2 + 9x - 2x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ 3\sqrt{3}x(2x + \sqrt{3}) - 1(2x + \sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ (2x + \sqrt{3})(3\sqrt{3}x - 1) = 0$

$\therefore\ 2x + \sqrt{3} = 0$ یا $3\sqrt{3}x - 1 = 0$

$\therefore\ 2x = -\sqrt{3}$ یا $3\sqrt{3}x = 1$

$\therefore\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ یا $x = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

$6\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) = -18$

-18

$9 \quad -2$

$9 = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$\therefore$ مربعی مساوات کے جذر $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ اور $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ ہیں۔

مشقی سیٹ 2.2

1. مندرجہ ذیل مربعی مساواتیں اجزائے ضربی کے طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $x^2 - 15x + 54 = 0$ (2) $x^2 + x - 20 = 0$ (3) $2y^2 + 27y + 13 = 0$

(4) $5m^2 = 22m + 15$ (5) $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$ (6) $6x - \frac{2}{x} = 1$

(7) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ اس مربعی مساوات کو اجزائے ضربی کے طریقے سے حل کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام کیجیے۔

حل (7): $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore\ \sqrt{2}x^2 + \boxed{} + \boxed{} + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore\ x(\ldots\ldots) + \sqrt{2}(\ldots\ldots) = 0$

$\therefore\ (\ldots\ldots)(x + \sqrt{2}) = 0$

$\therefore \quad (\,.\,.\,.\,.\,.\,) = 0$ یا $(x + \sqrt{2}\,) = 0$

$\therefore \quad x = \boxed{}$ یا $x = -\sqrt{2}$

$\therefore$ مربعی مساوات کے جذر $\boxed{}$ اور $-\sqrt{2}$ ہیں۔

(8)★ $3x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 2 = 0$ (9) $2m\,(m - 24) = 50$

(10) $25m^2 = 9$ (11) $7m^2 = 21m$ (12) $m^2 - 11 = 0$

آیئے، سمجھ لیں۔

کامل مربع کے طریقے سے مربعی مساوات حل کرنا
(Solution of a quadratic equation by completing the square)

استاد : $x^2 + 10\,x + 2 = 0$ ، یہ مربعی مساوات ہے یا نہیں؟

فرمان : جی سر، کیوں کہ $ax^2 + bx + c = 0$ کی صورت میں ہے۔ یہاں x متغیر کا سب سے بڑا قوت نما 2 ہے اور a کی قیمت صفر نہیں ہے۔

استاد : کیا یہ مساوات آپ حل کر سکتے ہیں؟

ورشا : نہیں سر، کیوں کہ عدد 2 کے ایسے دو اجزائے ضربی نہیں بتا سکتے جن کا مجموعہ 10 ہو۔

استاد : اسی لیے ایسی مثالوں کو حل کرنے کے لیے دوسرا طریقہ استعمال کرنا ہوگا۔ وہ طریقہ سمجھنے کی کوشش کیجیے۔

$x^2 + 10x$ اس فقرہ میں مناسب رکن جمع کر کے ایک کامل مربعی عبارت حاصل کریں گے۔

اگر $x^2 + 10\,x + k = (x + a)^2$

ہو تو $x^2 + 10\,x + k = x^2 + 2ax + a^2$

اس لیے ضریبوں کا موازنہ کرنے پر $10 = 2a$ اور $k = a^2$

$\therefore \; a = 5 \;, \quad \therefore \; k = a^2 = (5)^2 = 25$

اب, $x^2 + 10\,x + 2 = (x + 5)^2 - 25 + 2 = (x + 5)^2 - 23$

مربعی مساوات $x^2 + 10\,x + 2 = 0$ کیا اب آپ حل کر سکتے ہیں؟

آفرین : جی سر، مساوات کے بائیں جانب دو مربعوں کے فرق کی صورت حاصل ہونے کی وجہ سے اس کے اجزائے ضربی معلوم کر سکتے ہیں۔

$$(x + 5)^2 - (\sqrt{23}\,)^2 = 0$$

$$\therefore \; (x + 5 + \sqrt{23}\,)(x + 5 - \sqrt{23}\,) = 0$$

$\therefore \quad x + 5 + \sqrt{23} = 0$ یا $x + 5 - \sqrt{23} = 0$

$\therefore \quad x = -5 - \sqrt{23}$ یا $x = -5 + \sqrt{23}$

حمید : سر، حل معلوم کرنے کا دوسرا طریقہ میری سمجھ میں آ گیا۔

$$(x + 5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$$

$$\therefore \quad (x + 5)^2 = (\sqrt{23})^2$$

$$\therefore \quad x + 5 = \sqrt{23} \quad \text{یا} \quad x + 5 = -\sqrt{23}$$

$$\therefore \quad x = -5 + \sqrt{23} \quad \text{یا} \quad x = -5 - \sqrt{23}$$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) حل کیجیے: $5x^2 - 4x - 3 = 0$

حل: مساوات کے مربعی عبارت کی تحویل دو مربعوں کے فرق کی صورت میں لانے کے لیے x^2 کا ضریب 1 کرنا سہولت بخش ہوگا۔ اس لیے دی ہوئی مساوات کو 5 سے تقسیم کرنے پر،

$$x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$$

اب اگر $x^2 - \frac{4}{5}x + k = (x - a)^2$ ہو تو $x^2 - \frac{4}{5}x + k = x^2 - 2ax + a^2$

$x^2 - \frac{4}{5}x$ کا موازنہ $x^2 - 2ax$ سے کرنے پر،

$$\therefore \quad -2ax = -\frac{4}{5}x, \quad \therefore a = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \quad k = a^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

اب، $x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$

$$\therefore \quad x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{4}{25} - \frac{3}{5} = 0$$

$$\therefore \quad \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{5}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{19}{25}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{19}{25}\right)$$

$$\therefore \quad x - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{یا} \quad x - \frac{2}{5} = -\frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{یا} \quad x = \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{2 + \sqrt{19}}{5} \quad \text{یا} \quad x = \frac{2 - \sqrt{19}}{5}$$

$\therefore$ مربعی مساوات کے جذر $\frac{2 + \sqrt{19}}{5}$ اور $\frac{2 - \sqrt{19}}{5}$ ہیں۔

مساوات $x^2 + bx + c = 0$ کی صورت ہو تو

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

اس صورت میں

یعنی، $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$

کی صورت میں لکھتے ہیں۔

مثال (2) حل کیجیے : $x^2 + 8x - 48 = 0$

طریقہ (I) : کامل مربع کا طریقہ

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$\therefore \quad x^2 + 8x + 16 - 16 - 48 = 0$$

$$\therefore \quad (x + 4)^2 - 64 = 0$$

$$\therefore \quad (x + 4)^2 = 64$$

$\therefore \quad x + 4 = 8$ یا $x + 4 = -8$

$\therefore \quad x = 4$ یا $x = -12$

اس لیے مربعی مساوات کے جذر 4 یا -12 ہے۔

طریقہ (II) : اجزائے ضربی کا طریقہ

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$\therefore \quad x^2 + 12x - 4x - 48 = 0$$

$$\therefore \quad x(x + 12) - 4(x + 12) = 0$$

$$\therefore \quad (x + 12)(x - 4) = 0$$

$\therefore \quad x + 12 = 0$ یا $x - 4 = 0$

$\therefore \quad x = -12$ یا $x = 4$

مشقی سیٹ 2.3

مندرجہ ذیل مربعی مساوات کامل مربع کے طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $x^2 + x - 20 = 0$ (2) $x^2 + 2x - 5 = 0$ (3) $m^2 - 5m = -3$

(4) $9y^2 - 12y + 2 = 0$ (5) $2y^2 + 9y + 10 = 0$ (6) $5x^2 = 4x + 7$

آئیے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات حل کرنے کا ضابطہ (Formula for solving a quadratic equation)

عبارت $ax^2 + bx + c$ کو a سے تقسیم کرنے پر $(\because a \neq 0)$ عبارت $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ حاصل ہوتی ہے۔

عبارت $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ دو مربعوں کے فرق کی صورت میں لکھ کر مساوات $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

یعنی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے عام حل یا جذر حاصل کرسکتے ہیں۔

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \ldots \text{(I)}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \ldots\ldots$$ (طرفین کو a تقسیم کرنے پر)

$$\therefore \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0 \quad , \quad \therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\therefore \quad x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad \text{یا} \quad x+\frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore \quad x = -\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{یا} \quad x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

اس کو مختصر طور پر $x = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ، اس طرح لکھتے ہیں۔

اور اسے α (الفا) اور β (بیٹا) حروف سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\therefore \ \alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad , \quad \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I})$$

مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ میں a ، b ، c کی قیمتیں عبارت $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ کی آسان صورت میں دیں تو مساوات کا حل حاصل ہوتا ہے۔

اس لیے $x = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ کو مربعی مساوات حل کرنے کا ضابطہ کہتے ہیں۔

مربعی مساوات کے دو حل میں سے کوئی بھی جذر کسی بھی علامت سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

بیان I کے بجائے درج ذیل کو بھی تسلیم کر سکتے ہیں ۔

$$\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{اور} \quad \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

یہ بات یاد رکھیں کہ $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ہو تو $\alpha > \beta$ اور $\alpha = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ہو تو $\alpha < \beta$

حل کردہ مثالیں

ضابطے کا استعمال کر کے مندرجہ ذیل مساواتیں حل کیجیے۔

مثال (1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

حل : مساوات $m^2 - 14m + 13 = 0$

کا عام مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ سے

موازنہ کرنے پر، $a = 1,\ b = -14,\ c = 13$

$$\therefore \ b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4\times 1\times 13$$

$$= 196 - 52$$

$$= 144$$

$$m = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-14)\pm\sqrt{144}}{2\times 1}$$

$$= \frac{14\pm 12}{2}$$

$$\therefore \ m = \frac{14+12}{2} \quad \text{یا} \quad m = \frac{14-12}{2}$$

$$\therefore \ m = \frac{26}{2} \quad \text{یا} \quad m = \frac{2}{2}$$

$$\therefore \ m = 13 \quad \text{یا} \quad m = 1$$

$\therefore$ مربعی مساوات کے جذر 13 یا 1 ہے۔

مثال (2) $x^2 + 10x + 2 = 0$

حل: مساوات $x^2 + 10x + 2 = 0$ کا

$ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے پر،

$a = 1,\ b = 10,\ c = 2,$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = (10)^2 - 4 \times 1 \times 2$$
$$= 100 - 8$$
$$= 92$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2 \times 1}$$
$$= \frac{-10 \pm \sqrt{4 \times 23}}{2}$$
$$= \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2}$$
$$= \frac{2(-5 \pm \sqrt{23})}{2}$$

$$\therefore\ x = -5 \pm \sqrt{23}$$

$\therefore\ x = -5 + \sqrt{23}$ یا $x = -5 - \sqrt{23}$

$\therefore$ مربعی مساوات کے جذر $-5 + \sqrt{23}$ یا $-5 - \sqrt{23}$ ہے۔

مثال (3) $x^2 - 2x - 3 = 0$

حل: دی ہوئی مساوات کا عام مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے پر

$a = 1,\ b = -2,\ c = -3$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$$

$\therefore\ x = \dfrac{-(-2) + \sqrt{16}}{2}$ یا $x = \dfrac{-(-2) - \sqrt{16}}{2}$

$= \dfrac{2 + 4}{2}$ یا $= \dfrac{2 - 4}{2}$

$= 3$ یا $= -1$

اس لیے مربعی مساوات کا جذر 3 یا -1 ہے۔

مزید معلومات کے لیے

$x^2 - 2x - 3 = 0$ یہی مربعی مساوات ذیل میں ترسیم کے ذریعے حل کی گئی ہے۔ اسے سمجھ لیں۔

$x^2 - 2x - 3 = 0$ یعنی $x^2 = 2x + 3$

x کی جن قیمتوں سے مساوات $x^2 = 2x + 3$ مطمئن ہوتی ہے وہی قیمتیں اس مساوات کے حل ہوں گے۔

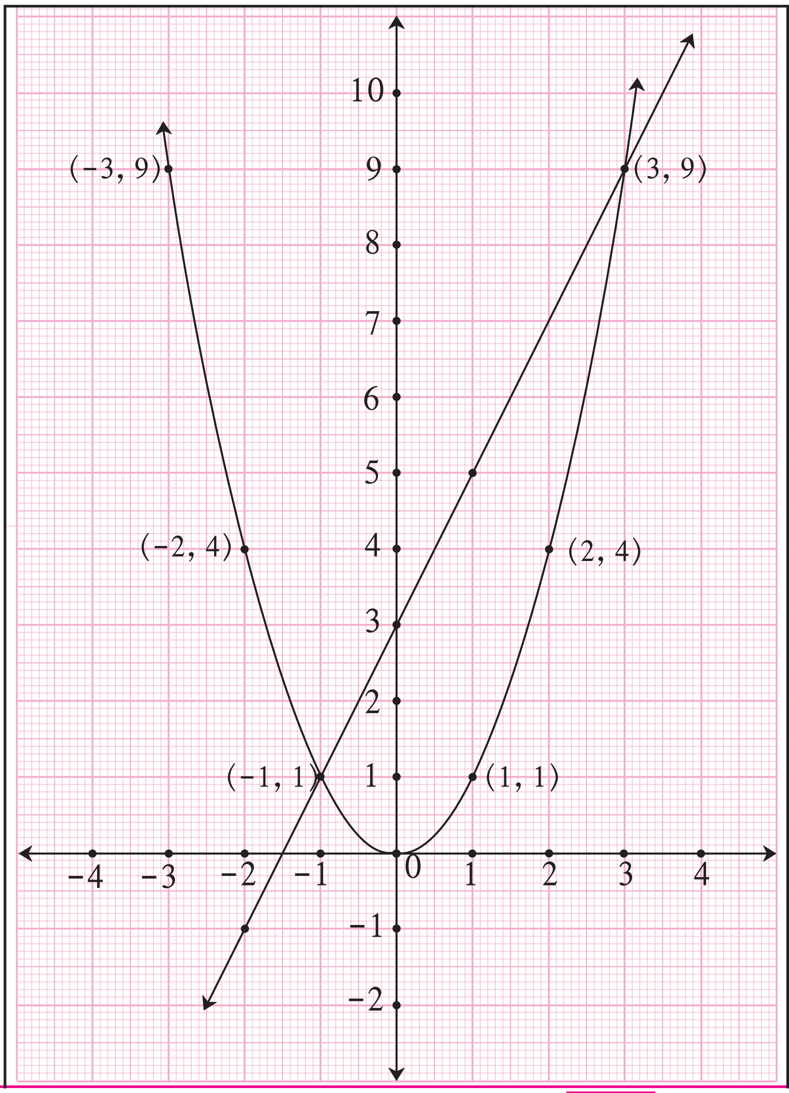
فرض کیجیے $y = x^2 = 2x + 3$ ، $y = x^2$ اور $y = 2x + 3$ ان مساوات کی ترسیم بنائیں گے۔

$y = x^2$

x	3	2	1	0	−1	−2	−3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y = 2x + 3$

x	−1	0	1	−2
y	1	3	5	−1



یہ ترسیمات ایک دوسرے کو $(-1, 1)$ اور $(3, 9)$ ان نقاط پر قطع کرتی ہیں۔

$\therefore$ مساوات $x^2 = 2x + 3$

یعنی،

$x^2 - 2x - 3 = 0$ کا حل $x = -1$ یا $x = 3$ ہے۔

بازو کی شکل میں مساوات $y = x^2$ اور $y = 2x + 3$ کی ترسیمات کھینچی گئی ہیں۔ ان کے نقطہ تقاطع سے مساوات $x^2 = 2x + 3$ یعنی، $x^2 - 2x - 3 = 0$ کے حل کس طرح حاصل ہوتے ہیں یہ سمجھنے کی کوشش کریں۔

مثال (4) $25x^2 + 30x + 9 = 0$

حل : مساوات $25x^2 + 30x + 9 = 0$ کا $ax^2 + bx + c = 0$ سے

موازنہ کرنے پر،

$a = 25,\ b = 30,\ c = 9$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (30)^2 - 4 \times 25 \times 9$

$= 900 - 900 \quad = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-30 \pm \sqrt{0}}{2 \times 25}$$

$\therefore\ x = \frac{-30+0}{50}$ یا $x = \frac{-30-0}{50}$

$\therefore\ x = -\frac{30}{50}$ یا $x = -\frac{30}{50}$

$\therefore\ x = -\frac{3}{5}$ یا $x = -\frac{3}{5}$

دھیان میں رکھیں کہ مساوات

$25x^2 + 30x + 9 = 0$ کے دونوں جذر مساوی ہیں۔

اِسی طرح $25x^2 + 30x + 9 = 0$

یعنی $(5x + 3)^2 = 0$ اسے دھیان میں رکھیں۔

مثال (5) $x^2 + x + 5 = 0$

حل : مساوات $x^2 + x + 5 = 0$ کا

$ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے پر،

$a = 1,\ b = 1,\ c = 5$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 5$

$= 1 - 20$

$= -19$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

لیکن $\sqrt{-19}$ یہ حقیقی عدد نہیں ہے اس لیے دی ہوئی مربعی مساوات کے جذر حقیقی عدد نہیں ہیں۔

عملی کام : مربعی مساوات $2x^2 + 13x + 15 = 0$ کو اجزائے ضربی کے طریقے سے، کامل مربع کے طریقے اور مربع کے ضابطے کی مدد سے حل کیجیے۔ جوابات ایک جیسے حاصل ہوتے ہیں، اس بات کی تصدیق کیجیے۔

مشقی سیٹ 2.4

.1 مندرجہ ذیل مربعی مساواتوں کا معیاری صورت سے موازنہ کر کے a ، b ، c کی قیمتیں لکھیے۔

(1) $x^2 - 7x + 5 = 0$ (2) $2m^2 = 5m - 5$ (3) $y^2 = 7y$

.2 مندرجہ ذیل مربعی مساواتوں کو ضابطے کا استعمال کر کے حل کیجیے۔

(1) $x^2 + 6x + 5 = 0$ (2) $x^2 - 3x - 2 = 0$ (3) $3m^2 + 2m - 7 = 0$

(4) $5m^2 - 4m - 2 = 0$ (5) $y^2 + \frac{1}{3}y = 2$ (6) $5x^2 + 13x + 8 = 0$

.3 مربعی مساوات $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ کو ضابطے کا استعمال کرکے ذیل میں دیے ہوئے فلو چارٹ میں دی ہوئی معلومات کے مطابق حل کیجیے۔

حل:

مربعی مساوات $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ کا عام مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرکے a, b, c کی قیمتیں معلوم کیجیے۔ ←	$b^2 - 4ac$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ ←	مربعی مساوات حل کرنے کا ضابطہ لکھیے۔ ←	ضابطے میں قیمت لکھ کر حل معلوم کیجیے۔

آیئے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات کے جذروں کی نوعیت (Nature of roots of quadratic equation)

مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ہوتے ہیں، اس کا ہم مطالعہ کر چکے ہیں۔

(1) اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہو تو $x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$ ،

اس لیے $x = \frac{-b+0}{2a}$ یا $x = \frac{-b-0}{2a}$ یعنی، $x = \frac{-b}{2a}$ یا $x = \frac{-b}{2a}$

$\therefore$ مربعی مساوات کے جذر حقیقی اور مساوی ہوتے ہیں۔

(2) اگر $b^2 - 4ac > 0$ ہو تو $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

یعنی $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ اور $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore$ مربعی مساوات کے جذر حقیقی اور غیر مساوی ہوتے ہیں۔

(3) اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہو تو $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ حقیقی اعداد نہیں ہوتے۔ یعنی یہاں مربعی مساوات کے جذر حقیقی نہیں ہوتے ہیں۔

مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذروں کی نوعیت $b^2 - 4ac$ کی قیمت سے ظاہر ہوتی ہے اس لیے $b^2 - 4ac$ کو مربعی مساوات کا ممیّز (discrimant) کہتے ہیں۔ اسے Δ (ڈیلٹا) علامت سے ظاہر کرتے ہیں۔ (Δ لاطینی حرف ہے۔)

عملی کام: ذیل میں دی ہوئی معلومات کی بنا پر خالی جگہ مکمل کیجیے۔

	ممیّز کی قیمت		جذروں کی نوعیت
(1)	50	→	
(2)	-30	→	
(3)	0	→	

حل کردہ مثالیں

مثال (1) مربعی مساوات $x^2 + 10x - 7 = 0$ میں ممیّز کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: مربعی مساوات $x^2 + 10x - 7 = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر

$$a = 1,\ b = 10\ ,\ c = -7$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times (-7)$$

$$= 100 + 28$$

$$= 128$$

مثال (2) مندرجہ ذیل مساواتوں کے ممیّز سے جذروں کی نوعیت متعین کیجیے۔

(i) $2x^2 - 5x + 7 = 0$

حل: مساوات $2x^2 - 5x + 7 = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر،

$$a = 2,\ b = -5\ ,\ c = 7$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7$$

$$\therefore\ \Delta = 25 - 56$$

$$= -31$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac < 0$$

اس لیے مربعی مساوات کے جذر غیر حقیقی ہیں۔

(ii) $x^2 + 2x - 9 = 0$

حل: مساوات $x^2 + 2x - 9 = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر،

$$a = \boxed{},\ b = 2,\ c = \boxed{}$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times \boxed{} \times \boxed{}$$

$$\therefore\ \Delta = 4 + \boxed{}$$

$$= 40$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac > 0$$

اس لیے مربعی مساوات کے جذر حقیقی اور غیر مساوی ہیں۔

(iii) $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$

حل: مساوات $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر،

یہاں، $a = \sqrt{3},\ b = 2\sqrt{3}\ ,\ c = \sqrt{3}$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$= 4 \times 3 - 4 \times 3$$

$$= 12 - 12$$

$$= 0$$

اس لیے مربعی مساوات کے جذر حقیقی اور مساوی ہیں۔


آیئے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات کے جذروں اور ضریبوں کے درمیان تعلق
(Relation between the roots and coefficients of a quadratic equation)

اگر مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر α اور β ہوں تب،

$$\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= -\frac{2b}{2a}$$

$$\boxed{\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a}}$$

اسی طرح،

$$\alpha \times \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\times\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

$$\boxed{\therefore\ \alpha\beta = \frac{c}{a}}$$

عملی کام : ذیل میں دیے ہوئے چوکونوں میں مناسب عدد لکھیے۔

مربعی مساوات $10x^2 + 10x + 1 = 0$ کے لیے $\alpha + \beta = \boxed{}$ اور

$\alpha \times \beta = \boxed{}$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) α اور β، مربعی مساوات $2x^2 + 6x - 5 = 0$ کے جذر ہوں تب $\alpha + \beta$ اور $\alpha \times \beta$ معلوم کیجیے۔

حل: مربعی مساوات $2x^2 + 6x - 5 = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر،

$$a = 2,\ b = 6,\ c = -5$$

$$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$$

اور، $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$

مثال (2) مربعی مساوات $x^2 - 13x + k = 0$ کے جذروں کا فرق 7 ہے تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : مربعی مساوات $x^2 - 13x + k = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر ،

$$a = 1,\ b = -13\ ,\ c = k$$

فرض کیجیے، α اور β دی ہوئی مربعی مساوات کے جذر ہیں اور $\alpha > \beta$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-13)}{1} = 13 \quad \ldots (\mathrm{I})$$

لیکن , $\alpha - \beta = 7$ . . . (دیا ہوا ہے) . . . (II)

$2\alpha = 20$ . . . (مساوات (I) اور (II) کی جمع کرنے پر)

$$\therefore\ \alpha = 10$$

$\therefore\ 10 + \beta = 13$ . . . [(I) کی بنا پر]

$$\therefore\ \beta = 13 - 10$$

$$\therefore\ \beta = 3$$

لیکن ,

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$\therefore\ 10 \times 3 = \frac{k}{1}$$

$$\therefore\ k = 30$$

مثال (3) α اور β ، مربعی مساوات $x^2 + 5x - 1 = 0$ کے جذر ہوں تو

(i) $\alpha^3 + \beta^3$ اور (ii) $\alpha^2 + \beta^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : مساوات $x^2 + 5x - 1 = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر،

یہاں ، $a = 1,\ b = 5\ ,\ c = -1$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

(i)
$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$
$$= (-5)^3 - 3 \times (-1) \times (-5)$$
$$= -125 - 15$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = -140$$

(ii)
$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$
$$= (-5)^2 - 2 \times (-1)$$
$$= 25 + 2$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = 27$$

آئیے، سمجھ لیں۔

جذر دیے ہوئے ہوں تب مربعی مساوات حاصل کرنا
(To obtain a quadratic equation having given roots)

فرض کیجیے، x متغیر والی مربعی مساوات کے جذر α اور β ہوں تب

$\therefore \; x = \alpha$ یا $x = \beta$

$\therefore \; x - \alpha = 0$ یا $x - \beta = 0$

$$\therefore \quad (x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

$$\therefore \quad x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0$$

$$\therefore \quad x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

یعنی α اور β جذر کے مربعی مساوات کو ذیل کے ضابطے سے حاصل کر سکتے ہیں :

$x^2 \; - \;$ (جذروں کا مجموعہ) $x \; + \;$ جذروں کا حاصل ضرب $\; = \; 0$

عملی کام (I) : جذروں کا مجموعہ 10 اور جذروں کا حاصل ضرب 9 ہو تو حاصل ہونے والی مربعی مساوات لکھیے۔

$x^2 - \square\, x + \square = \square$ .... (مطلوبہ مربعی مساوات ہے)

عملی کام (II) : $\alpha = 2$ اور $\beta = 5$ جذر والی مربعی مساوات کون سی ہے؟

مربعی مساوات $x^2 - (\square + \square)\, x + \square \times \square = 0$ کو اس طرح لکھتے ہیں۔

یعنی ، $x^2 - \square\, x + \square = 0$

حل کردہ مثالیں

مثال : جس مربعی مساوات کے جذر -3 اور -7 ہوں ایسی مربعی مساوات بنائیے۔

حل : فرض کیجیے، $\alpha = -3$ اور $\beta = -7$

$$\therefore \; \alpha + \beta = (-3) + (-7) = -10 \;,\; \alpha \times \beta = (-3) \times (-7) = 21$$

$\therefore \; x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0$ ... (مربعی مساوات کا ضابطہ)

$$\therefore \quad x^2 - (-10)\, x + 21 = 0$$

$$\therefore \quad x^2 + 10x + 21 = 0$$

اسے ذہن میں رکھیں۔

(1) مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر α اور β ہوں، تب

$$\text{(i)}\ \alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{اور}, \quad \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\text{(ii)}\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{اور}, \quad \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

(2) مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذروں کی نوعیت الجبرائی عبارت $b^2 - 4ac$ کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے۔اس لیے اس عبارت کو ممیّز (discriminant) کہتے ہیں اور ممیّز کو Δ لاطینی حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

(3) اگر $\Delta = 0$ ہو تو، مربعی مساوات کے دونوں جذر مساوی اور حقیقی اعداد ہوتے ہیں۔

اگر $\Delta > 0$ ہو تو، مربعی مساوات کے جذر غیر مساوی اور حقیقی اعداد ہوتے ہیں۔

اگر $\Delta < 0$ ہو تو، مربعی مساوات کے جذر غیر حقیقی عدد ہوتے ہیں۔

(4) جن مربعی مساوات کے جذر α اور β ہوتے ہیں اس مربعی مساوات کو $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مشقی سیٹ 2.5

1. مندرجہ ذیل خالی چوکون مکمل کیجیے۔

(1) مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ ⟹ $b^2 - 4ac = 5$ → ……… ; $b^2 - 4ac = -5$ → ………

جذروں کی نوعیت

(2) جذروں کا مجموعہ $= -7$ ← مربعی مساوات . . . . → جذروں کا حاصل ضرب $= 5$

(3) اگر α اور β ذیل کے مربعی مساوات کے جذر ہوں تب،

$2x^2 - 4x - 3 = 0$ → $\alpha + \beta = ...$

$2x^2 - 4x - 3 = 0$ → $\alpha \times \beta = ...$

2. مندرجہ ذیل مربعی مساوات کے ممیّز کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $x^2 + 7x - 1 = 0$ (2) $2y^2 - 5y + 10 = 0$ (3) $\sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} = 0$

3. ممیّز کی قیمت کی بنا پر ذیل کے مربعی مساوات کے جذروں کی نوعیت طے کیجیے۔

(1) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (2) $2y^2 - 7y + 2 = 0$ (3) $m^2 + 2m + 9 = 0$

4. جس مربعی مساوات کے جذر ذیل کے مطابق ہوں ایسی مربعی مساوات بنائیے۔

(1) 0 اور 4 (2) 3 اور -10 (3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (4) $2-\sqrt{5}\ ,\ 2+\sqrt{5}$

★5. مربعی مساوات $x^2 - 4kx + k + 3 = 0$ کے جذروں کا مجموعہ، ان کے حاصلِ ضرب کے دگنا ہو تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

★6. اگر α اور β مربعی مساوات $y^2 - 2y - 7 = 0$ کے جذر ہوں تو ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\alpha^3 + \beta^3$

7. ذیل کے ہر مربعی مساوات کے جذر حقیقی اور مساوی ہوں تب k کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $3y^2 + ky + 12 = 0$ (2) $kx(x - 2) + 6 = 0$

آئیے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات کا اطلاق (Application of quadratic Equation)

روزمرہ زندگی میں مختلف مسائل کا حل معلوم کرنے کے لیے مربعی مساوات کارآمد ثابت ہوتی ہے۔اس کے بارے میں ہم یہاں مطالعہ کریں گے۔

مثال (1): تیوسا کے رَتنا کرراؤ کے کھیت میں پیاز کی مستطیلی چال کے قاعدے کی لمبائی، چوڑائی سے 7 میٹر زیادہ ہے اور وتر اُس کی لمبائی سے 1 میٹر زیادہ ہے تو اس پیاز کی چالی کے قاعدے کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے، پیاز کی مستطیلی چال کے قاعدے کی چوڑائی x میٹر ہے۔

$\therefore$ لمبائی $= (x + 7)$ میٹر، وتر $= x + 7 + 1 = (x + 8)$ میٹر

فیثاغورث کے مسئلے کی رو سے،

$$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$$

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$$

$$\therefore x^2 + 14x - 16x + 49 - 64 = 0$$

$$\therefore x^2 - 2x - 15 = 0$$

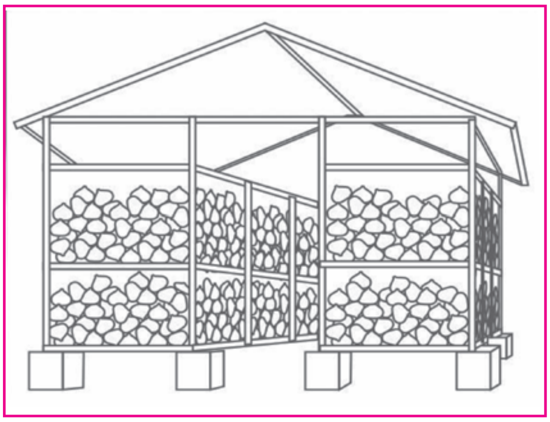
$$\therefore \underline{x^2 - 5x} + \underline{3x - 15} = 0$$

$$\therefore x(x - 5) + 3(x - 5) = 0$$

$$\therefore (x - 5)(x + 3) = 0$$

$\therefore x - 5 = 0$ یا $x + 3 = 0$

$\therefore x = 5$ یا $x = -3$



پیاز کی چال

لیکن چوڑائی منفی نہیں ہوتی۔(لمبائی ہمیشہ مثبت ہوتی ہے۔)

$\therefore x \neq -3$

$\therefore x = 5$ اور $x + 7 = 5 + 7 = 12$

$\therefore$ پیاز کی چال کے قاعدے کی لمبائی 12 میٹر اور چوڑائی 5 میٹر ہے۔

مثال (2) ایک ریل گاڑی مساوی رفتار سے 360 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتی ہے لیکن اس کی رفتار 5 کلومیٹر فی گھنٹا بڑھانے پر، اسے وہی فاصلہ طے کرنے کے لیے 48 منٹ کم درکار ہوتے ہیں تو ریل گاڑی کی ابتدائی رفتار معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے، ریل گاڑی کی ابتدائی رفتار x کلومیٹر فی گھنٹا ہے۔

اس لیے رفتار میں 5 کلومیٹر فی گھنٹا کا اضافہ کرنے پر رفتار $(x + 5)$ کلومیٹر فی گھنٹا ہو جائے گی۔

360 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے لیے ابتدا میں درکار وقت $= \dfrac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}} = \dfrac{360}{x}$ گھنٹہ

رفتار میں اضافہ کرنے پر وہی فاصلہ طے کرنے کے لیے درکار وقت $= \dfrac{360}{x+5}$

دی ہوئی شرط کے مطابق،

$$\frac{360}{x+5} = \frac{360}{x} - \frac{48}{60} \quad \ldots \left(\because 48 \text{ منٹ} = \frac{48}{60} \text{ گھنٹے}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = \frac{48}{60}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{48}{60 \times 360} \quad \ldots \text{(طرفین کو 360 سے تقسیم کرنے پر)}$$

$$\therefore \quad \frac{x+5-x}{x(x+5)} = \frac{4}{5 \times 360}$$

$$\therefore \quad \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{5 \times 90}$$

$$\therefore \quad \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{450}$$

$$\therefore \quad x^2 + 5x = 2250$$

$$\therefore \quad x^2 + 5x - 2250 = 0$$

$$\therefore \quad \underline{x^2 + 50x} - \underline{45x - 2250} = 0$$

$$-2250 \to +50,\ -45$$

$$\therefore \quad x(\underline{x + 50}) - 45(\underline{x + 50}) = 0$$

$$\therefore \quad (x + 50)(x - 45) = 0$$

$$\therefore \quad x + 50 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 45 = 0$$

$$\therefore \quad x = -50 \quad \text{یا} \quad x = 45$$

$$\therefore \quad x \neq -50 \quad \ldots \text{(لیکن رفتار منفی نہیں ہوتی۔)}$$

$$\therefore \quad x = 45$$

اس لیے ریل گاڑی کی ابتدائی رفتار 45 کلومیٹر فی گھنٹا ہے۔

مشقی سیٹ 2.6

.1 انعم کے 2 سال پہلے اور 3 سال بعد کی عمروں کا حاصل ضرب 84 ہے تو اس کی موجودہ عمر معلوم کیجیے۔

.2 دو متواتر جفت طبعی اعداد کے مربعوں کا مجموعہ 244 ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔

.3 شری مدھوسدن کے سنترے کے باغ میں اُفقی قطاروں میں درختوں کی تعداد، عمودی قطاروں میں درختوں کی تعداد سے 5 زیادہ ہے۔ اگر سنترے کے باغ میں سنترے کے کل 150 درخت ہوں تب، اُفقی اور عمودی قطار میں درختوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

درج ذیل فلو چارٹ (رواں خاکہ) کی مدد سے مثال حل کیجیے۔

فرض کیجیے، عمودی قطار میں درختوں کی تعداد x ← اُفقی قطار میں درخت = ... ← .... = کل درخت ← مربعی مساوات بنائیے۔ ← x کی قیمت معلوم کیجیے۔ ← عمودی قطار میں کتنے درخت ہیں؟ ← اُفقی قطار میں کتنے درخت ہیں؟

.4 ندیم، دانش سے 5 سال بڑا ہے۔ ان کی عمروں کے ضربی معکوس کا مجموعہ $\frac{1}{6}$ ہے۔ ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

.5 سفیان کو ریاضی کی پہلی آزمائش میں حاصل کردہ مارکس سے دوسرے ٹسٹ میں 10 مارکس زیادہ حاصل ہوئے۔ دوسری آزمائش کے مارکس کا 5 گنا، پہلی آزمائش کے مارکس کا مربع ہے تو اس کے پہلی آزمائش کے مارکس معلوم کیجیے۔

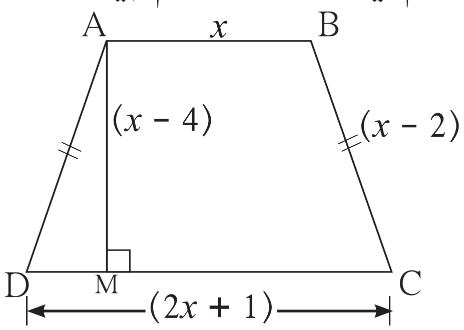
★.6 محترم قاسم صاحب مٹی کے برتن بنانے کی گھریلو صنعت کے مالک ہیں۔ وہ ہر روز مخصوص تعداد میں برتن تیار کرتے ہیں۔ ہر برتن کے بنانے کی لاگت، بنائے گئے برتن کی تعداد کے 10 گنا سے 40 روپے زیادہ ہوتی ہے۔ اگر ایک دن کی برتن بنانے کی لاگت 600 روپے ہو تو ہر برتن بنانے کی لاگت اور ایک دن میں بنائے گئے برتنوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

★.7 ایک کشتی کو دریا کے بہاؤ کے مخالف سمت 36 کلومیٹر جا کر واپس آنے کے لیے ایک چکر کو 8 گھنٹے لگتے ہیں۔ ساکن پانی میں کشتی کی رفتار 12 کلومیٹر فی گھنٹا ہو تو دریا کے بہاؤ کی رفتار معلوم کیجیے۔

★.8 ڈیوڈ کو ایک کام کرنے کے لیے شاہد سے 6 دن زیادہ لگتے ہیں۔ دونوں مل کر اس کام کو 4 دن میں مکمل کرتے ہیں تو اس کام کو مکمل کرنے کے لیے ہر ایک کو کتنے دن درکار ہوں گے؟

★.9 460 کو ایک طبعی عدد سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت، مقسوم الیہ کے 5 گنا سے 6 زیادہ حاصل ہوتا ہے اور باقی 1 رہتا ہے تو مقسوم علیہ اور خارج قسمت معلوم کیجیے۔

★.10 مقابل کی شکل میں ذوزنقہ $\square ABCD$ میں $AB \parallel CD$ اور رقبہ 33 مربع سم ہے تو شکل میں دی ہوئی معلومات کے مطابق چاروں اضلاع کی لمبائیاں معلوم کرنے کے لیے اگلے صفحے پر دیا ہوا عملی کام مکمل کیجیے۔



حل : $\square ABCD$ ایک ذوزنقہ ہے۔ $AB \parallel CD$

$A(\square ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \times \boxed{}$

$\therefore 33 = \frac{1}{2}(x + 2x + 1) \times \boxed{}$

$\therefore \boxed{} = (3x + 1) \times \boxed{}$

$\therefore 3x^2 + \boxed{} - \boxed{} = 0$

$\therefore 3x(\ldots\ldots) + 10(\ldots\ldots) = 0$

$\therefore (3x + 10)(\ldots\ldots) = 0$

$\therefore (3x + 10) = 0$ یا $\boxed{} = 0$

$\therefore x = -\frac{10}{3}$ یا $x = \boxed{}$

لیکن لمبائی منفی نہیں ہوتی۔

$\therefore x \neq -\frac{10}{3}$, $\therefore x = \boxed{}$

$AB = \ldots\ldots$, $CD = \ldots\ldots$, $AD = BC = \ldots\ldots$

مجموعۂ سوالات 2

.1 درج ذیل سوالوں کے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(1) درج ذیل میں سے کون سی مساواتیں مربعی ہیں؟

(A) $\frac{5}{x} - 3 = x^2$ (B) $x(x + 5) = 2$ (C) $n - 1 = 2n$ (D) $\frac{1}{x^2}(x + 2) = x$

(2) ذیل میں کون سی مساواتیں مربعی مساوات نہیں ہیں؟

(A) $x^2 + 4x = 11 + x^2$ (B) $x^2 = 4x$ (C) $5x^2 = 90$ (D) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(3) مربعی مساوات $x^2 + kx + k = 0$ کے جذر حقیقی اور مساوی ہوں تو k کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہوگی؟

(A) 0 (B) 4 (C) 0 یا 4 (D) 2

(4) مساوات $\sqrt{2}x^2 - 5x + \sqrt{2} = 0$ کے لیے ممیّز کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہوگی؟

(A) -5 (B) 17 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2} - 5$

(5) ذیل میں سے کس مربعی مساوات کے جذر 3 اور 5 ہیں؟

(A) $x^2 - 15x + 8 = 0$ (B) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(C) $x^2 + 3x + 5 = 0$ (D) $x^2 + 8x - 15 = 0$

(6) درج ذیل میں کس مربعی مساوات کے جذروں کا مجموعہ -5 ہے؟

(A) $3x^2 - 15x + 3 = 0$ (B) $x^2 - 5x + 3 = 0$

(C) $x^2 + 3x - 5 = 0$ (D) $3x^2 + 15x + 3 = 0$

(7) مربعی مساوات $\sqrt{5}m^2 - \sqrt{5}m + \sqrt{5} = 0$ کے لیے درج ذیل میں سے کون سا بیان درست ہوگا؟

(A) حقیقی اور غیر مساوی جذر (B) حقیقی اور مساوی جذر

(C) جذر غیر حقیقی عدد ہیں (D) تین جذر ہیں

(8) مربعی مساوات $x^2 + mx - 5 = 0$ کا ایک جذر 2 ہو تو m کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہوگی؟

(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

2. مندرجہ ذیل میں کون سی مساوات مربعی مساوات ہیں؟

(1) $m^2 + 2m + 11 = 0$ (2) $x^2 - 2x + 5 = x^2$ (3) $(x + 2)^2 = 2x^2$

3. مندرجہ ذیل میں سے ہر مساوات کے لیے ممیّز کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $2y^2 - y + 2 = 0$ (2) $5m^2 - m = 0$ (3) $\sqrt{5}x^2 - x - \sqrt{5} = 0$

4. مربعی مساوات $2x^2 + kx - 2 = 0$ کا ایک جذر -2 ہے تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

5. ایسی مربعی مساوات بنائیے جس کے جذر ذیل کے مطابق ہیں۔

(1) 10 اور -10 (2) $1-3\sqrt{5}$ اور $1+3\sqrt{5}$ (3) 0 اور 7

6. مندرجہ ذیل مربعی مساوات کے جذروں کی نوعیت طے کیجیے۔

(1) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (2) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$ (3) $m^2 - 2m + 1 = 0$

7. مندرجہ ذیل مربعی مساواتیں حل کیجیے۔

(1) $\frac{1}{x+5} = \frac{1}{x^2}$ ... $(x \neq 0, x + 5 \neq 0)$ (2) $x^2 - \frac{3x}{10} - \frac{1}{10} = 0$ (3) $(2x + 3)^2 = 25$

(4) $m^2 + 5m + 5 = 0$ (5) $5m^2 + 2m + 1 = 0$ (6) $x^2 - 4x - 3 = 0$

8.★ مربعی مساوات $(m - 12)x^2 + 2(m - 12)x + 2 = 0$ کے جذر حقیقی اور مساوی ہوں تو m کی قیمت معلوم کیجیے۔

9. ایک مربعی مساوات کے دو جذروں کا مجموعہ 5 اور اس کے مکعبوں کا مجموعہ 35 ہے۔ وہ مربعی مساوات لکھیے۔

10.★ ایسی مربعی مساوات بنائیے کہ جس مساوات کے جذر $2x^2 + 2(p + q)x + p^2 + q^2 = 0$ اس کے جذروں کے مجموعے کا مربع اور فرق کا مربع ہو۔

11.★ مکند کے پاس ساگر کی بہ نسبت 50 روپے زیادہ ہے۔ ان کے پاس موجود رقموں کا حاصل ضرب 15000 ہو تو ہر ایک کے پاس کتنی رقم ہے؟

12.★ دو اعداد کے مربعوں کا فرق 120 ہے۔ چھوٹے عدد کا مربع، بڑے عدد کا دگنا ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔

13.★ فردوس کو سالگرہ کے موقع پر 540 سنترے کچھ طلبہ میں مساوی طور پر تقسیم کرنا ہے۔ اگر 30 طلبہ زیادہ ہوتے تو ہر ایک کو 3 سنترے کم ملے ہوتے تو طلبہ کی تعداد معلوم کیجیے۔

14.★ تلویل کے کسان شری دِنیش کے مستطیل نما کھیت کی لمبائی، چوڑائی کے دگنا سے 10 میٹر زیادہ ہے۔ انھوں نے کھیت میں بارش کا پانی جمع کرنے کے لیے کھیت کی چوڑائی کا $\frac{1}{3}$ گنا ضلع کا مربع نما چھوٹا سا تالاب بنایا۔ اصل کھیت کا رقبہ، چھوٹے تالاب کے رقبے کا 20 گنا ہے تو اس کھیت کی لمبائی اور چوڑائی نیز چھوٹے تالاب کا ضلع معلوم کیجیے۔

15.★ ایک حوض دو نل کے ذریعے 2 گھنٹے میں مکمل بھرا جاتا ہے۔ صرف چھوٹے نل سے حوض کو بھرنے کے لیے درکار وقت، صرف بڑے نل کے ذریعے حوض بھرنے کے لیے درکار وقت سے 3 گھنٹا زیادہ لگتا ہے تو ہر نل سے حوض بھرنے کے لیے کتنا وقت درکار ہوگا؟

NHZJ42