1 دو متغیری خطی مساواتیں (Equations in two variables)

آیئے، سیکھیں۔

- دو متغیری خطی مساواتیں حل کرنے کا طریقہ - ترسیمی طریقہ، کرامر کا طریقہ
- دو متغیری خطی مساوات میں تحویل کرنے کے قابل مساوات
- ہمزاد مساواتوں کا اطلاق

آیئے، ذرا یاد کریں

دو متغیری خطی مساواتیں (Linear equations in two variables)

جس مساوات میں دو متغیروں کا استعمال ہوتا ہے اور ہر متغیر کا درجہ 1 ہوتا ہے اس مساوات کو دو متغیری خط مساوات کہتے ہیں۔ اس کا ہم سابقہ جماعتوں میں مطالعہ کر چکے ہیں۔

مساوات $ax + by + c = 0$ دو متغیری خطی مساوات کی عام صورت ہے۔ یہاں a، b، c حقیقی اعداد ہیں۔ a اور b بیک وقت صفر نہیں ہوتے۔ یہ آپ جانتے ہیں۔

مثال : مساوات $3x = 4y - 12$ کی عام صورت $3x - 4y + 12 = 0$ ہے۔

عملی کام : مندرجہ ذیل جدول مکمل کیجیے۔

نمبر شمار	مساوات	دو متغیری خطی مساوات ہے یا نہیں؟
1	$4m + 3n = 12$	ہے
2	$3x^2 - 7y = 13$	
3	$\sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 16$	
4	$0x + 6y - 3 = 0$	
5	$0.3x + 0y - 36 = 0$	
6	$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 4$	
7	$4xy - 5y - 8 = 0$	

ہمزاد خطی مساواتیں (Simultaneous linear equations)

جب دو متغیروں کی دو خطی مساواتوں کا بیک وقت خیال کر کے ان کا مشترک حل حاصل ہوتا ہے تب ان مساواتوں کو ہمزاد مساواتیں (Simultaneous equations) کہتے ہیں۔

گزشتہ جماعت میں ایک متغیر کا اخراج کر کے ہمزاد مساوات حل کرنے کے طریقے کا مطالعہ ہم کر چکے ہیں۔ آیئے، اس کا کچھ اعادہ کرتے ہیں۔

مثال (1) : درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

$$5x - 3y = 8 \quad ; \quad 3x + y = 2$$

حل :

پہلا طریقہ :

$5x - 3y = 8$ . . (I)

$3x + y = 2$ . . (II)

مساوات (II) کے طرفین کو 3 سے ضرب کریں گے۔

$9x + 3y = 6$ . . . (III)

$5x - 3y = 8$ . . . (I)

اب مساوات (I) اور (III) کی جمع کریں گے۔

$$\begin{array}{r} 5x - 3y = 8 \\ +\ 9x + 3y = 6 \\ \hline 14x = 14 \end{array}$$

$\therefore \quad x = 1$

$x = 1$، مساوات (II) میں رکھیں گے۔

$3x + y = 2$

$\therefore 3 \times 1 + y = 2$

$\therefore 3 + y = 2$

$\therefore \quad y = -1$

$x = 1$، $y = -1$ یہ حل ہے۔

اس حل کو اس صورت میں لکھتے ہیں۔

$(x,\ y) = (1, -1)$

دوسرا طریقہ :

$5x - 3y = 8$ . . . (I)

$3x + y = 2$ . . . (II)

مساوات (II) میں متغیر y کی قیمت متغیر x کی صورت میں لکھیں گے۔

$y = 2 - 3x$ . . . (III)

اب y کی یہ قیمت مساوات (I) میں رکھیں گے۔

$5x - 3y = 8$

$\therefore 5x - 3(2 - 3x) = 8$

$\therefore 5x - 6 + 9x = 8$

$\therefore 14x - 6 = 8$

$\therefore 14x = 8 + 6$

$\therefore 14x = 14$

$\therefore x = 1$

$x = 1$ یہ قیمت مساوات (III) میں رکھیں گے۔

$y = 2 - 3x$

$\therefore y = 2 - 3 \times 1$

$\therefore y = 2 - 3$

$\therefore y = -1$

$x = 1$ ، $y = -1$ مساوات کا حل ہے۔

یعنی

$(x,\ y) = (1, -1)$

مثال (2) حل کیجیے : $3x + 2y = 29 ; \quad 5x - y = 18$

حل : $3x + 2y = 29 \quad . . . \quad (I) \quad , \quad 5x - y = 18 \quad . . . \quad (II)$

دی ہوئی مساواتوں میں y متغیر کا اخراج کرکے حل کریں گے۔اس کے لیے مندرجہ ذیل خانوں میں مناسب اعداد لکھیے۔

مساوات (II) کو 2 سے ضرب دے کر،

$\therefore \quad 5x \times \square - y \times \square = 18 \times \square$

$\therefore \quad 10x - 2y = \square \quad . . . \quad (III)$

مساوات (I) میں مساوات (III) جمع کرنے پر

$$
\begin{array}{r}
3x + 2y = 29 \\
+ \quad \square - \square = \square \\
\hline
\square = \square
\end{array}
\quad , \quad \therefore \quad x = \square
$$

$x = 5$ مساوات (I) میں رکھنے پر

$3x + 2y = 29$

$\therefore \quad 3 \times \square + 2y = 29$

$\therefore \quad \square + 2y = 29$

$\therefore \quad 2y = 29 - \square$

$\therefore \quad 2y = \square \quad , \quad \therefore \quad y = \square$

$(x, y) = (\square , \square)$ ... (یہ مساواتوں کا حل ہے)

مثال (3) $15x + 17y = 21 ; \quad 17x + 15y = 11$

حل :

$15x + 17y = 21 \quad . . . (I)$

$17x + 15y = 11 \quad . . . (II)$

ان دونوں مساواتوں میں x اور y کے ضریب ایک دوسرے سے ادل بدل گئے ہیں۔اس قسم کی ہمزاد مساواتیں حل کرنے کے لیے ان مساواتوں کی ایک بار جمع کرکے اور دوسری بار تفریق کرکے دونئی آسان ہمزاد مساواتیں حاصل کرتے ہیں۔ان مساواتوں کا حل آسانی سے حاصل ہوجاتا ہے۔

مساوات (I) اور مساوات (II) کی جمع کرنے پر،

$$
\begin{array}{r}
15x + 17y = 21 \\
+ \quad 17x + 15y = 11 \\
\hline
32x + 32y = 32
\end{array}
$$

مساوات میں طرفین کو 32 سے تقسیم کرنے پر،

$$x + y = 1 \quad . . . \quad (III)$$

مساوات (I) میں سے مساوات (II) تفریق کرنے پر،

$$\begin{array}{rrrrr} & 15x & + 17y & = & 21 \\ - & 17x & + 15y & = & 11 \\ & - & - & & - \\ \hline & -2x & + 2y & = & 10 \end{array}$$

مساوات کے طرفین کو 2 سے تقسیم کرنے پر،

$$-x + y = 5 \quad . . . \quad (IV)$$

مساوات (III) اور (IV) کی جمع کرنے پر،

$$\begin{array}{rrrrr} & x & + y & = & 1 \\ + & -x & + y & = & 5 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore \; 2y = 6 \quad , \quad \therefore \; y = 3$

$y = 3$ مساوات (III) میں رکھنے پر،

$$x + y = 1$$
$$\therefore \; x + 3 = 1$$
$$\therefore \; x = 1 - 3 \quad , \quad \therefore \; x = -2$$

(مساواتوں کا حل) ... $(x, y) = (-2, 3)$ ہے

مشقی سیٹ 1.1

1. درج ذیل عملی کام پورا کرتے ہوئے ہمزاد مساوات حل کیجیے۔

$$5x + 3y = 9 \quad . . . \quad (I)$$
$$2x - 3y = 12 \quad . . . \quad (II)$$

مساوات (I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$$\begin{array}{rrrrr} & 5x & + 3y & = & 9 \\ + & 2x & - 3y & = & 12 \\ \hline \end{array}$$

$\square \, x = \square$

$x = \dfrac{\square}{\square} \quad , \quad \therefore \; x = \square$

$x = 3$ مساوات (I) میں رکھنے پر،

$5 \times \square + 3y = 9$

$3y = 9 - \square$

$3y = \square$

$y = \dfrac{\square}{3}$

$y = \square$

(مساواتوں کا حل) ... $\therefore \; (x, y) = (\square, \square)$

2. درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(1) $3a + 5b = 26;\ a + 5b = 22$

(2) $x + 7y = 10;\ 3x - 2y = 7$

(3) $2x - 3y = 9;\ 2x + y = 13$

(4) $5m - 3n = 19;\ m - 6n = -7$

(5) $5x + 2y = -3;\ x + 5y = 4$

(6) $\frac{1}{3}x + y = \frac{10}{3};\ 2x + \frac{1}{4}y = \frac{11}{4}$

(7) $99x + 101y = 499;\ 101x + 99y = 501$

(8) $49x - 57y = 172;\ 57x - 49y = 252$

آئیے، ذرا یاد کریں۔

دو متغیری خطی مساوات کی ترسیم (Graph of a linear equation in two variables)

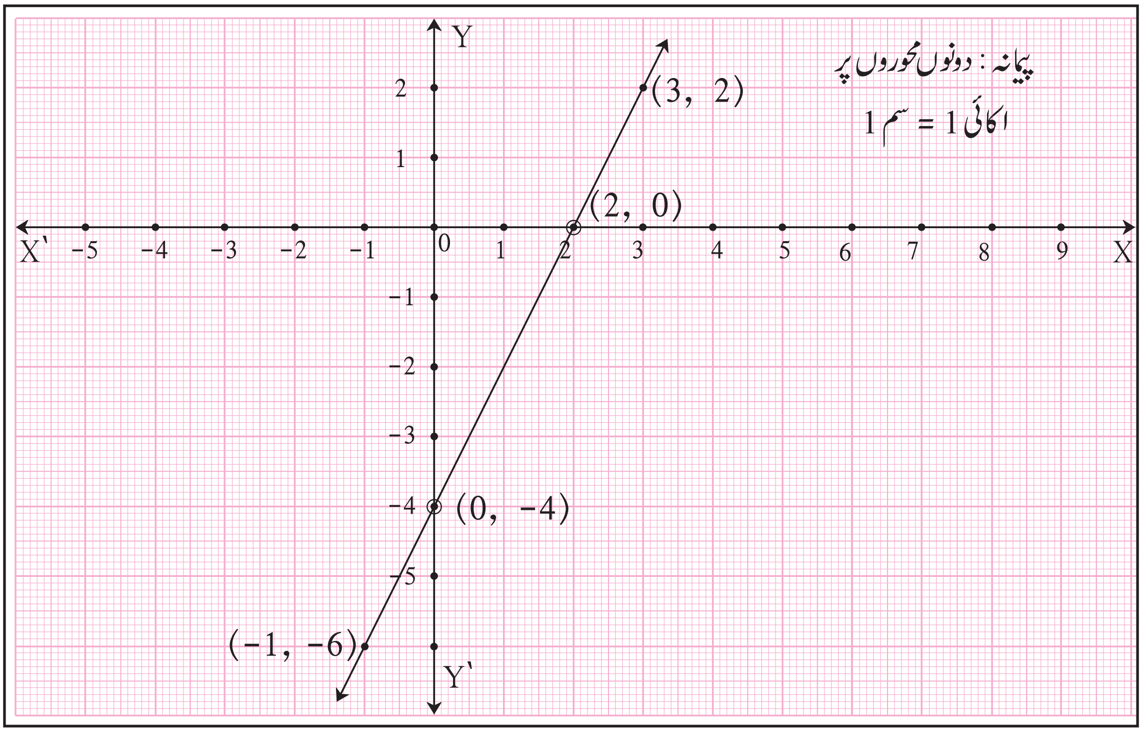
گزشتہ جماعت میں ہم مطالعہ کر چکے ہیں کہ دو متغیری خطی مساوات کی ترسیم ایک خط ہوتی ہے۔ جو مرتب جوڑی دی ہوئی مساواتوں کو مطمئن کرتی ہے وہ مرتب جوڑی ان مساواتوں کا حل ہوتی ہے۔ اسی طرح وہ مرتب جوڑی اس مساوات کی ترسیم پر ایک نقطے کو ظاہر کرتی ہے۔

مثال: مساوات $2x - y = 4$ کی ترسیم ۔

حل: مساوات $2x - y = 4$ کی ترسیم کھینچنے کے لیے (x, y) مرتب جوڑی کی چار مرتب جوڑیاں حاصل کریں گے۔

مرتب جوڑیاں حاصل ہونے کے بعد جدول میں دِکھائے ہوئے کے مطابق لکھتے ہیں۔ x اور y کی قیمت صفر بھی لینا سہولت بخش ہوتا ہے۔

x	0	2	3	−1
y	−4	0	2	−6
(x, y)	(0, −4)	(2, 0)	(3, 2)	(−1, −6)



دومتغیری خطی مساوات کی ترسیم کھینچنے کے لیے درج ذیل مرحلوں کو بغور دیکھیے۔

دی ہوئی مساوات کی کم از کم 4 مرتب جوڑیاں (نقاط کے محددین) معلوم کیجیے۔

↓

ترسیمی کاغذ پر X - محور اور Y - محور متعین کر کے نقاط مرتسم کیجیے۔

↓

تمام نقاط ایک ہی خط میں آئیں گے۔ ان نقاط سے گزرتا ہوا خط کھینچیے۔

خط متعین ہونے کے لیے صرف دو ہی نقاط کافی ہیں لیکن اگر ان میں سے ایک بھی نقطہ کے محددین معلوم کرنے میں غلطی ہوگئی تو اُس خط کی ترسیم غلط ہو جائے گی۔

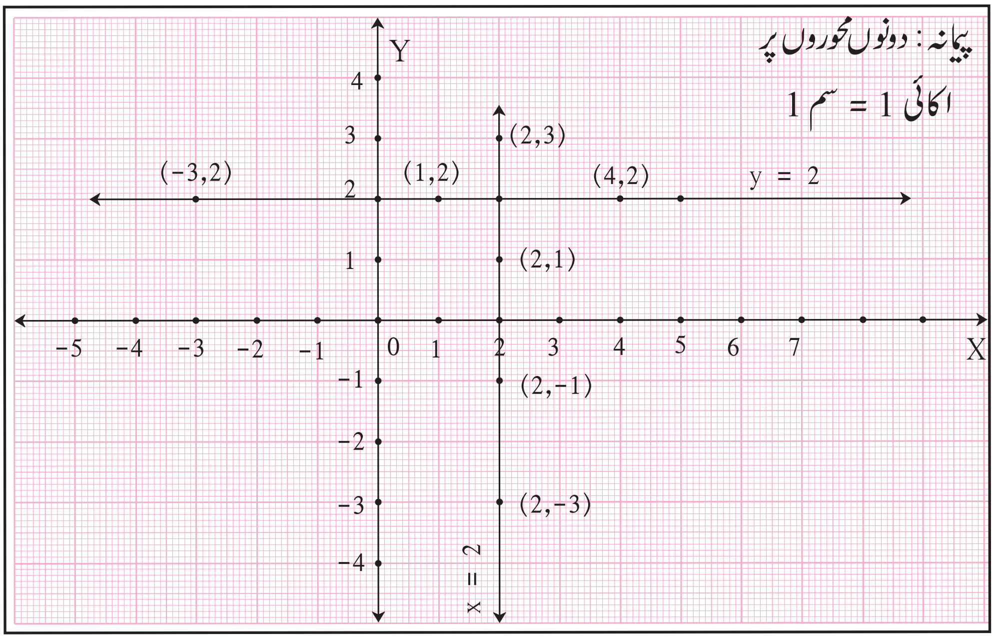
تین نقاط کے محددین معلوم کرنے میں اگر ایک نقطہ کے محددین معلوم کرنے میں غلطی ہو جائے تو تینوں نقاط ایک ہی خط پر نہیں ہوں گے۔ ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ ان میں سے کسی ایک نقطے کے محددین معلوم کرنے میں غلطی ہوئی ہے لیکن صحیح معنوں میں کون سے نقطہ کے محددین غلط ہیں اسے معلوم کرنے میں کافی وقت لگے گا۔

چار نقاط کے محددین معلوم کرنے میں اگر ایک نقطے کے محددین معلوم کرنے میں غلطی ہو تو باقی تین نقطے ہم خطی ہوتے ہیں اس لیے غلطی فوراً سمجھ میں آجاتی ہے۔ اس لیے چار نقاط کے محددین معلوم کرنا فائدہ مند ہے۔

مساوات $0x + y = 2$ کو سہولت کے لیے $y = 2$ لکھتے ہیں۔ اس مساوات کی ترسیم X - محور کے متوازی ہوتی ہے کیونکہ x محدد کے لیے کوئی بھی عدد لیں تو ہر نقطے کا y محدد 2 ہی آتا ہے۔

x	1	4	−3
y	2	2	2
(x, y)	(1, 2)	(4, 2)	(−3, 2)

اسی طرح مساوات $x + 0y = 2$ کو $x = 2$ لکھتے ہیں اور اس خط کی ترسیم Y - محور کے متوازی ہوتی ہے۔



آئیے، سمجھ لیں۔

ہمزاد خطی مساواتیں حل کرنے کے لیے ترسیمی طریقہ (Solution of simultaneous equations by graphical method)

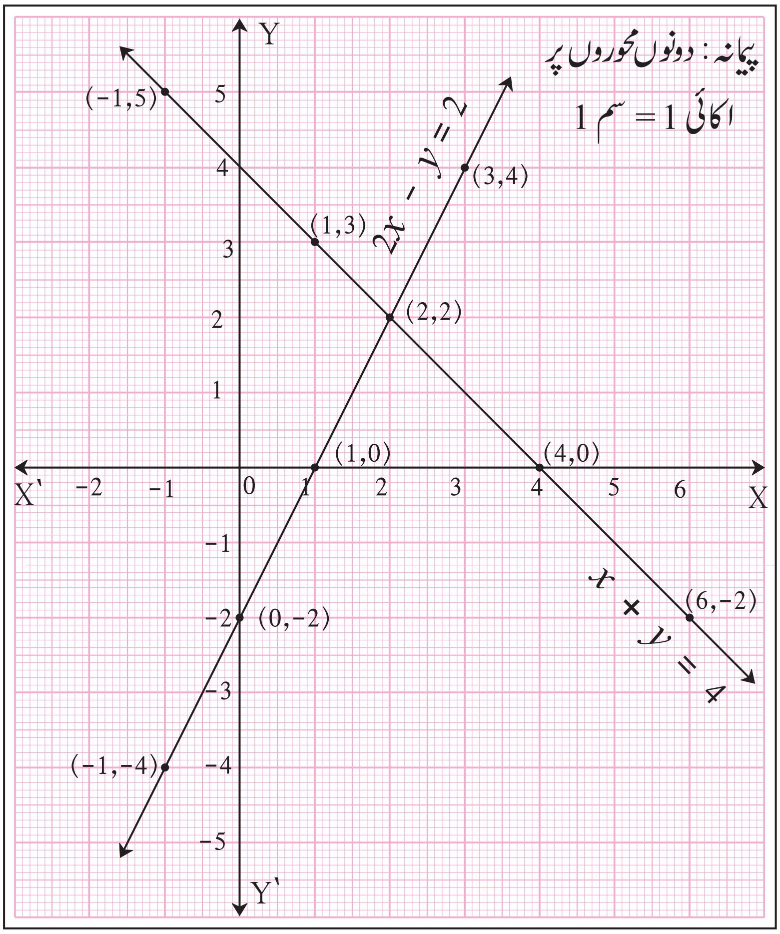
مثال: $x + y = 4$ اور $2x - y = 2$ ان مساواتوں کی ترسیمات کھینچ کر اس کا مشاہدہ کریں گے۔

$x + y = 4$

x	-1	4	1	6
y	5	0	3	-2
(x, y)	$(-1, 5)$	$(4, 0)$	$(1, 3)$	$(6, -2)$

$2x - y = 2$

x	0	1	3	-1
y	-2	0	4	-4
(x, y)	$(0, -2)$	$(1, 0)$	$(3, 4)$	$(-1, -4)$



ترسیم پر واقع ہر نقطہ اس ترسیم کی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔ دونوں خطوط ایک دوسرے کو نقطہ $(2, 2)$ پر قطع کرتے ہیں۔

اس لیے $(2, 2)$ مرتب جوڑی یعنی $x = 2$ اور $y = 2$ قیمتیں $x + y = 4$ اور $2x - y = 2$ ان دونوں مساواتوں کو مطمئن کرتی ہیں۔

متغیر کی جن قیمتوں کے لیے دی ہوئی ہمزاد مساواتیں مطمئن ہوتی ہیں وہ قیمتیں ان مساواتوں کا حل ہوتی ہیں۔

$x + y = 4$ اور $2x - y = 2$ ان ہمزاد مساواتوں کا حل $x = 2$ اور $y = 2$ ہے۔

آئیے، ان مساواتوں کو اخراج کے طریقے سے حل کر کے حل کی تصدیق کرتے ہیں۔

$x + y = 4 \quad \ldots \text{(I)}$

$2x - y = 2 \quad \ldots \text{(II)}$

مساوات (I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$3x = 6, \quad \therefore \quad x = 2$

مساوات (I) میں $x = 2$ رکھنے پر،

$x + y = 4$

$\therefore \quad 2 + y = 4$

$\therefore \quad y = 2$

عملی کام I: $x - y = 1 \; ; 5x - 3y = 1$ اِن ہمزاد مساواتوں کا حل ترسیمی طریقے سے معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی جدول مکمل کرکے محددین معلوم کیجیے۔

$5x - 3y = 1$

x	2			-4
y		8	-2	
(x, y)				

$x - y = 1$

x	0		3	
y		0		-3
(x, y)				

- ایک ہی پیمانہ کا استعمال کرتے ہوئے ایک ہی ترسیمی کاغذ پر مندرجہ بالا نقاط مرتسم کیجیے۔
- مساواتوں کی ترسیمات کھینچیے۔
- خطوط کے نقطۂ تقاطع کے محددین پڑھیے۔اس کی مدد سے ہمزاد مساواتوں کا حل لکھیے۔

عملی کام II : مندرجہ بالا ہمزاد مساواتوں کو اخراج کے طریقے سے حل کیجیے اور ترسیم سے حاصل ہونے والے حل کی تصدیق کیجیے۔

آیئے،غور کریں۔

$5x - 3y = 1$ کی ترسیم کھینچنے کے لیے درج ذیل جدول میں کچھ محددین معلوم کرکے لکھے ہوئے ہیں۔ان کا مشاہدہ کیجیے۔

x	0	$\frac{1}{5}$	1	-2
y	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{11}{3}$
(x, y)	$\left(0, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, 0\right)$	$\left(1, \frac{4}{3}\right)$	$\left(-2, -\frac{11}{3}\right)$

- کیا نقطہ مرتسم کرنے کے لیے محددین سہولت بخش ہیں؟
- محددین معلوم کرنے کے لیے کس بات کا دھیان رکھیں کہ نقطہ مرتسم کرنا آسان ہوجائے؟

مشقی سیٹ 1.2

1. درج ذیل ہمزاد مساواتیں ترسیمی طریقے سے حل کرنے کے لیے جدول مکمل کیجیے۔

$x + y = 3 \; ; \; x - y = 4$

$x - y = 4$

x	☐	-1	0
y	0	☐	-4
(x, y)	☐	☐	(0, -4)

$x + y = 3$

x	3	☐	☐
y	☐	5	3
(x, y)	(3, 0)	☐	(0, 3)

2. درج ذیل ہمزاد مساواتیں ترسیمی طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $x + y = 6 \; ; \; x - y = 4$

(2) $x + y = 5 \; ; \; x - y = 3$

(3) $x + y = 0 \; ; \; 2x - y = 9$

(4) $3x - y = 2 \; ; \; 2x - y = 3$

(5) $3x - 4y = -7 \; ; \; 5x - 2y = 0$

(6)★ $2x - 3y = 4 \; ; \; 3y - x = 4$

آئیے، بحث کریں۔

$x + 2y = 4$; $3x + 6y = 12$ ہمزاد مساواتیں دی ہوئی ہیں۔ انھیں ترسیمی طریقے سے حل کرنے کے لیے متعین کی گئی مرتب جوڑیاں درج ذیل ہیں۔

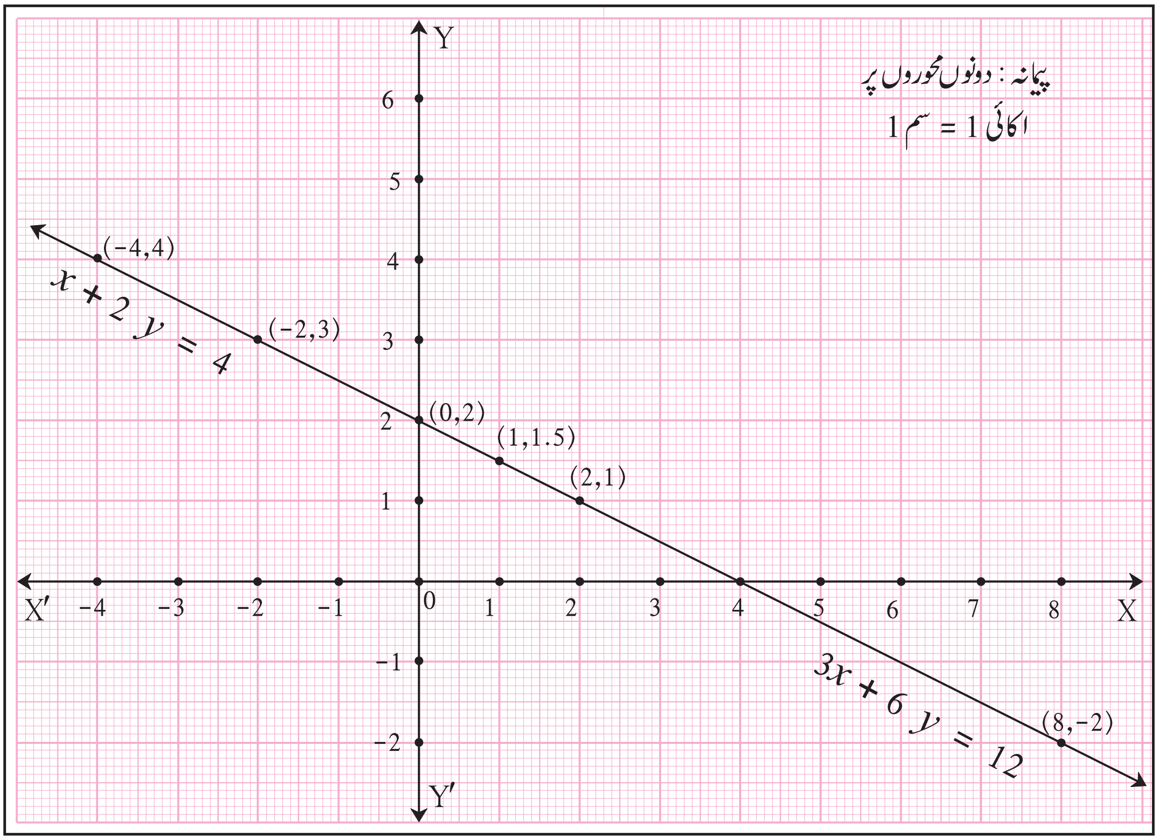
$x + 2y = 4$

x	-2	0	2
y	3	2	1
(x, y)	$(-2, 3)$	$(0, 2)$	$(2, 1)$

$3x + 6y = 12$

x	-4	1	8
y	4	1.5	-2
(x, y)	$(-4, 4)$	$(1, 1.5)$	$(8, -2)$

ان مرتب جوڑیوں کو مرتسم کر کے کھینچی ہوئی ترسیم ذیل میں دی ہوئی ہے۔ اس کا مشاہدہ کر کے اس پر مبنی سوالوں پر بحث کیجیے۔



(1) مندرجہ بالا دونوں مساواتوں کی ترسیم ایک ہی ہے یا مختلف ہے؟

(2) $x + 2y = 4$ اور $3x + 6y = 12$ ہمزاد مساواتوں کے حل کون سے ہیں؟ اور یہ کتنے ہیں؟

(3) مندرجہ بالا مساواتوں میں x کے ضریب، y کے ضریب اور مستقل عدد میں کیا تعلق دِکھائی دیتا ہے؟

(4) اگر دو متغیری صورت میں دو خطی مساواتیں دی ہوئی ہوں، ان مساواتوں کی ترسیم صرف ایک ہی خط کب ہوگی اور اس کی شناخت کیسے ہوگی؟

اب دوسری مثال دیکھیے۔

$x - 2y = 4$ اور $2x - 4y = 12$ کی ترسیمات درج بالا طریقے سے ایک ہی پیمانے کا استعمال کرکے ایک ہی ترسیمی کاغذ پر کھینچیے۔ ترسیم کا مشاہدہ کیجیے۔ $x - 2y = 4$ ؛ $2x - 4y = 12$ ان ہمزاد مساواتوں کے حل پر غور کیجیے۔ x اور y کے ضریب، اسی طرح مستقل رکن ان سے متعلق غور کرتے ہوئے نتیجہ اخذ کیجیے۔

ICT Tools or Links

Geogebra software کی مدد سے X - محور اور Y - محور کھینچیے۔ مختلف ہمزاد مساواتوں کی ترسیمات کھینچیے۔ ان کے حل کی جانچ کیجیے۔

آیئے، سمجھ لیں۔

مربع قالب (Determinant)

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ یہ چار ارکان کا مربع قالب ہے۔ اس میں (a, b) ، (c, d) اُفقی قطاریں ہیں۔ اسی طرح $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ عمودی ستون ہیں۔ اس مربع قالب کا درجہ 2 ہے کیونکہ ہر اُفقی قطار اور عمودی ستون میں 2 ارکان ہیں۔ اس مربع قالب کو ایک عدد کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ وہ عدد $ad-bc$ ہے۔

یعنی ، $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad\text{-}bc$

مربع قالب $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ کی قیمت $ad-bc$ ہے۔

مربع قالب کو ظاہر کرنے کے لیے عام طور پر انگریزی کے بڑے حروف .... A, B, C, D, وغیرہ استعمال کرتے ہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال : درج ذیل مربع قالب کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ (2) $N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (3) $B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix}$

حل:

$$(1)\ A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (5 \times 9) - (3 \times 7) = 45 - 21 = 24$$

$$(2)\ N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = [(-8) \times (4)] - [(-3\ ) \times\ 2] = -32 - (-6)$$

$$= -32 + 6 = -26$$

$$(3)\ B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = [2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}] - [2 \times 9] = 18 - 18 = 0$$

آ یئے، سمجھ لیں۔

مربع قالب کا طریقہ (کرامر کا اُصول) (Determinant method (Cramer's method)

دی ہوئی ہمزاد مساواتیں آسان طریقے سے کم سے کم جگہ کا استعمال کر کے مربع قالب کی مدد سے حل کر سکتے ہیں۔ اسے مربع قالب کے طریقے سے ہمزاد مساوات حل کرنا کہتے ہیں۔ یہ طریقہ گبریل کرامر نامی سوئیس ریاضی داں نے معلوم کیا تھا اس لیے اسے کرامر کا طریقہ کہتے ہیں۔

اس طریقے میں دی ہوئی ہمزاد مساواتیں لکھنے کا طریقہ یہ ہے : $a_1x + b_1y = c_1$ اور $a_2x + b_2y = c_2$

فرض کیجیے،

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad . . . \text{(I)}$$

اور،

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad . . . \text{(II)}$$

یہاں a_1 ، b_1 ، c_1 اور a_2 ، b_2 ، c_2 حقیقی اعداد ہیں۔

ہم اِن ہمزاد مساواتوں کو اخراج کے طریقے سے حل کرتے ہیں۔

مساوات (I) کو b_2 سے ضرب کرنے پر ،

$$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

مساوات (II) کو b_1 سے ضرب کرنے پر ،

$$a_2 b_1 x + b_2 b_1 y = c_2 b_1 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

مساوات (III) سے (IV) تفریق کرنے پر،

$$\begin{array}{r} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \\ -\ a_2 b_1 x \pm b_2 b_1 y = -c_2 b_1 \\ \hline (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1 \end{array}$$

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad . . . (V)$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad . . . (\text{اسی طرح } x \text{ کا اخراج کرکے}) \quad . . . (VI)$$

مندرجہ بالا حل میں $c_1 b_2 - c_2 b_1,\ a_1 b_2 - a_2 b_1,\ a_1 c_2 - a_2 c_1$ عبارتوں کو دھیان میں رکھنے کے لیے مختصر جگہ میں مناسب مربع قالب کی صورت میں لکھتے ہیں۔

درج ذیل مساواتوں کے ضریب اور مستقل رکن کا مشاہدہ کیجیے۔

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$\text{اور}\ ,\ a_2 x + b_2 y = c_2$$

یہاں $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ یہ تین عمودی ستون حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات (V) اور (VI) میں x اور y کی قیمت مربع قالب کی مدد سے لکھتے ہیں۔

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad ; \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\text{یہاں}\ ,\ (a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0$$

انھیں ذہن میں رکھنے کے لیے ذیل کے مطابق لکھتے ہیں۔

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D\ , \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_x\ , \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_y$$

یعنی مختصر طور پر $x = \frac{D_x}{D}$ اور $y = \frac{D_y}{D}$

D، D_x اور D_y اِن مربع قالبوں کو لکھنے کے لیے $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ عمودی ستون کی ترتیب دھیان میں رکھیں۔

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$ ان مساواتوں سے $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ یہ تین عمودی ستون حاصل ہوتے ہیں۔

- D میں مستقل ارکان کا عمودی ستون $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ خارج کیا گیا ہے۔
- D_x کے لیے D میں x کے ضریبوں کا عمودی ستون $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ کو خارج کر کے اس کی جگہ مستقل ارکان کا عمودی ستون $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ لیا جاتا ہے۔
- D_y کے لیے D میں y کے ضریبوں کا عمودی ستون $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ خارج کر کے اس کی جگہ مستقل ارکان کا عمودی ستون $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ لیا جاتا ہے۔

اسے دھیان میں رکھیں۔

کرامر کے طریقے سے ہمزاد مساواتیں حل کرنے کا طریقہ

دی ہوئی مساواتوں کو $ax + by = c$ صورت میں لکھیے۔

↓

D ، D_x اور D_y مربع قالبوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

↓

$x = \dfrac{D_x}{D}$ اور $y = \dfrac{D_y}{D}$

کی مدد سے x اور y کی قیمت معلوم کیجیے۔

گیبریل کرامر (Gabriel Cramer)

(31 جولائی 1704 تا 4 جنوری 1752) سوئس ریاضی داں جنیوا میں پیدا ہوئے۔ انھیں بچپن ہی سے ریاضی میں برتری حاصل تھی۔ 18 سال کی عمر میں انھیں ڈاکٹریٹ کی سند ملی۔ یہ جنیوا میں پروفیسر تھے۔

حل کردہ مثالیں

مثال: کرامر کے طریقے سے مندرجہ ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

$$5x + 3y = -11 \; ; \; 2x + 4y = -10$$

حل: دی ہوئی مساواتیں

$$5x + 3y = -11$$

$$2x + 4y = -10$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (2 \times 3) = 20 - 6 = 14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = (-11) \times 4 - (-10) \times 3 = -44 - (-30)$$

$$= -44 + 30 = -14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 5 \times (-10) - 2 \times (-11) = -50 - (-22)$$

$$= -50 + 22 = -28$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{14} = -1 \qquad \Big| \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{14} = -2$$

اس لیے $(x, y) = (-1, -2)$ دی ہوئی ہمزاد مساواتوں کا حل ہے۔

عملی کام 1: مربع قالب کے طریقے سے دی ہوئی ہمزاد مساواتیں حل کرنے کے لیے خانہ پُری کیجیے۔

$$y + 2x - 19 = 0 \; ; \; 2x - 3y + 3 = 0$$

حل: دی ہوئی مساواتیں $ax + by = c$ صورت میں لکھتے ہیں۔

$$2x + y = 19$$

$$2x - 3y = -3$$

$$D = \begin{vmatrix} \square & \square \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \square \times (-3) - 2 \times (\square) = (\square) - (\square)$$

$$= \square - \square = \square$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & \square \\ \square & -3 \end{vmatrix} = 19 \times (\square) - (\square) \times (\square) = \square - \square$$

$$= \square$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \square & 19 \\ 2 & \square \end{vmatrix} = [(\square) \times (\square)] - [(\square) \times (\square)]$$

$$= \square - \square = \square$$

$x = \dfrac{D_x}{D}$ | $y = \dfrac{D_y}{D}$

$\therefore\ x = \dfrac{\square}{\square} = \square$ | $y = \dfrac{\square}{\square} = \square$

$\therefore\ (x,\ y) = (\square, \square)$ ... (دی ہوئی ہمزاد مساواتوں کا حل)

عملی کام 2: درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔

$3x - 2y = 3$ $2x + y = 16$

درج بالا مساواتوں کے مربع قالبوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

$D = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$ $D_x = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$ $D_y = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$

کرامر کے طریقے کی مدد سے حل حاصل ہوتا ہے۔

$x = \dfrac{\square}{\square} = \square$ $y = \dfrac{\square}{\square} = \square$

اس لیے $(x,\ y) = (\square, \square)$ حل ہے۔

آیئے، غور کریں۔

- اگر $D = 0$ ہو تو حل کی نوعیت کیا ہوگی؟
- اگر مشترک حل نہ ہو تو ان مساواتوں کے خطوط کی نوعیت کیا ہوگی؟

مشقی سیٹ 1.3

.1 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \square - \square \times 4 = \square - 8 = \square$

.2 ذیل کی مربع قالبوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

.3 درج ذیل ہمزاد مساواتیں کرامر کے اُصول کا استعمال کرکے حل کیجیے۔

(1) $3x - 4y = 10 \;;\; 4x + 3y = 5$ (2) $4x + 3y - 4 = 0 \;;\; 6x = 8 - 5y$

(3) $x + 2y = -1 \;;\; 2x - 3y = 12$ (4) $6x - 4y = -12 \;;\; 8x - 3y = -2$

(5) $4m + 6n = 54 \;;\; 3m + 2n = 28$ (6) $2x + 3y = 2 \;;\; x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$

آیئے، سمجھ لیں۔

دو متغیری خطی مساواتوں کی تحویل کے قابل مساواتیں
(Equations reducible to a pair of linear equations in two variables)

عملی کام : درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

مساواتیں	متغیر کی تعداد	خطی ہے یا نہیں
$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 8$	2	نہیں
$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 0$	$\square$	$\square$
$\frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 0$	$\square$	$\square$
$\frac{14}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5$	$\square$	$\square$

غور کیجیے۔

درج بالا جدول میں کچھ مساواتیں دو متغیروں کی صورت میں دی ہوئی ہیں۔ وہ بظاہر خطی نظر نہیں آتیں لیکن کیا ان کو خطی مساوات کی صورت میں لایا جا سکتا ہے؟

آئیے، سمجھ لیں۔

دیے ہوئے متغیروں میں مناسب تبدیلی کر کے نئے متغیر فرض کیے جا سکتے ہیں۔ ان نئے متغیروں کا استعمال کر کے دی ہوئی مساواتوں کو خطی مساواتوں کی صورت میں لکھتے ہیں۔

کسی بھی $\frac{m}{n}$ کسر کا نسب نما صفر نہیں ہو سکتا۔ اِسے بھولیے نہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال: (1) حل کیجیے۔ $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7 ; \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

حل: $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7 ; \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{y}\right) = 7 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{y}\right) = 5 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

مساوات (I) اور (II) میں $\left(\frac{1}{x}\right) = m$ اور $\left(\frac{1}{y}\right) = n$ فرض کرنے پر درج ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$4m + 5n = 7 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

$$3m + 4n = 5 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

ان مساواتوں کو حل کرنے پر $m = 3$ اور $n = -1$ حل حاصل ہوتے ہیں۔

اب، $m = \frac{1}{x} \quad , \quad \therefore \ 3 = \frac{1}{x} \ , \therefore \ x = \frac{1}{3}$

اسی طرح، $n = \frac{1}{y} \quad , \quad \therefore \ -1 = \frac{1}{y} \ , \therefore \ y = -1$

اس لیے دی ہوئی ہمزاد مساوات کا حل $(x, y) = (\frac{1}{3}, -1)$ ہے۔

مثال: (2) حل کیجیے۔ $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3\ ;\ \frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

حل:

$$\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3\ ;\ \frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$$

$$4\left(\frac{1}{x-y}\right) + 1\left(\frac{1}{x+y}\right) = 3 \quad . . . \quad (I)$$

$$2\left(\frac{1}{x-y}\right) - 3\left(\frac{1}{x+y}\right) = 5 \quad . . . \quad (II)$$

مساوات (I) اور مساوات (II) میں $\left(\frac{1}{x-y}\right) = a$ اور $\left(\frac{1}{x+y}\right) = b$ رکھنے پر درج ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$4a + b = 3 \quad . . . \quad (III)$$

$$2a - 3b = 5 \quad . . . \quad (IV)$$

مساوات (III) اور (IV) حل کرنے پر $a = 1$ اور $b = -1$ حل حاصل ہوتا ہے۔

لیکن $a = \left(\frac{1}{x-y}\right)$ اور $b = \left(\frac{1}{x+y}\right)$

اس لیے $\left(\frac{1}{x-y}\right) = 1$ اور $\left(\frac{1}{x+y}\right) = -1$

$$x - y = 1 \quad . . . \quad (V)$$

$$x + y = -1 \quad . . . \quad (VI)$$

مساوات (V) اور (VI) حل کرنے پر $x = 0$ اور $y = -1$ حل حاصل ہوتا ہے

اس لیے دی ہوئی مساواتوں کا حل $(x, y) = (0, -1)$ ہے۔

آیئے، غور کریں۔

مندرجہ بالا مثال میں دی ہوئی مساواتوں کو ہمزاد مساواتوں میں تبدیل کر کے اخراج کے طریقے سے حل کیا گیا ہے۔ اگر ان مساواتوں کو کرامر کے طریقے سے یا ترسیمی طریقے سے حل کریں تو وہی حل ملتا ہے یا نہیں؟ معلوم کیجیے۔

عملی کام: خانے میں درج ہمزاد مساواتوں کا حل معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2 \quad ; \quad \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

$\left(\frac{1}{x-1}\right) = m$ اور $\left(\frac{1}{y-2}\right) = n$ لینے پر،

$6m - 3n = 1$ ، [ ]

نئی مساواتیں حل کرنے پر،

$n = \square$ اور $m = \square$

m اور n کی قیمتیں رکھنے پر حاصل ہونے والی مساواتیں

[ ] ، $\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{3}$

مساواتیں حل کرنے پر،

$y = \square$ اور $x = \square$

اس لیے دی ہوئی ہمزاد مساواتوں کا حل $(x, y) = (\quad , \quad)$ ہے۔

مشقی سیٹ 1.4

.1 درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(1) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 15 \; ; \; \frac{8}{x} + \frac{5}{y} = 77$

(2) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \; ; \; \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

(3) $\frac{27}{x-2} + \frac{31}{y+3} = 85 \; ; \; \frac{31}{x-2} + \frac{27}{y+3} = 89$

(4) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4} \; ; \; \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$

آیئے، سمجھ لیں۔

ہمزاد مساواتوں کا اطلاق (Application of simultaneous equations)

عملی کام: درج ذیل خالی خانوں کے نیچے کچھ شرطیں دی ہوئی ہیں۔ان کی مدد سے حاصل ہونے والی مساوات متعلقہ خانوں میں لکھیے۔

میری موجودہ عمر x سال ہے۔ — میں سلیم ہوں۔

میری موجودہ عمر y سال ہے۔ — میں سلیمہ ہوں۔

سلیم کی موجودہ عمر سلیمہ کی موجودہ عمر کے دگنا سے 8 سال کم ہے

4 سال قبل سلیمہ کی عمر سلیم کی عمر سے 3 سال کم تھی۔

سلیم اور سلیمہ کی موجودہ عمروں کا مجموعہ 25 سال ہے۔

مثال: (1) ایک مستطیل کا احاطہ 40 سم ہے۔مستطیل کی لمبائی اس کی چوڑائی کے دگنا سے 2 سم زیادہ ہے۔مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں مستطیل کی لمبائی x سم اور چوڑائی y سم ہے۔

پہلی شرط کے مطابق ،

$$2(x + y) = 40$$

$$\therefore \quad x + y = 20 \quad \ldots (I)$$

دوسری شرط کے مطابق ،

$$x = 2y + 2$$

$$\therefore \quad x - 2y = 2 \quad \ldots (II)$$

مساوات (I) اور (II) مربع قالب کے طریقے پر حل کرنے پر ،

$$x + y = 20$$

$$x - 2y = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = [1 \times (-2)] - (1 \times 1) = -2 - 1 = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = [20 \times (-2)] - (1 \times 2) = -40 - 2 = -42$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2) - (20 \times 1) = 2 - 20 = -18$$

$$x = \frac{D_x}{D} \quad ; \quad y = \frac{D_y}{D}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-42}{-3} \quad ; \quad y = \frac{-18}{-3}$$

$$\therefore \quad x = 14 \quad ; \quad y = 6$$

اس لیے مستطیل کی لمبائی 14 سم اور چوڑائی 6 سم ہے۔

مثال: (2)

سیل ! سیل !! سیل !!! صرف دو دنوں کے لیے

میرے پاس سوئی والی کچھ اور کچھ ڈیجیٹل گھڑیاں ہیں۔
مجھے انھیں رعایتی نرخ سے فروخت کرنا ہے۔

پہلے دن کی فروخت

سوئی والی گھڑیاں = 11
ڈیجیٹل گھڑیاں = 6
حاصل شدہ رقم = ₹ 4330

دوسرے دن کی فروخت

سوئی والی گھڑیاں = 22
ڈیجیٹل گھڑیاں = 5
حاصل شدہ رقم = ₹ 7330

تو میری فروخت کی ہوئی ہر قسم کی ایک گھڑی کی قیمت کیا تھی؟

حل : فرض کیجیے،سوئی والی ایک گھڑی کی قیمت = x ₹

اور ایک ڈیجیٹل گھڑی کی قیمت = y ₹

پہلی شرط کے مطابق ،

$$11x + 6y = 4330 \quad . \; . \; . \quad (I)$$

دوسری شرط کے مطابق ،

$$22x + 5y = 7330 \quad . \; . \; . \quad (II)$$

مساوات (I) کو 2 سے ضرب کرنے پر،

$$22x + 12y = 8660 \quad . \; . \; . \quad (III)$$

مساوات (II) میں سے مساوات (III) تفریق کرنے پر،

$$\begin{array}{r} 22x + 5y = 7330 \\ - \;\; \underline{_\; 22x \pm 12y = _8660} \\ -7y = -1330 \end{array}$$

$$\therefore \quad y = 190$$

$y = 190$ مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$11x + 6y = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 6(190) = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 1140 = 4330$$

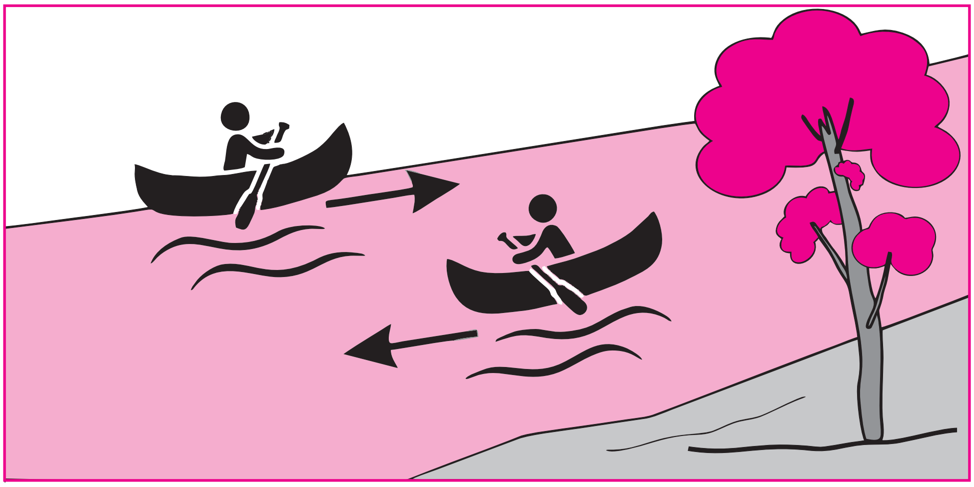
$$\therefore \quad 11x = 3190$$

$$\therefore \quad x = 290$$

اس لیے سوئی والی ایک گھڑی کی قیمت 290 ₹ اور

ایک ڈیجیٹل گھڑی کی قیمت 190 ₹ ہے۔

مثال: (3)



ایک کشتی 6 گھنٹے میں دریا کے بہاؤ کے مخالف سمت میں 16 کلومیٹر اور بہاؤ کے موافق سمت میں 24 کلومیٹر جاتی ہے۔

وہی کشتی 13 گھنٹے میں دریا کے بہاؤ کے مخالف سمت میں 36 کلومیٹر اور بہاؤ کے موافق سمت میں 48 کلومیٹر جاتی ہے۔

بتائیے کہ ساکن پانی میں کشتی کی رفتار اور دریا کے بہاؤ کی رفتار کیا ہے؟

حل: فرض کریں ساکن پانی میں کشتی کی رفتار = x کلومیٹر فی گھنٹہ اور دریا کے بہاؤ کی رفتار = y کلومیٹر فی گھنٹہ۔

اس لیے دریا کے بہاؤ کے موافق سمت میں کشتی کی رفتار = $(x + y)$ کلومیٹر فی گھنٹہ

اور دریا کے بہاؤ کے مخالف سمت میں کشتی کی رفتار = $(x - y)$ کلومیٹر فی گھنٹہ

اب، فاصلہ = رفتار × وقت ، ∴ وقت = $\frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}}$

بہاؤ کے مخالف سمت میں 16 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے لیے کشتی کو درکار وقت = $\frac{16}{x-y}$ گھنٹے

بہاؤ کے موافق سمت میں 24 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے لیے کشتی کو درکار وقت = $\frac{24}{x+y}$ گھنٹے

پہلی شرط کے مطابق،

$$\frac{16}{x-y} + \frac{24}{x+y} = 6 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

دوسری شرط کے مطابق،

$$\frac{36}{x-y} + \frac{48}{x+y} = 13 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

مساوات (I) اور (II) میں $\frac{1}{x-y} = m$ اور $\frac{1}{x+y} = n$ رکھنے پر درج ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$16m + 24n = 6 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

$$36m + 48n = 13 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

مساوات (III) اور (IV) حل کرنے پر $m = \frac{1}{4}$ اور $n = \frac{1}{12}$

مندرجہ بالا میں m اور n کی قیمتیں دوبارہ رکھنے پر ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$x - y = 4 \quad \ldots (V)$$
$$x + y = 12 \quad \ldots (VI)$$

مساوات (V) اور (VI) حل کرنے پر $x = 8$ اور $y = 4$ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

اس لیے ساکن پانی میں کشتی کی رفتار = 8 کلومیٹر فی گھنٹہ

اور دریا کے بہاؤ کی رفتار = 4 کلومیٹر فی گھنٹہ

مثال (4) : کچھ رقم چند لڑکوں میں مساوی طور پر تقسیم کی گئی۔ اگر 10 لڑکے زیادہ ہوتے تو ہر لڑکے کو 2 روپے کم ملتے اور اگر 15 لڑکے کم ہوتے تو ہر لڑکے کو 6 روپے زیادہ ملتے تو تقسیم کی گئی رقم کتنی ہے؟ اور وہ رقم کتنے لڑکوں میں تقسیم کی گئی؟

حل : فرض کریں، لڑکوں کی تعداد x ہے اور ہر لڑکے کو ملنے والی رقم y روپے ہے۔

اس لیے تقسیم کی گئی کل رقم xy روپے ہوگی۔

پہلی شرط کے مطابق ،

$$(x + 10)(y - 2) = xy$$
$$\therefore \quad xy - 2x + 10y - 20 = xy$$
$$\therefore \quad -2x + 10y = 20$$
$$\therefore \quad -x + 5y = 10 \quad \ldots (I)$$

دوسری شرط کے مطابق ،

$$(x - 15)(y + 6) = xy$$
$$\therefore \quad xy + 6x - 15y - 90 = xy$$
$$\therefore \quad 6x - 15y = 90$$
$$\therefore \quad 2x - 5y = 30 \quad \ldots (II)$$

مساوات (I) اور (II) کی جمع کرنے پر ،

$$\begin{array}{r} -x + 5y = 10 \\ + \quad 2x - 5y = 30 \\ \hline x = 40 \end{array}$$

$x = 40$ ، مساوات (I) میں رکھنے پر ،

$$-x + 5y = 10$$
$$\therefore \quad -40 + 5y = 10$$
$$\therefore \quad 5y = 50$$

$\therefore \quad y = 10$

$\therefore$ کل رقم $= xy = 40 \times 10 = ₹\,400$

$\therefore$ 40 لڑکوں کو 400 روپے تقسیم کیے گئے۔

مثال (5) : تین ہندسی ایک عدد، اس کے ہندسوں کے مجموعے کا 17 گنا ہے۔ اصل عدد میں 198 جمع کرنے پر ہندسوں کے مقام کی آپسی تبدیلی سے دوسرا عدد حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح اکائی اور سیکڑہ کے مقام کے ہندسوں کا مجموعہ، درمیانی ہندسے سے 1 کم ہے۔ وہ تین ہندسی عدد معلوم کیجیے۔

حل : فرض کریں، اصل تین ہندسی عدد میں سیکڑہ کا ہندسہ x اور اکائی کا ہندسہ y ہے۔

سروں کے ہندسوں کے مجموعے سے ایک زیادہ = دہائی کا (درمیانی) ہندسہ

سیکڑہ	دہائی	اکائی
x	$x + y + 1$	y

$\therefore$ اصل تین ہندسی عدد $= 100x + 10(x + y + 1) + y$

$= 100x + 10x + 10y + 10 + y \quad = 110x + 11y + 10$

اصل عدد کے ہندسوں کا مجموعہ $= x + (x + y + 1) + y = 2x + 2y + 1$

اصل تین ہندسی عدد $= 17 \times$ (ہندسوں کا مجموعہ) ... (پہلی شرط کے مطابق)

$\therefore \quad 110x + 11y + 10 = 17 \times (2x + 2y + 1)$

$\therefore \quad 110x + 11y + 10 = 34x + 34y + 17$

$\therefore \quad 76x - 23y = 7 \quad \ldots (I)$

اصل عدد کے ہندسوں کا مقام اُلٹ کر ملنے والا نیا عدد

$= 100y + 10(x + y + 1) + x = 110y + 11x + 10$

اصل عدد $= 110x + 11y + 10$

دی ہوئی دوسری شرط کے مطابق ہندسوں کے مقام کی آپسی تبدیلی سے ملنے والا عدد = اصل عدد $+ 198$

$\therefore \quad 110x + 11y + 10 + 198 = 110y + 11x + 10$

$\therefore \quad 99x - 99y = -198$

$\therefore \quad x - y = -2$

یعنی، $\quad x = y - 2 \quad \ldots (II)$

مساوات (II) میں حاصل ہونے والی x کی قیمت مساوات (I) میں رکھنے پر،

$\therefore \quad 76(y - 2) - 23y = 7$

$\therefore \quad 76y - 152 - 23y = 7$

$53y = 159$

$\therefore\ y = 3$ ، $\therefore$ اکائی کا ہندسہ $= 3$

$y = 3$، قیمت مساوات (II) میں رکھنے پر،

$x = y - 2$

$\therefore\ x = 3 - 2 = 1$

$\therefore\ x = 1$ ، $\therefore$ سیکڑہ کا ہندسہ $= 1$

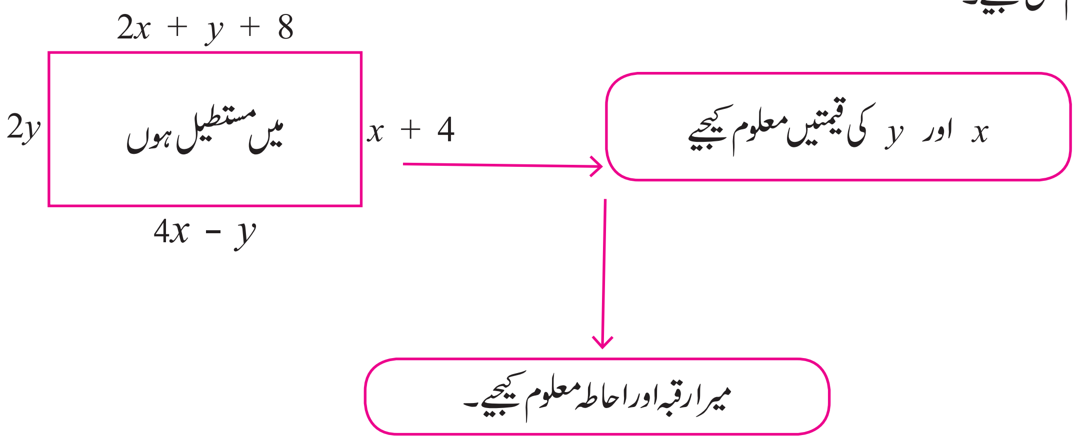
دہائی کا ہندسہ = درمیانی ہندسہ $= x + y + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$

اس لیے اصل تین ہندسی عدد = 153

مشقی سیٹ 1.5

.1 دو اعداد کا فرق 3 ہے۔ بڑے عدد کے تین گنا اور چھوٹے عدد کے دگنا کا مجموعہ 19 ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔

.2 عملی کام مکمل کیجیے۔



.3 والد کی عمر میں بیٹے کی عمر کا دگنا ملانے پر حاصل جمع 70 ہوتا ہے اور بیٹے کی عمر میں والد کی عمر کا دگنا ملانے پر حاصل جمع 95 ہوتا ہے۔ دونوں کی عمریں معلوم کیجیے۔

.4 ایک کسر کا نسب نما اس کے شمار کنندہ کے دگنا سے 4 بڑا ہے۔ اگر شمار کنندہ اور نسب نما دونوں سے 6 کم کریں تو نسب نما، شمار کنندہ کا 12 گنا ہوتا ہے۔ وہ کسر معلوم کیجیے۔

.5 10 ٹن کی گنجائش رکھنے والے بار بردار ٹرک میں A اور B دو قسم کے مخصوص وزن کے بکس رکھے گئے ہیں۔ اگر A قسم کے 150 بکس اور B قسم کے 100 بکس رکھیں تو ٹرک کی گنجائش 10 ٹن پوری ہو جاتی ہے۔ اگر A قسم کے 260 بکس رکھیں تو ٹرک کی گنجائش 10 ٹن پوری ہونے کے لیے B قسم کے 40 بکس کی ضرورت ہوتی ہے تو ہر قسم کے بکس کا وزن معلوم کیجیے۔

.6★ ماجد نے 1900 کلومیٹر سفر کرنے کے دوران کچھ فاصلہ بس کے ذریعے اور باقی فاصلہ ہوائی جہاز کے ذریعے پورا کیا۔ بس کی اوسط رفتار 60 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے اور ہوائی جہاز کی اوسط رفتار 700 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔ اگر اس سفر کے لیے 5 گھنٹے لگے ہوں تو ماجد نے بس کے ذریعے کتنے کلومیٹر سفر کیا؟

مجموعۂ سوالات 1

.1 درج ذیل سوالوں کے لیے دیے ہوئے متبادل جوابات سے صحیح متبادل کا انتخاب کیجیے۔

(1) $4x + 5y = 19$ کی ترسیم بنانے کے لیے $x = 1$ ہو تو y کی قیمت کیا ہوگی؟

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) -3

(2) x اور y کی صورت میں دی ہوئی ہمزاد مساوات کے لیے اگر $D_x = 49$ ، $D_y = -63$ ، $D = 7$ ہو تو $x = ?$

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{-1}{7}$

(3) مربع قالب $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}$ کی قیمت کیا ہے؟

(A) -1 (B) -41 (C) 41 (D) 1

(4) $x + y = 3 \; ; \; 3x - 2y - 4 = 0$ ہمزاد مساواتیں حل کرنے کے لیے D کی قیمت کیا ہے؟

(A) 5 (B) 1 (C) -5 (D) -1

(5) $ax + by = c$ اور $mx + ny = d$ ہمزاد مساواتوں میں اگر $an \neq bm$ ہو تو دی ہوئی ہمزاد مساواتوں کا -

(A) ایک ہی مشترک حل ہے (B) حل نہیں ہے (C) لاتعداد حل ہیں (D) صرف دو حل ہیں

.2 $2x - 6y = 3$ مساوات کی ترسیم کھینچنے کے لیے درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

x	-5	☐
y	☐	0
(x, y)	☐	☐

.3 درج ذیل ہمزاد مساواتیں ترسیمی طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $2x + 3y = 12 \; ; \; x - y = 1$

(2) $x - 3y = 1 \; ; \; 3x - 2y + 4 = 0$

(3) $5x - 6y + 30 = 0 \; ; \; 5x + 4y - 20 = 0$

(4) $3x - y - 2 = 0 \; ; \; 2x + y = 8$

(5) $3x + y = 10 \; ; \; x - y = 2$

.4 درج ذیل مربع قالبوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

5. درج ذیل ہمزاد مساواتیں کرامر کے طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $6x - 3y = -10$; $3x + 5y - 8 = 0$

(2) $4m - 2n = -4$; $4m + 3n = 16$

(3) $3x - 2y = \frac{5}{2}$; $\frac{1}{3}x + 3y = -\frac{4}{3}$

(4) $7x + 3y = 15$; $12y - 5x = 39$

(5) $\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x-y}{4}$

6. درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(1) $\frac{2}{x}+\frac{2}{3y}=\frac{1}{6}$; $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=0$

(2) $\frac{7}{2x+1}+\frac{13}{y+2}=27$; $\frac{13}{2x+1}+\frac{7}{y+2}=33$

(3) $\frac{148}{x}+\frac{231}{y}=\frac{527}{xy}$; $\frac{231}{x}+\frac{148}{y}=\frac{610}{xy}$

(4) $\frac{7x-2y}{xy}=5$; $\frac{8x+7y}{xy}=15$

(5) $\frac{1}{2(3x+4y)}+\frac{1}{5(2x-3y)}=\frac{1}{4}$; $\frac{5}{(3x+4y)}-\frac{2}{(2x-3y)}=-\frac{3}{2}$

7. درج ذیل عبارتی سوالات حل کیجیے۔

(1) ایک دو ہندسی عدد اور اس کے ہندسوں کے مقام کی ادل بدل کرنے سے حاصل ہونے والے عدد کا مجموعہ 143 ہے۔ اگر دیے ہوئے عدد میں اکائی کا ہندسہ، دہائی کے ہندسے سے 3 زیادہ ہو تو اصل عدد کیا ہے؟

فرض کریں، اصل عدد میں اکائی کا ہندسہ $= x$

اور دہائی کا ہندسہ $= y$

∴ اصل عدد $= \square y + x$

ہندسوں کے مقام کی ادل بدل کرنے سے حاصل ہونے والا عدد $= \square x + y$

پہلی شرط کے مطابق،

دو ہندسی عدد + ہندسوں کے مقام کی ادل بدل کرنے سے حاصل ہونے والا عدد $= 143$

$$\boxed{10y + x} + \square = 143$$

$$\square x + \square y = 143$$

$$x + y = \square \quad \ldots \text{(I)}$$

دوسری شرط کے مطابق،

اکائی کا ہندسہ = دہائی کا ہندسہ + 3

$$x = \square + 3$$

$$x - y = 3 \quad \ldots \text{(II)}$$

(I) اور (II) کی جمع کرنے پر ،

$2x = \square \quad , \quad \therefore \quad x = 8$

$x = 8$ مساوات (I) میں رکھنے پر ،

$x + y = 13$

$8 + \square = 13$

$\therefore \quad y = \square$

اصل دو ہندسی عدد $= 10y + x$

$= \square + 8 = 58$

(2) سعیدہ نے ایک دکان سے ڈیڑھ کلوگرام چائے پتی اور پانچ کلوگرام شکر خریدی۔ دکان تک جا کر واپس آنے کے لیے 50 روپے رکشے کا کرایہ لگا۔ اس کے لیے اس کے کل 700 روپے خرچ ہوئے۔ بعد میں اسے سمجھ میں آیا کہ وہی چیزیں آن لائن منگانے پر اتنی ہی قیمت میں گھر پہنچ جاتیں۔ اگلے مہینے اس نے 2 کلوگرام چائے پتی اور 7 کلوگرام شکر آن لائن منگائی۔ اس کے لیے اسے 880 روپے خرچ ہوئے تو چائے پتی اور شکر کا فی کلوگرام نرخ معلوم کیجیے۔

(3) نازیہ کے پاس 100 روپے والے x اور 50 روپے والے y نوٹ ہیں۔

نازیہ کو عابد نے مندرجہ بالا نوٹوں کی صورت میں 2500 روپے دیے۔
مساوات . . . . (I)

عابد نے ان نوٹوں کی تعداد میں آپسی تبدیلی کرکے رقم دی ہوتی تو 500 روپے کم ہوجاتے۔
مساوات . . . . (II)

مساوات حل کرکے جواب لکھیے۔

100 روپے والے نوٹوں کی تعداد $= \square$ ، 50 روپے والے نوٹوں کی تعداد $= \square$

(4) منیشا اور سویتا کی موجودہ عمروں کا مجموعہ 31 سال ہے۔ 3 سال قبل منیشا کی عمر، سویتا کی اس وقت کی عمر کا چار گنا تھی تو دونوں کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

(5)* ایک کارخانے میں ہنرمند اور بے ہنر مزدوروں کی مزدوری کی نسبت 3 : 5 ہے۔ ایک ہنرمند اور ایک بے ہنر مزدور کی ایک دن کی کل مزدوری 720 روپے ہے تو ہر ہنرمند اور بے ہنر مزدوروں کی ایک دن کی مزدوری معلوم کیجیے۔

(6)* ایک سیدھے راستے پر A اور B دو مقامات ہیں۔ ان کے درمیان فاصلہ 30 کلومیٹر ہے۔ حامد موٹر سائیکل کے ذریعے مقام A سے مقام B کی جانب روانہ ہوا۔ اسی وقت جوزف مقام B سے مقام A کی جانب روانہ ہوا۔ دونوں 20 منٹ بعد ایک دوسرے سے ملے۔ اگر جوزف اسی وقت نکل کر مخالف سمت میں جاتا تو اس کو حامد 3 گھنٹے میں ملتا تو ہر ایک کی رفتار کیا ہوگی؟

N6V6P5