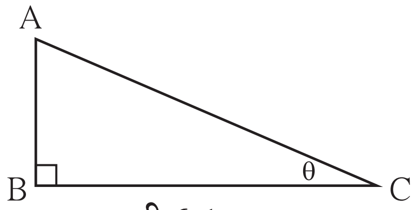
6 त्रिकोणमिती

चला, शिकूया.

- त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे
- त्रिकोणमितीय नित्यसमानता
- उन्नतकोन व अवनत कोन
- उंची व अंतरे यांवरील उदाहरणे

जरा आठवूया.

1. सोबतच्या आकृतीवरून रिकाम्या जागा भरा.



आकृती 6.1

$\sin\theta = \frac{\square}{\square}$, $\cos\theta = \frac{\square}{\square}$,

$\tan\theta = \frac{\square}{\square}$

2. पुढील गुणोत्तरांमधील संबंध पूर्ण करा.

(i) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \square$ (ii) $\sin\theta = \cos(90 - \square)$

(iii) $\cos\theta = \sin(90 - \square)$ (iv) $\tan\theta \tan(90 - \theta) = \square$

3. पुढील समीकरण पूर्ण करा.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \square$

4. पुढील त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या किमती लिहा.

(i) $\sin 30^\circ = \frac{1}{\square}$ (ii) $\cos 30^\circ = \frac{\square}{\square}$ (iii) $\tan 30^\circ = \frac{\square}{\square}$

(iv) $\sin 60^\circ = \frac{\square}{\square}$ (v) $\cos 45^\circ = \frac{\square}{\square}$ (vi) $\tan 45^\circ = \square$

इयत्ता नववीमध्ये आपण लघुकोनाची काही त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे अभ्यासली आहेत. यावर्षी लघुकोनाचीच आणखी काही त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे आपण अभ्यासणार आहोत.

जाणून घेऊया.

कोसेक, सेक आणि कॉट गुणोत्तरे (cosec, sec and cot ratios)

कोनाच्या साइन गुणोत्तराच्या व्यस्त गुणोत्तराला कोसीकँट (cosecant) गुणोत्तर म्हणतात.

ते थोडक्यात cosec असे लिहितात. $\therefore$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

तसेच कोसाइन आणि टँजंट गुणोत्तरांच्या व्यस्त गुणोत्तरांना अनुक्रमे सीकँट (secant) आणि कोटँजंट (cotangent) गुणोत्तरे म्हणतात; आणि ती थोडक्यात अनुक्रमे sec आणि cot अशी लिहितात.

$\therefore$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ आणि $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

आकृती 6.2 मध्ये,

$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$

$\therefore$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$= \frac{1}{\frac{AB}{AC}}$

$= \frac{AC}{AB}$

म्हणजेच, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{संमुख बाजू}}$

$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

$\therefore$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

$= \frac{1}{\frac{AB}{BC}}$

$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{लगतची बाजू}}{\text{संमुख बाजू}}$

$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$= \frac{1}{\frac{BC}{AC}}$

$= \frac{AC}{BC}$

म्हणजेच, $\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लगतची बाजू}}$

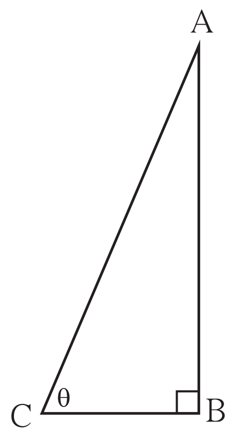
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ हे तुम्हाला माहीत आहे.

$\therefore$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

$= \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\therefore$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$



आकृती 6.2

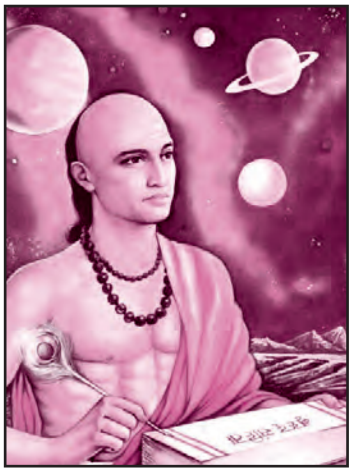
हे लक्षात ठेवूया.

त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांमधील परस्परसंबंध

cosec, sec आणि cot या गुणोत्तरांच्या व्याख्यांवरून,

- $\frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta \quad \therefore \sin\theta \times \operatorname{cosec}\theta = 1$
- $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \quad \therefore \cos\theta \times \sec\theta = 1$
- $\frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta \quad \therefore \tan\theta \times \cot\theta = 1$

अधिक माहितीसाठी



थोर भारतीय गणिती आर्यभट यांचा जन्म इ.स. 476 मध्ये कुसुमपूर येथे झाला. हे स्थान सध्याच्या बिहारमधील पाटणा या शहराजवळ होते. त्यांनी अंकगणित, बीजगणित आणि भूमिती या गणिताच्या शाखांत भरीव कार्य केले. 'आर्यभटीय' या ग्रंथात अनेक गणिती निष्कर्ष त्यांनी सूत्ररूपात लिहून ठेवले आहेत. उदाहरणार्थ,

(1) अंकगणिती श्रेढीतील n वे पद काढण्याचे आणि पहिल्या n पदांच्या बेरजेचे सूत्र

(2) $\sqrt{2}$ ची किंमत काढण्याचे सूत्र

(3) π या संख्येची 3.1416 ही चार दशांश स्थळांपर्यंत बरोबर असेलली किंमत, इत्यादी.

खगोलशास्त्राच्या अभ्यासात त्यांनी त्रिकोणमितीचा वापर केला आणि ***ज्या गुणोत्तर*** (sine ratio) ही संकल्पना प्रथमच वापरली.

जगातील गणिताच्या त्यांच्या काळातील ज्ञानाचा विचार करता त्यांची गणितातील कामगिरी उत्तुंग होती. त्यामुळे त्यांच्या ग्रंथाचा प्रसार संपूर्ण भारतात, तसेच अरबस्तानामार्फत युरोपमध्येही झाला होता.

पृथ्वी स्थिर असून सूर्य, चंद्र व तारे विशिष्ट क्रमाने पृथ्वीभोवती फिरतात असेच त्याकाळच्या सर्व निरीक्षकांचे मत होते. परंतु नावेतून जाणाऱ्याला काठावरील झाडे व वस्तू उलट दिशेला जात असल्याचा भास होतो, तसाच भास सूर्य, तारे इत्यादींबाबत पृथ्वीवरील लोकांना होतो; म्हणजे पृथ्वी भ्रमण करते असे आर्यभटीयात लिहिले आहे.

19 एप्रिल 1975 या दिवशी भारताने आपला पहिला उपग्रह अवकाशात प्रक्षेपित केला. या उपग्रहाला 'आर्यभट' हे नाव देऊन देशाने या श्रेष्ठ गणितीचा यथोचित गौरवच केला.

✲ 0°,30°,45°,60° आणि 90° मापाच्या कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांची सारणी.

त्रिकोणमितीय गुणोत्तर	कोनाचे माप (θ)				
	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ठरवता येत नाही
cosec θ $= \frac{1}{\sin\theta}$	ठरवता येत नाही	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec θ $= \frac{1}{\cos\theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	ठरवता येत नाही
cot θ $= \frac{1}{\tan\theta}$	ठरवता येत नाही	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

जाणून घेऊया.

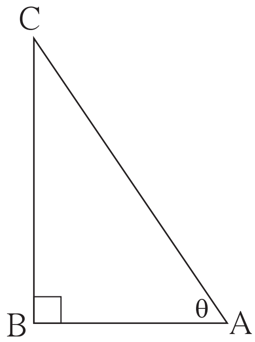
त्रिकोणमितीय नित्यसमानता (Trigonometrical identities)

सोबतच्या आकृती 6.3 मध्ये Δ ABC या काटकोन त्रिकोणात, ∠B= 90°

(i) $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$ (ii) $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$

(iii) $\tan\theta = \frac{BC}{AB}$ (iv) $\text{cosec}\theta = \frac{AC}{BC}$

(v) $\sec\theta = \frac{AC}{AB}$ (vi) $\cot\theta = \frac{AB}{BC}$



आकृती 6.3

तसेच, पायथागोरसच्या सिद्धांतानुसार,

$BC^2 + AB^2 = AC^2$ . . . . .(I)

समीकरण (I) च्या दोन्ही बाजूंस AC^2 ने भागून

$$\frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$\therefore \quad \dfrac{BC^2}{AC^2} + \dfrac{AB^2}{AC^2} = 1$

$\therefore \quad \left(\dfrac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 = 1$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ .... [$(\sin\theta)^2$ हे $\sin^2\theta$ असे आणि $(\cos\theta)^2$ हे $\cos^2\theta$ असे लिहितात.]

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ .... (II)

आता समीकरण (II) च्या दोन्ही बाजूंस $\sin^2\theta$ ने भागून

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ .... (III)

तसेच, समीकरण (II) च्या दोन्ही बाजूंस $\cos^2\theta$ ने भागून

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ .... (IV)

समीकरण (II), (III), व (IV) या मूलभूत त्रिकोणमितीय नित्यसमानता आहेत.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) जर $\sin\theta = \dfrac{20}{29}$ असेल तर $\cos\theta$ ची किंमत काढा.

उकल : रीत I

आपणास माहीत आहे की

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\left(\dfrac{20}{29}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\dfrac{400}{841} + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \dfrac{400}{841}$

$= \dfrac{441}{841}$

दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन.

$\therefore \cos\theta = \dfrac{21}{29}$

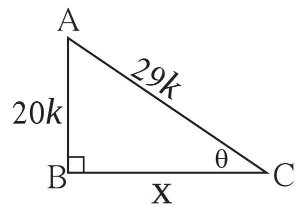
रीत II

$\sin\theta = \dfrac{20}{29}$

आकृतीवरून $\sin\theta = \dfrac{AB}{AC}$

$\therefore$ AB = $20k$ व AC = $29k$

BC = x मानू.



आकृती 6.4

पायथागोरसच्या सिद्धांताने

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$(20k)^2 + x^2 = (29k)^2$

$400k^2 + x^2 = 841k^2$

$x^2 = 841k^2 - 400k^2$

$= 441k^2$

$\therefore x = 21k$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{21k}{29k} = \dfrac{21}{29}$

उदा. (2) जर $\sec\theta = \frac{25}{7}$ तर $\tan\theta$ ची किंमत काढ़ा.

उकल : **रीत I**

आपणास माहीत आहे की,

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore\ 1 + \tan^2\theta = \left(\frac{25}{7}\right)^2$

$\therefore\ \tan^2\theta = \frac{625}{49} - 1$

$= \frac{625-49}{49}$

$= \frac{576}{49}$

$\therefore\ \tan\theta = \frac{24}{7}$

रीत II

आकृतीवरून,

$\sec\theta = \frac{PR}{PQ}$

$\therefore\ PQ = 7k,\ PR = 25k$

पायथागोरसच्या प्रमेयाने,

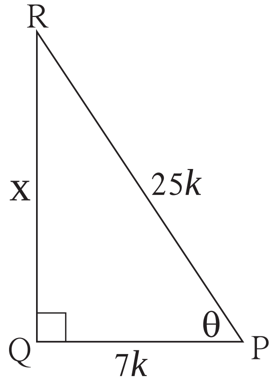
$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

$\therefore\ (7k)^2 + QR^2 = (25k)^2$

$\therefore\ QR^2 = 625k^2 - 49k^2 = 576k^2$

$\therefore\ QR = 24k$

आता, $\tan\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$



आकृती 6.5

उदा. (3) जर $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$ असेल तर $\sec\theta$ आणि $\text{cosec}\theta$ च्या किंमत काढा.

उकल : $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$

$\therefore\ 5\sin\theta = 12\cos\theta$

$\therefore\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5}$

$\therefore\ \tan\theta = \frac{12}{5}$

आपणास माहीत आहे की,

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore\ 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \sec^2\theta$

$\therefore\ 1 + \frac{144}{25} = \sec^2\theta$

$\therefore\ \frac{25+144}{25} = \sec^2\theta$

$\therefore\ \sec^2\theta = \frac{169}{25}$

$\therefore\ \sec\theta = \frac{13}{5}$

$\therefore\ \cos\theta = \frac{5}{13}$

आता, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore\ \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\therefore\ \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$

$= 1 - \frac{25}{169}$

$= \frac{144}{169}$

$\therefore\ \sin\theta = \frac{12}{13}$

$\therefore\ \text{cosec}\theta = \frac{13}{12}$

उदा. (4) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तर $\frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta}$ ची किंमत काढा.

उकल : **रीत I**

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \therefore \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \sin^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore \sin^2\theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \operatorname{cosec}\theta = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

रीत II

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ हे माहीत आहे.

$\therefore \quad \theta = 30^\circ$

$\therefore \sec\theta = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

उदा. (5) दाखवा की, $\sec x + \tan x = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

उकल : $\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

उदा. (6) पुढील समीकरणांतून θ चे निरसन करा.

$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta$

$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta$

उकल :

$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta$ .... (I)

$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta$ .... (II)

समीकरण (I) व (II) यांची बेरीज करून.

$x + y = 2a \cot\theta$

$\therefore \cot\theta = \frac{x+y}{2a}$ .... (III)

समीकरण (II) मधून (I) वजा करून,

$y - x = 2b \operatorname{cosec}\theta$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{y-x}{2b}$ .... (IV)

आता, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$$\therefore \left(\frac{y-x}{2b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{2a}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{(y-x)^2}{4b^2} - \frac{(y+x)^2}{4a^2} = 1$$

किंवा $\left(\frac{y-x}{b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{a}\right)^2 = 4$

सरावसंच 6.1

1. जर $\sin\theta = \frac{7}{25}$ तर $\cos\theta$ व $\tan\theta$ च्या किमती काढा.

2. जर $\tan\theta = \frac{3}{4}$ तर $\sec\theta$ व $\cos\theta$ च्या किमती काढा.

3. जर $\cot\theta = \frac{40}{9}$ तर $\operatorname{cosec}\theta$ व $\sin\theta$ च्या किमती काढा.

4. जर $5\sec\theta - 12\operatorname{cosec}\theta = 0$ असेल तर $\sec\theta$, $\cos\theta$ व $\sin\theta$ च्या किमती शोधा.

5. जर $\tan\theta = 1$ तर $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta}$ ची किंमत काढा.

6. सिद्ध करा.

   (1) $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

   (2) $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$

(3) $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

(4) $(\sec\theta - \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta) = \tan\theta \sec\theta$

(5) $\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \sec\theta$

(6) $\frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

(7) $\sin^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$

(8) $\sec\theta + \tan\theta = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

(9) जर $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 2$ तर दाखवा की $\tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} = 2$

(10) $\frac{\tan A}{(1+\tan^2 A)^2} + \frac{\cot A}{(1+\cot^2 A)^2} = \sin A \cos A$

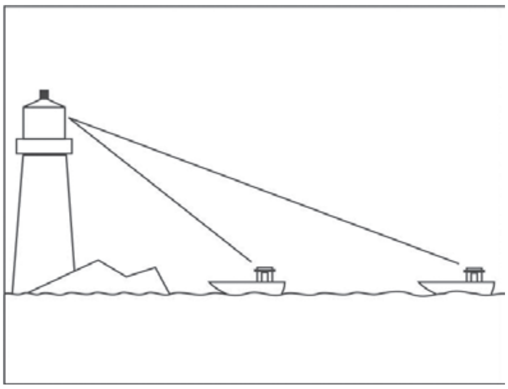
(11) $\sec^4 A\,(1 - \sin^4 A) - 2\tan^2 A = 1$

(12) $\frac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\tan\theta + \sec\theta + 1}{\tan\theta + \sec\theta - 1}$

जाणून घेऊया.

त्रिकोणमितीचे उपयोजन (Application of trigonometry)

बरेचदा आपल्याला मनोऱ्याची, इमारतीची किंवा झाडाची उंची, तसेच जहाजाचे दीपगृहापासूनचे अंतर किंवा नदीच्या पात्राची रुंदी इत्यादी जाणावी लागतात. ही अंतरे आपण प्रत्यक्षात मोजू शकत नाही परंतु त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांचा उपयोग करून उंची किंवा अंतरे ठरवू शकतो.



आकृती 6.6

उंची किंवा अंतरे ठरविण्यासाठी, दिलेली माहिती दर्शविणारे कच्चे चित्र आपण आधी तयार करू. झाडे, टेकड्या, मनोरे अशा वस्तू जमिनीला लंब आहेत, हे दाखवण्यासाठी आपण आकृतीत लंब रेषाखंडांचा उपयोग करू. आपण निरीक्षकाची उंची लक्षात घेणार नाही, सामान्यपणे निरीक्षकाची दृष्टी क्षितिजसमांतर आहे असे मानू.

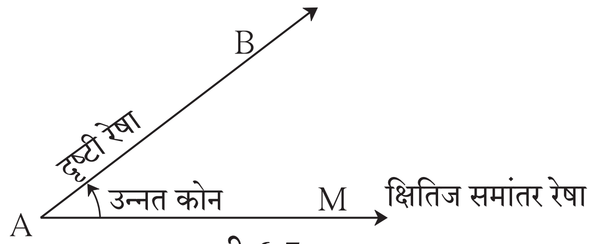
प्रथम आपण काही संबधित संज्ञांचा अभ्यास करू

(i) दृष्टीरेषा (Line of vision) :

बिंदू 'A' या ठिकाणी उभा असलेला निरीक्षक बिंदू 'B' कडे पाहत असेल तर रेषा AB ला दृष्टी रेषा म्हणतात.

(ii) उन्नतकोन (Angle of elevation) :

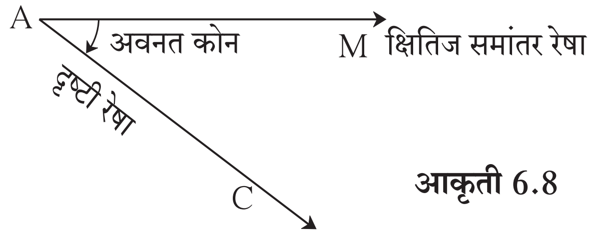
AM ही निरीक्षकाची सामान्य दृष्टीरेषा क्षितिज - समांतर आहे. निरीक्षण करण्याचा बिंदू B, हा A च्या तुलनेत अधिक उंचीवर असेल तर AB ही दृष्टीरेषा, रेषा AM शी जो कोन करते तो उन्नत कोन असतो. आकृतीत $\angle$ MAB हा उन्नत कोन आहे.



आकृती 6.7

(iii) अवनत कोन (Angle of depression) :

निरीक्षण करण्याचा बिंदू C हा रेषा AM या क्षितीजसमांतर रेषेच्या खाली असेल तर AC ही दृष्टीरेषा, रेषा AM शी अवनत कोन करते. आकृतीत $\angle$ MAC हा अवनत कोन आहे.



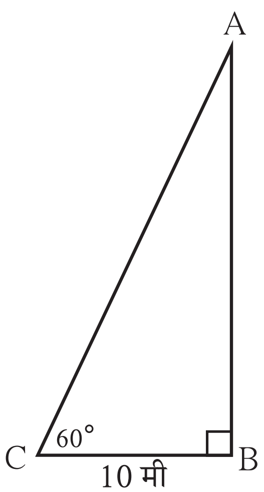
आकृती 6.8

जेव्हा आपण क्षितीज समांतर रेषेच्या वरच्या दिशेला पाहतो तेव्हा होणारा कोन उन्नतकोन असतो.
जेव्हा आपण क्षितीज समांतर रेषेच्या खालच्या दिशेला पाहतो तेव्हा होणारा कोन अवनतकोन असतो.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका झाडाच्या बुंध्यापासून 10 मी. अंतरावर असणाऱ्या निरीक्षकास झाडाच्या शेंड्याकडे पाहताना 60°मापाचा उन्नत कोन करावा लागतो. तर झाडाची उंची किती ? ($\sqrt{3}$ = 1.73)

उकल : आकृती 6.9 मध्ये C बिंदूजवळ निरीक्षक असून AB हे झाड आहे.



आकृती 6.9

AB = h = झाडाची उंची.

निरीक्षकाचे झाडापासूनचे अंतर BC = 10 मी.

आणि उन्नत कोन (θ)$\angle$ BCA= 60°

आकृतीवरुन, $\tan\theta = \frac{AB}{BC}$ .... (I)

$\tan 60° = \sqrt{3}$ .... (II)

$\therefore \frac{AB}{BC} = \sqrt{3}$ .... (I) व (II) वरून

$\therefore AB = BC\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$\therefore AB = 10 \times 1.73 = 17.3$ मी

$\therefore$ झाडाची उंची 17.3 मी. आहे.

उदा. (2) 40 मी उंच इमारतीच्या छतावरून, त्या इमारतीपासून काही मीटर अंतरावर उभ्या केलेल्या स्कूटरकडे पाहताना 30° मापाचा अवनतकोन होतो, तर ती स्कूटर इमारतीपासून किती दूर उभी आहे? ($\sqrt{3} = 1.73$)

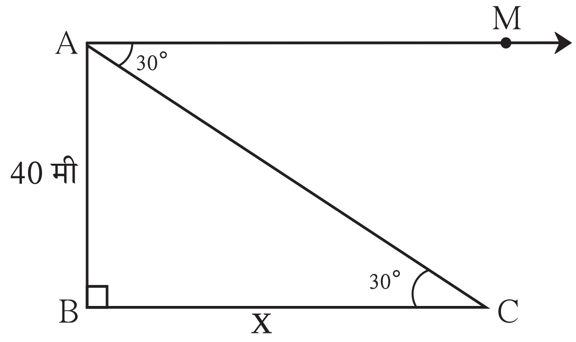
उकल : आकृती 6.10 मध्ये रेख AB ही इमारत आहे. इमारती पासून 'x' मी अंतरावर 'C' या ठिकाणी स्कूटर उभी आहे.

आकृतीत A या ठिकाणी निरीक्षक आहे.

AM ही क्षितीज समांतर रेषा आहे.

$\angle MAC$ हा अवनत कोन आहे.

$\angle MAC$ व $\angle ACB$ हे व्युत्क्रम कोन एकरूप आहेत, हे लक्षात घ्या.



आकृती 6.10

आकृतीवरुन, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$

$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40}{x}$

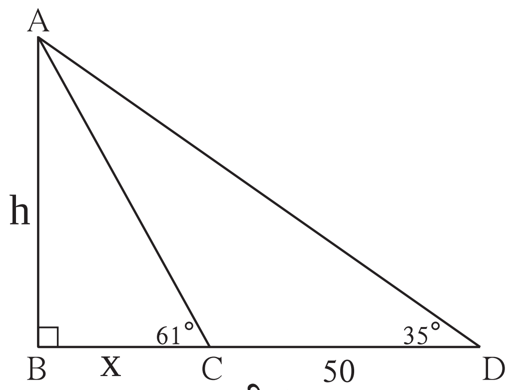
$\therefore \quad x = 40\sqrt{3}$

$= 40 \times 1.73$

$= 69.20$ मी.

$\therefore$ ती स्कूटर इमारतीपासून 69.20 मी. अंतरावर उभी आहे.

उदा. (3) नदीच्या पात्राची रुंदी काढण्यासाठी एका माणसाने पात्राच्या एका काठावरून विरुद्ध काठावर असणाऱ्या मनोऱ्याच्या वरच्या टोकाकडे पाहिले असता 61° मापाचा उन्नतकोन होतो. त्याच रेषेत नदीच्या पात्रापासून 50 मी अंतर मागे जाऊन पुन्हा मनोऱ्याच्या वरच्या टोकाकडे पाहिले असता 35° मापाचा उन्नत कोन होतो, तर नदीपात्राची रुंदी आणि मनोऱ्याची उंची काढा. ($\tan 61^\circ \approx 1.8$, $\tan 35^\circ \approx 0.7$)



आकृती 6.11

उकल : रेख AB पैलतीरावरील मनोरा दाखवतो. 'A' हे मनोऱ्याचे टोक असून रेख BC नदीच्या पात्राची रुंदी दाखवतो.

मनोऱ्याची उंची h मी व नदी पात्राची रुंदी x मी मानू.

आकृतीवरून $\tan 61^\circ = \frac{h}{x}$

$$\therefore\ 1.8 = \frac{h}{x}$$

$h = 1.8 \times x$

$10h = 18x$ .... (I)..... 10 ने गुणून

काटकोन Δ ABD मध्ये,

तसेच, $\tan 35 = \frac{h}{x + 50}$

$$0.7 = \frac{h}{x + 50}$$

$\therefore\quad h = 0.7\ (x + 50)$

$\therefore\quad 10h = 7\ (x + 50)$ .... (II)

[(I) व (II) वरून]

$18x = 7(x + 50)$

$\therefore\ 18x = 7x + 350$

$\therefore\ 11x = 350$

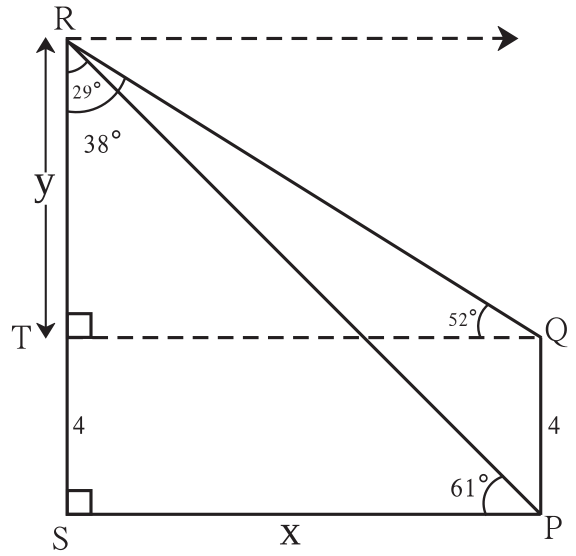
$\therefore\quad x = \frac{350}{11} = 31.82$

आता, $h = 1.8x = 1.8 \times 31.82$

$= 57.28$ मी.

$\therefore$ पात्राची रुंदी = 31.82 मी. मनोऱ्याची उंची = 57.28 मी.

उदा. (4) रोशनी घराच्या दारात उभी होती. घरापासून थोड्या अंतरावरील झाडाच्या शेंड्यावर एक गरूड बसलेला तिला दिसला, तेव्हा तिच्या दृष्टीचा उन्नतकोन 61° होता. तो आणखी नीट दिसावा म्हणून ती घराच्या 4 मीटर उंचीवर असलेल्या गच्चीवर गेली. तेथून पाहताना तिच्या दृष्टीचा उन्नत कोन 52° होता. तर तो गरूड जमिनीपासून किती उंचीवर होता? (उत्तर जवळच्या पूर्णांकापर्यंत काढा.)



आकृती 6.12

($\tan 61^\circ = 1.80$, $\tan 52^\circ = 1.28$, $\tan 29^\circ = 0.55$, $\tan 38^\circ = 0.78$)

उकल : समजा, आकृती 6.12 मध्ये PQ हे घर आणि SR हे झाड आहे. गरुडाचे स्थान R पाशी आहे.

रेख QT $\perp$ रेख RS काढला.

$\therefore$ $\square$ TSPQ हा आयत आहे.

SP = x मानू. TR = y मानू.

आता, Δ RSP मध्ये, $\angle$ PRS = $90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$

तसेच, Δ RTQ मध्ये, $\angle$ QRT = $90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$

$\therefore \tan \angle PRS = \tan 29^\circ = \dfrac{SP}{RS}$

$\therefore 0.55 = \dfrac{x}{y+4}$

$\therefore x = 0.55(y + 4)$ .... (I)

तसेच, $\tan \angle QRT = \dfrac{TQ}{RT}$

$\therefore \tan 38^\circ = \dfrac{x}{y}$ .... [$\because$ SP = TQ = x]

$\therefore 0.78 = \dfrac{x}{y}$

$\therefore x = 0.78y$ .... (II)

$\therefore 0.78y = 0.55(y + 4)$ .... (I) व (II) वरून

$\therefore 78y = 55(y + 4)$

$\therefore 78y = 55y + 220$

$\therefore 23y = 220$

$\therefore y = 9.565 = 10$ (जवळच्या पूर्णांकापर्यंत)

$\therefore RS = y + 4 = 10 + 4 = 14$

$\therefore$ गरूड जमिनीपासून 14 मीटर उंचीवर होता.

उदा. (5) वादळामुळे एक झाड मोडले आणि झाडाचा शेंडा जमिनीवर टेकला. मोडलेला भाग जमिनीशी 30° चा कोन करतो. झाडाचा शेंडा आणि बुंधा यांमधील अंतर 10 मी असल्यास झाडाची उंची काढा.

उकल : समजा, आकृती 6.13 मध्ये AB या झाडाचा शेंडा 'A' आहे. वादळामुळे झाड 'C' या ठिकाणी मोडल्यामुळे D या ठिकाणी शेंडा टेकला.

$\angle$ CDB = 30°, BD = 10 मी, BC = x मी

CA= CD = y मी

काटकोन Δ CDB मध्ये,

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

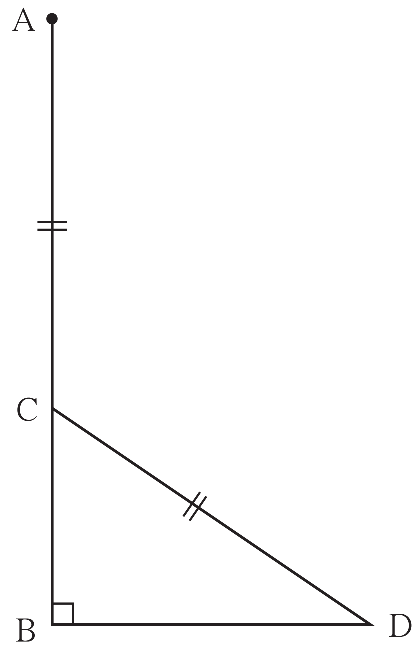
$$y = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = 10\sqrt{3}$$

झाडाची उंची $10\sqrt{3}$ मी आहे.



आकृती 6.13

सरावसंच 6.2

1. एक व्यक्ती एका चर्चपासून 80 मी अंतरावर उभी आहे. त्या व्यक्तीने चर्चच्या छताकडे पाहिले असता 45° मापाचा उन्नत कोन होतो, तर चर्चची उंची किती?

2. दीपगृहावरून एका जहाजाकडे पाहताना 60° मापाचा अवनत कोन होतो. जर दीपगृहाची उंची 90 मी असेल तर ते जहाज दीपगृहापासून किती अंतरावर आहे? ($\sqrt{3} = 1.73$)

3. 12 मी रुंदीच्या रस्त्याच्या दुतर्फा समोरासमोर दोन इमारती आहेत. त्यांपैकी एकीची उंची 10 मी असून तिच्या छतावरून दुसरीच्या छताकडे पाहिले असता उन्नत कोन 60° मापाचा होतो, तर दुसऱ्या इमारतीची उंची किती?

4. 18 मी व 7 मी उंचीचे खांब जमिनीवर उभे आहेत. त्यांच्या वरच्या टोकांना जोडणाऱ्या तारेची लांबी 22 मी आहे, तर त्या तारेने क्षितीज समांतर पातळीशी केलेल्या कोनाचे माप काढा.

5. वादळामुळे एक झाड मोडले आणि झाडाचा शेंडा जमिनीवर टेकला. मोडलेला भाग जमिनीशी 60° चा कोन करतो. झाडाचा शेंडा आणि बुंधा यांमधील अंतर 20 मी असल्यास झाडाची उंची काढा.

6. एक पतंग उडताना जमिनीपासून 60 मी लंबउंचीपर्यंत पोहचतो. पतंगांच्या दोऱ्याचे टोक जमिनीवर बांधले तेव्हा जमीन व दोरा यांच्या मध्ये 60° मापाचा कोन तयार होतो. दोरा कोठेही वाकलेला नाही असे गृहीत धरून दोऱ्याची लांबी काढा. ($\sqrt{3} = 1.73$)

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. दिलेल्या पर्यांयापैकी प्रश्नाच्या उत्तराचा अचूक पर्याय निवडा.

(1) $\sin\theta \ \ \mathrm{cosec}\theta$ = किती ?

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

(2) $\mathrm{cosec}45°$ ची किंमत खालीलपैकी कोणती ?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) $1 + \tan^2\theta$ = किती ?

(A) $\cot^2\theta$ (B) $\mathrm{cosec}^2\theta$ (C) $\sec^2\theta$ (D) $\tan^2\theta$

(4) जेव्हा आपण क्षितीजसमांतर रेषेच्या वरच्या दिशेने पाहतो, तेव्हा .... कोन होतो.

(A)उन्नत कोन (B)अवनत कोन (C) शून्य (D)रेषीय

2. जर $\sin\theta = \frac{11}{61}$ तर नित्यसमानतेचा उपयोग करून $\cos\theta$ ची किंमत काढा.

3. जर $\tan\theta = 2$, तर इतर त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या किमती काढा.

4. जर $\sec\theta = \frac{13}{12}$, तर इतर त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या किमती काढा.

5. सिद्ध करा.

(1) $\sec\theta\,(1 - \sin\theta)\,(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

(2) $(\sec\theta + \tan\theta)\,(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

(3) $\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \times \mathrm{cosec}^2\theta$

(4) $\cot^2\theta - \tan^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$

(5) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

(6) $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

(7) $\sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3\sec^2 x \times \tan^2 x$

(8) $\frac{\tan\theta}{\sec\theta+1} = \frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}$

(9) $\frac{\tan^3\theta-1}{\tan\theta-1} = \sec^2\theta + \tan\theta$

(10) $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}=\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

6. एक मुलगा एका इमारतीपासून 48 मीटर अंतरावर उभा आहे. त्या इमारतीच्या वरच्या टोकाकडे पाहताना त्या मुलाला 30° मापाचा उन्नतकोन करावा लागतो, तर त्या इमारतीची उंची किती ?

7. दीपगृहावरून एका जहाजाकडे पाहताना निरीक्षकाला 30° मापाचा अवनत कोन करावा लागतो. जर दीपगृहाची उंची 100 मी असेल तर ते जहाज दीपगृहापासून किती अंतरावर आहे?

8. 15 मी रुंदीच्या रस्त्याच्या दुतर्फा समोरासमोर दोन इमारती आहेत. त्यांपैकी एकीची उंची 12 मी असून तिच्या छतावरुन दुसरीच्या छताकडे पाहिले असता उन्नत कोन 30° चा होतो, तर त्या इमारतीची उंची किती ?

9. अग्निशामकदलाच्या वाहनावर बसवलेली शिडी जास्तीत जास्त 70° मापाच्या कोनातून उचलता येते. त्यावेळी तिची अधिकात अधिक लांबी 20 मी असते.शिडीचे वाहनावरील टोक जमिनीपासून 2 मी उंचीवर आहे. तर शिडीचे दुसरे टोक जमिनीपासून जास्तीत जास्त किती उंचीवर पोहोचवता येईल ? ($\sin 70^\circ \approx 0.94$)

10★. आकाशात उडत असलेल्या विमानाच्या चालकाने विमानतळावर विमान उतरविण्यास सुरूवात करताना 20° मापाचा अवनत कोन केला, तेव्हा विमानाचा सरासरी वेग ताशी 200 किमी होता. ते विमान 54 सेकंदांत विमान तळावर उतरले. विमान तळावर उतरण्यास वळण्याच्या क्षणी ते विमान जमिनीपासून किती उंचीवर होते? ($\sin 20^\circ \approx 0.342$)