2 वर्गसमीकरणे

चला, शिकूया.

- वर्गसमीकरण : ओळख
- वर्गसमीकरण सोडवण्याच्या पद्‌धती
- वर्गसमीकरणाच्या मुळांचे स्वरूप
- मुळे व सहगुणक यांतील संबंध
- वर्गसमीकरणांचे उपयोजन

जरा आठवूया.

विद्यार्थी मित्रांनो, इयत्ता नववीमध्ये आपण बहुपदी शिकलो आहोत. यामध्ये बहुपदीचे कोटीवरून होणारे प्रकार आपण अभ्यासले. एका चलातील ज्या बहुपदीची कोटी एक असते, तिला रेषीय बहुपदी आणि जिची कोटी दोन असते, तिला वर्ग बहुपदी म्हणतात.

कृती : खालील बहुपदींचे रेषीय बहुपदी आणि वर्ग बहुपदी असे वर्गीकरण करा.

$5x + 9$, $x^2 + 3x - 5$, $3x - 7$, $3x^2 - 5x$, $5x^2$

रेषीय बहुपदी	वर्ग बहुपदी

आपण आता वर्ग बहुपदीची किंमत 0 घेऊन जे समीकरण मिळते त्याचा अभ्यास करू. अशा समीकरणाला वर्गसमीकरण म्हणतात. आपण दैनंदिन जीवनात अनेक वेळा या वर्गसमीकरणांचा वापर करतो.

उदाहरण : संकेतने 200 चौमी क्षेत्रफळाचा एक आयताकृती भूखंड खरेदी केला. भूखंडाची लांबी ही त्याच्या रुंदीपेक्षा 10 मीटर जास्त होती, तर त्या भूखंडाची लांबी व रुंदी किती होती ?

समजा भूखंडाची रुंदी x मीटर आहे.

$\therefore$ लांबी = $(x + 10)$ मीटर

आयताकृती भूखंडाचे क्षेत्रफळ = लांबी $\times$ रुंदी

$\therefore\ 200 = (x + 10) \times x$

$\therefore\ 200 = x^2 + 10x$

म्हणजेच $x^2 + 10x = 200$

$\therefore\ x^2 + 10x - 200 = 0$

आता $x^2 + 10x - 200 = 0$ हे वर्गसमीकरण सोडवून आपण भूखंडाची रुंदी व लांबी ठरवू शकतो. वर्गसमीकरण कसे सोडवायचे याचा आपण अभ्यास करू.

जरा आठवूया.

कृती : $x^2 + 3x - 5$, $3x^2 - 5x$, $5x^2$; या बहुपदी घातांकरूपात लिहून त्यांतील पदांच्या सहगुणकांचे निरीक्षण करून ते रिकाम्या चौकटींत योग्य प्रकारे लिहा.

$x^2 + 3x - 5$, $3x^2 - 5x + 0$, $5x^2 + 0x + 0$

- ✦ x^2 चे सहगुणक अनुक्रमे [1], [3] व [5] आहेत. म्हणजेच 0 नाहीत.
- ✦ x चे सहगुणक अनुक्रमे 3, [   ] व [   ] आहेत.
- ✦ स्थिरपदे अनुक्रमे [   ], [   ] व [   ] आहेत.

येथे दुसऱ्या व तिसऱ्या बहुपदीमध्ये स्थिरपद 0 आहे.

जाणून घेऊया.

वर्गसमीकरणाचे सामान्य रूप (Standard form of quadratic equation)

ज्या एका चलातील समीकरणात सर्व घातांक पूर्ण संख्या असून चलाचा मोठ्यांत मोठा घातांक 2 असतो, ते वर्गसमीकरण असते.

ते सामान्य रूपात $ax^2 + bx + c = 0$ असे लिहिता येते. $ax^2 + bx + c = 0$, यामध्ये a, b व c वास्तव संख्या असून a ही शून्येतर संख्या असते.

$ax^2 + bx + c = 0$ या स्वरूपातील समीकरणास वर्गसमीकरणाचे सामान्य रूप म्हणतात.

कृती : खालील तक्ता पूर्ण करा.

वर्गसमीकरण	सामान्य रूप	a	b	c
$x^2 - 4 = 0$	$x^2 + 0x - 4 = 0$	1	0	-4
$y^2 = 2y - 7$	. . . .	. . .	. . .	. . .
$x^2 + 2x = 0$	. . . .	. . .	. . .	. . .

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) खालीलपैकी कोणती समीकरणे वर्गसमीकरणे आहेत ते ठरवा.

(1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ (2) $9y^2 + 5 = 0$

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ (4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

उकल : (1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ यामध्ये x हे एकच चल असून चलाचा सर्वांत मोठा घातांक 2 आहे.

$\therefore$ हे समीकरण वर्गसमीकरण आहे.

(2) $9y^2 + 5 = 0$ यामध्ये $\square$ चल असून चलाचा सर्वांत मोठा घातांक $\square$ आहे.

$\therefore$ हे समीकरण वर्गसमीकरण $\square$.

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ यामध्ये एकच चल असले तरी चलाचा सर्वांत मोठा घातांक 2 नाही.

$\therefore$ हे समीकरण वर्गसमीकरण $\square$.

(4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

$\therefore l(l - 5) + 2(l - 5) = 0$

$\therefore l^2 - 5l + 2l - 10 = 0$

$\therefore l^2 - 3l - 10 = 0$ यामध्ये $\square$ हे एकच चल असून चलाचा सर्वांत मोठा घातांक $\square$ आहे.

$\therefore$ दिलेले समीकरण वर्गसमीकरण $\square$.

जाणून घेऊया.

वर्गसमीकरणाची मुळे (उकली) (Roots of a quadratic equation)

आपण आधीच्या वर्गात पाहिले आहे की x ची a ही किंमत घेऊन बहुपदीची किंमत शून्य येत असेल, तर $(x-a)$ हा त्या बहुपदीचा अवयव असतो म्हणजे $p(x)$ ही बहुपदी असेल आणि $p(a) = 0$ असेल तर $(x-a)$ हा $p(x)$ चा अवयव असतो. या स्थितीत a ही $p(x) = 0$ ची एक उकल आहे किंवा a हे $p(x) = 0$ चे एक मूळ आहे असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ,

$x^2 + 5x - 6$ या बहुपदीत $x = -6$ ठेवून,

$x^2 + 5x - 6 = (-6)^2 + 5 \times (-6) - 6$

$= 36 - 30 - 6 = 0$

$\therefore x = -6$ ही $x^2 + 5x - 6$ या समीकरणाची एक उकल आहे, म्हणजेच -6 हे $x^2 + 5x - 6 = 0$ या समीकरणाचे एक मूळ आहे.

$x^2 + 5x - 6$ या बहुपदीत $x = 2$ ठेवून,

$x^2 + 5x - 6 = 2^2 + 5 \times 2 - 6$

$= 4 + 10 - 6$

$= 8 \neq 0$

$\therefore x = 2$ ही $x^2 + 5x - 6 = 0$ या समीकरणाची उकल नाही.

सोडवलेले उदाहरण

उदा. $2x^2 - 7x + 6 = 0$ या समीकरणाच्या (i) $x = \frac{3}{2}$ आणि (ii) $x = -2$ या उकली आहेत का हे ठरवा.

उकल: (i) $2x^2 - 7x + 6$ या बहुपदीत $x = \frac{3}{2}$ ही किंमत ठेवून बहुपदीची किंमत काढू.

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{3}{2}\right) + 6$$

$$= 2 \times \frac{9}{4} - \frac{21}{2} + 6$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{21}{2} + \frac{12}{2} = 0$$

$\therefore$ या समीकरणाची $x = \frac{3}{2}$ ही एक उकल आहे.

(ii) $2x^2 - 7x + 6$ या बहुपदीत $x = -2$ ही किंमत ठेवून बहुपदीची किंमत काढू.

$$2x^2 - 7x + 6 = 2(-2)^2 - 7(-2) + 6$$

$$= 2 \times 4 + 14 + 6$$

$$= 28 \neq 0$$

$\therefore$ $x = -2$ ही $2x^2 - 7x + 6$ या समीकरणाची उकल नाही.

कृती : जर $x = 5$ हे $kx^2 - 14x - 5 = 0$ या समीकरणाचे एक मूळ असेल, तर k ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : $kx^2 - 14x - 5 = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ $\square$ आहे.

$\therefore$ $x = \square$ ही किंमत वरील वर्गसमीकरणात ठेवू.

$\therefore$ $k\square^2 - 14\square - 5 = 0$

$\therefore$ $25k - 70 - 5 = 0$

$\therefore$ $25k - \square = 0$

$\therefore$ $25k = \square$

$\therefore$ $k = \frac{\square}{\square} = 3$

हे लक्षात ठेवूया.

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ हे वर्गसमीकरणाचे सामान्य रूप असते. यात a, b व c वास्तव संख्या असून a ही शून्येतर संख्या असते

(2) चलाच्या ज्या किमतींनी वर्गसमीकरणाच्या दोन्ही बाजू समान होतात, (म्हणजेच वर्गसमीकरणाचे समाधान होते) त्या किमतींना वर्गसमीकरणाच्या उकली किंवा वर्गसमीकरणाची मुळे म्हणतात.

सरावसंच 2.1

1. कोणतीही दोन वर्गसमीकरणे लिहा.

2. खालील समीकरणांपैकी वर्गसमीकरणे कोणती ते ठरवा.

(1) $x^2 + 5x - 2 = 0$ (2) $y^2 = 5y - 10$ (3) $y^2 + \frac{1}{y} = 2$

(4) $x + \frac{1}{x} = -2$ (5) $(m + 2)(m - 5) = 0$ (6) $m^3 + 3m^2 - 2 = 3m^3$

3. खालील समीकरणे $ax^2 + bx + c = 0$ या स्वरूपात लिहा. प्रत्येकातील a, b, c यांच्या किमती ठरवा.

(1) $2y = 10 - y^2$ (2) $(x - 1)^2 = 2x + 3$ (3) $x^2 + 5x = -(3 - x)$

(4) $3m^2 = 2m^2 - 9$ (5) $p(3 + 6p) = -5$ (6) $x^2 - 9 = 13$

4. वर्गसमीकरणासमोर दिलेल्या चलाच्या किमती त्या समीकरणांची मुळे आहेत की नाही ते ठरवा.

(1) $x^2 + 4x - 5 = 0$, $x = 1, -1$ (2) $2m^2 - 5m = 0$, $m = 2, \frac{5}{2}$

5. जर $x = 3$ हे $kx^2 - 10x + 3 = 0$ या समीकरणाचे एक मूळ असेल तर k ची किंमत किती ?

6. $5m^2 + 2m + k = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ $\frac{-7}{5}$ असेल तर k ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : $5m^2 + 2m + k = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ $\square$ आहे.

$\therefore\ m = \square$ वरील वर्गसमीकरणात ठेवू.

$\therefore\ 5 \times \square^2 + 2 \times \square + k = 0$

$\therefore\ \square + \square + k = 0$

$\therefore\ \square + k = 0$

$\therefore\ k = \square$

जरा आठवूया.

आपण मागील वर्षी बहुपदी या प्रकरणात $x^2 - 4x - 5$, $2m^2 - 5m$, $a^2 - 25$ अशा वर्गबहुपदींचे अवयव पाडण्याच्या पद्धती अभ्यासल्या आहेत. खालील कृती करून त्यांची उजळणी करूया.

कृती : खालील वर्गबहुपदींचे अवयव पाडा.

(1) $x^2 - 4x - 5$

$= \underline{x^2 - 5x} + \underline{1x - 5}$

$= x(\ldots\ldots) + 1(\ldots\ldots)$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

(2) $2m^2 - 5m$

$= \ldots\ldots\ldots$

(3) $a^2 - 25$

$= a^2 - 5^2$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

जाणून घेऊया.

अवयव पद्धतीने वर्गसमीकरणाची मुळे काढणे

(Solution of a quadratic equation by factorisation)

आपण चलाला वेगवेगळ्या किमती देऊन वर्गसमीकरणाची मुळे ठरवली, परंतु ही खूप वेळ लागणारी पद्धत आहे. म्हणून आपण या भागात वर्गसमीकरणाची मुळे अवयव पद्धतीने काढण्याचा अभ्यास करणार आहोत.

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$$

येथे $(x - 5)$ व $(x + 1)$ हे वर्गबहुपदी $x^2 - 4x - 5$ चे दोन रेषीय अवयव आहेत. म्हणून $x^2 - 4x - 5$ या वर्गबहुपदीपासून मिळणारे $x^2 - 4x - 5 = 0$ हे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे लिहिता येईल.

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

जर दोन संख्यांचा गुणाकार शून्य असेल, तर त्या दोन संख्यांपैकी किमान एक संख्या शून्य असते.

$\therefore \quad x - 5 = 0$ किंवा $x + 1 = 0$

$\therefore \quad x = 5$ किंवा $x = -1$

$\therefore$ दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे 5 आणि −1 आहेत.

हे उदाहरण सोडवताना आपण प्रथम वर्गबहुपदीचे दोन रेषीय अवयव मिळवले. या रीतीला वर्गसमीकरण सोडवण्याची अवयव पद्धत असे म्हणू.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. खालील वर्गसमीकरणे अवयव पद्धतीने सोडवा.

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$ (2) $3x^2 - x - 10 = 0$

(3) $3y^2 = 15y$ (4) $x^2 = 3$ (5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

$\therefore \underline{m^2 - 13m} - \underline{1m + 13} = 0$

$\therefore m(m - 13) - 1(m - 13) = 0$

$\therefore (m - 13)(m - 1) = 0$

$\therefore m - 13 = 0$ किंवा $m - 1 = 0$

$\therefore m = 13$ किंवा $m = 1$

$\therefore$ दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे 13 आणि 1 आहेत.

(2) $3x^2 - x - 10 = 0$

$\therefore \underline{3x^2 - 6x} + \underline{5x - 10} = 0$

$\therefore 3x(x - 2) + 5(x - 2) = 0$

$\therefore (3x + 5)(x - 2) = 0$

$\therefore 3x + 5 = 0$ किंवा $x - 2 = 0$

$\therefore x = -\frac{5}{3}$ किंवा $x = 2$

$\therefore$ दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे $-\frac{5}{3}$ आणि 2 आहेत.

(3) $3y^2 = 15y$

$\therefore 3y^2 - 15y = 0$

$\therefore 3y(y - 5) = 0$

$\therefore$ $3y = 0$ किंवा $y - 5 = 0$

$\therefore$ $y = 0$ किंवा $y = 5$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे 0 आणि 5 आहेत.

(4) $x^2 = 3$

$\therefore x^2 - 3 = 0$

$\therefore x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

$\therefore (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore x + \sqrt{3} = 0$ किंवा $x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore$ $x = -\sqrt{3}$ किंवा $x = \sqrt{3}$

$\therefore$ दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे $-\sqrt{3}$ आणि $\sqrt{3}$

(5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

$\therefore 6\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore 6\sqrt{3}x^2 + 9x - 2x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore 3\sqrt{3}x(2x + \sqrt{3}) - 1(2x + \sqrt{3}) = 0$

$\therefore (2x + \sqrt{3})(3\sqrt{3}x - 1) = 0$

$\therefore 2x + \sqrt{3} = 0$ किंवा $3\sqrt{3}x - 1 = 0$

$\therefore$ $2x = -\sqrt{3}$ किंवा $3\sqrt{3}x = 1$

$\therefore$ $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ किंवा $x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ आणि $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

$6\sqrt{3} \times -\sqrt{3} = -18$

-18: 9, -2

$9 = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

सरावसंच 2.2

1. खालील वर्गसमीकरणे अवयव पद्धतीने सोडवा.

(1) $x^2 - 15x + 54 = 0$ (2) $x^2 + x - 20 = 0$ (3) $2y^2 + 27y + 13 = 0$

(4) $5m^2 = 22m + 15$ (5) $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$ (6) $6x - \frac{2}{x} = 1$

(7) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ हे वर्गसमीकरण अवयवपद्धतीने सोडवण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल (7) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore$ $\sqrt{2}x^2 + \square + \square + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore$ $x(.....) + \sqrt{2}(.....) = 0$

$\therefore \quad (\,.\,.\,.\,.\,.\,)(x + \sqrt{2}\,) = 0$

$\therefore \quad (\,.\,.\,.\,.\,.\,) = 0$ किंवा $(x + \sqrt{2}\,) = 0$

$\therefore\ x = \square$ किंवा $x = -\sqrt{2}$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे $\square$ आणि $-\sqrt{2}$

(8)$^{\bigstar}$ $3x^2 - 2\sqrt{6}\ x + 2 = 0$ (9) $2m\,(m - 24) = 50$

(10) $25m^2 = 9$ (11) $7m^2 = 21m$ (12) $m^2 - 11 = 0$

जाणून घेऊया.

पूर्ण वर्ग पद्धतीने वर्गसमीकरण सोडवणे

(Solution of a quadratic equation by completing the square)

शिक्षक : $x^2 + 10\,x + 2 = 0$ हे वर्गसमीकरण आहे की नाही ?

योगेश : हो सर. कारण ते $ax^2 + bx + c = 0$ या रूपात आहे. येथे x या चलाचा जास्तीत जास्त घातांक 2 आहे. a ची किंमत शून्य नाही.

शिक्षक : हे समीकरण तुम्हांला सोडवता येईल का ?

वर्षा : नाही सर. कारण 2 या संख्येचे असे अवयव नाही सांगता येत, की ज्यांची बेरीज 10 येईल.

शिक्षक : म्हणूनच अशी उदाहरणे सोडवण्यासाठी वेगळी रीत वापरावी लागते. ही रीत समजून घेऊ.

$x^2 + 10\,x$ या राशीत योग्य पद मिळवून एक पूर्ण वर्गराशी मिळवू.

जर $x^2 + 10\,x + k = (x + a)^2$

तर $x^2 + 10\,x + k = x^2 + 2ax + a^2$

$\therefore$ सहगुणकांची तुलना करून, $10 = 2a$ आणि $k = a^2$

$\therefore\ a = 5$ आणि म्हणून $k = a^2 = (5)^2 = 25$

आता, $x^2 + 10\,x + 2 = (x + 5)^2 - 25\ + 2\ = (x + 5)^2 - 23$

$x^2 + 10\,x + 2 = 0$ हे समीकरण आता तुम्ही सोडवू शकाल का ?

रेहाना : हो सर, समीकरणाची डावी बाजू दोन वर्गांच्या वजाबाकीच्या रूपात आल्याने तिचे अवयव काढता येतील.

$(x + 5)^2 - (\sqrt{23}\,)^2 = 0$

$\therefore\ (x + 5 + \sqrt{23}\,)(x + 5 - \sqrt{23}\,) = 0$

$\therefore\ x + 5 + \sqrt{23} = 0$ किंवा $x + 5 - \sqrt{23} = 0$

$\therefore\ x = -5 - \sqrt{23}$ किंवा $x = -5 + \sqrt{23}$

हमीद : सर, उकली काढण्याची जराशी वेगळी रीत मला सुचली आहे.

$(x+5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$

$\therefore (x+5)^2 = (\sqrt{23})^2$

$\therefore x + 5 = \sqrt{23}$ किंवा $x + 5 = -\sqrt{23}$

$\therefore x = -5 + \sqrt{23}$ किंवा $x = -5 - \sqrt{23}$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) सोडवा : $5x^2 - 4x - 3 = 0$

उकल : समीकरणातील वर्गराशीचे रूपांतर, दोन वर्गांच्या वजाबाकीच्या रूपात आणण्यासाठी x^2 चा सहगुणक 1 करणे सोईचे होईल. म्हणून दिलेल्या समीकरणाला 5 ने भागून,

$x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$

आता जर $x^2 - \frac{4}{5}x + k = (x-a)^2$ तर $x^2 - \frac{4}{5}x + k = x^2 - 2ax + a^2$.

$x^2 - \frac{4}{5}x$ ची तुलना $x^2 - 2ax$ शी करून,

$-2ax = -\frac{4}{5}x \quad \therefore a = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$

$\therefore k = a^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

आता, $x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$

$\therefore x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{4}{25} - \frac{3}{5} = 0$

$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{5}\right) = 0$

$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{19}{25}\right) = 0$

$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{19}{25}\right)$

$\therefore x - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{19}}{5}$ किंवा $x - \frac{2}{5} = -\frac{\sqrt{19}}{5}$

$\therefore x = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5}$ किंवा $x = \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$

$\therefore x = \frac{2+\sqrt{19}}{5}$ किंवा $x = \frac{2-\sqrt{19}}{5}$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे $\frac{2+\sqrt{19}}{5}$ आणि $\frac{2-\sqrt{19}}{5}$

समीकरण $x^2 + bx + c = 0$ या रूपात असते, तेव्हा
$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$
या रूपात,
म्हणजेच $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ या रूपात लिहिता येते.

उदा. (2) सोडवा : $x^2 + 8x - 48 = 0$

रीत I : पूर्ण वर्ग पद्धती

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$\therefore\ x^2 + 8x + 16 - 16 - 48 = 0$$

$$\therefore\ (x + 4)^2 - 64 = 0$$

$$\therefore\ (x + 4)^2 = 64$$

$\therefore\ x + 4 = 8$ किंवा $x + 4 = -8$

$\therefore\ x = 4$ किंवा $x = -12$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे 4 आणि -12.

रीत II : अवयव पद्धती

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$\therefore\ x^2 + 12x - 4x - 48 = 0$$

$$\therefore\ x(x + 12) - 4(x + 12) = 0$$

$$\therefore\ (x + 12)(x - 4) = 0$$

$\therefore\ x + 12 = 0$ किंवा $x - 4 = 0$

$\therefore\ x = -12$ किंवा $x = 4$

सरावसंच 2.3

खालील वर्गसमीकरणे पूर्ण वर्ग पद्धतीने सोडवा.

(1) $x^2 + x - 20 = 0$ (2) $x^2 + 2x - 5 = 0$ (3) $m^2 - 5m = -3$

(4) $9y^2 - 12y + 2 = 0$ (5) $2y^2 + 9y + 10 = 0$ (6) $5x^2 = 4x + 7$

जाणून घेऊया.

वर्गसमीकरण सोडवण्याचे सूत्र (Formula for solving a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c$ या राशीला a ने भागून ($\because a \neq 0$) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ ही राशी मिळते.

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ ही राशी दोन वर्गांच्या वजाबाकीच्या रूपात मांडून $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ या समीकरणाच्या, म्हणजेच $ax^2 + bx + c = 0$ या समीकरणाच्या सामान्य उकली किंवा मुळे मिळवता येतात.

$$ax^2 + bx + c = 0 \ldots \text{(I)}$$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \ldots\ldots$ दोन्ही बाजूंना a ने भागून,

$$\therefore\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$\therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$ $\qquad$ $\therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$\therefore x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ किंवा $x+\frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$\therefore x = -\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ किंवा $x = -\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$\therefore x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ किंवा $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

या उकली थोडक्यात $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ अशा लिहितात आणि त्या α (अल्फा), β (बीटा) या अक्षरांनी दर्शवतात. $\therefore \alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ आणि $\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ . . . . (I)

$ax^2 + bx + c = 0$ या समीकरणातील a, b, c यांच्या किमती $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ या राशीत लिहून राशीला सोपे रूप दिले, की समीकरणाच्या उकली मिळतात. म्हणून $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ याला वर्गसमीकरण सोडवण्याचे सूत्र म्हणतात. या दोन उकलींपैकी कोणतीही उकल कोणत्याही अक्षराने दाखवली तरी चालते

विधान (I) ऐवजी $\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ आणि $\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ असेही मानता येते.

$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ तर $\alpha > \beta$, $\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ तर $\alpha < \beta$ हे ध्यानात ठेवा.

सोडवलेली उदाहरणे

सूत्राचा उपयोग करून खालील वर्गसमीकरणे सोडवा.

उदा.(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

उकल : $m^2 - 14m + 13 = 0$ ची $ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1,\ b = -14,\ c = 13,$

$\therefore b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 13$

$= 196 - 52$

$= 144$

$m = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-14)\pm\sqrt{144}}{2\times1}$

$= \frac{14\pm12}{2}$

$\therefore m = \frac{14+12}{2}$ किंवा $m = \frac{14-12}{2}$

$\therefore m = \frac{26}{2}$ किंवा $m = \frac{2}{2}$

$\therefore m = 13$ किंवा $m = 1$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे 13 आणि 1 आहेत.

उदा. (2) $x^2 + 10x + 2 = 0$

उकल: $x^2 + 10x + 2 = 0$ ची

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$$a = 1,\ b = 10,\ c = 2,$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (10)^2 - 4 \times 1 \times 2$$

$$= 100 - 8$$

$$= 92$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{4 \times 23}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2}$$

$$= \frac{2(-5 \pm \sqrt{23})}{2}$$

$$\therefore x = -5 \pm \sqrt{23}$$

$\therefore x = -5 + \sqrt{23}$ किंवा $x = -5 - \sqrt{23}$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे $-5 + \sqrt{23}$ आणि $-5 - \sqrt{23}$

उदा. (3) $x^2 - 2x - 3 = 0$

उकल: $ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$$a = 1,\ b = -2,\ c = -3,$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$$

$\therefore x = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2}$ किंवा $x = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2}$

$= \frac{2+4}{2}$ किंवा $\frac{2-4}{2}$

$= 3$ किंवा -1

अधिक माहितीसाठी :

$x^2 - 2x - 3 = 0$ हेच वर्गसमीकरण खाली आलेखाने सोडवले आहे, ते समजून घ्या.

$x^2 - 2x - 3 = 0$ म्हणजेच $x^2 = 2x + 3$

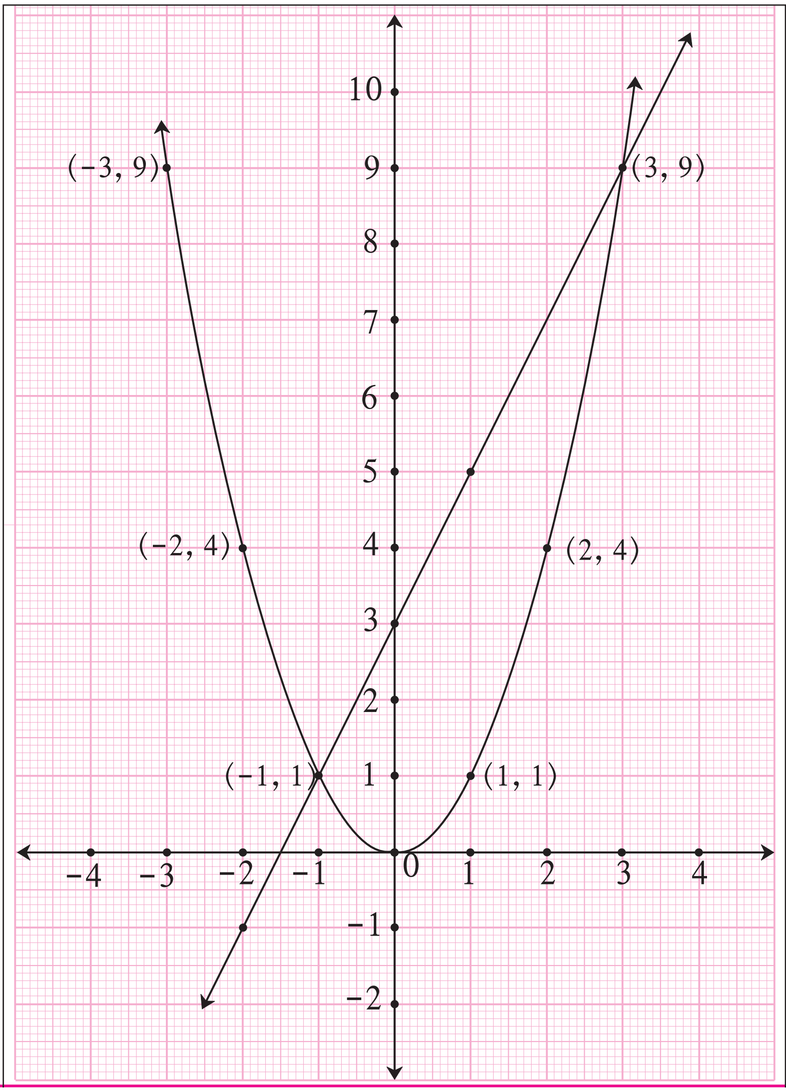
x च्या ज्या किमतींनी $x^2 = 2x + 3$ या समीकरणाचे समाधान होईल, त्या किमती या समीकरणाच्या उकली असणार. $y = x^2 = 2x + 3$ मानू. $y = x^2$ आणि $y = 2x + 3$ या समीकरणांचे आलेख काढू.

$y = x^2$

x	3	2	1	0	−1	−2	−3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y = 2x + 3$

x	−1	0	1	−2
y	1	3	5	−1



हे आलेख परस्परांना (−1, 1) आणि (3, 9) या बिंदूत छेदतात.

$\therefore$ $x^2 = 2x + 3$ या समीकरणाच्या, म्हणजेच $x^2 - 2x - 3 = 0$ च्या उकली $x = -1$ किंवा $x = 3$ या आहेत.

सोबतच्या आकृतीत $y = x^2$ आणि $y = 2x + 3$ या समीकरणांचे आलेख काढले आहेत. त्यांच्या छेदनबिंदूंवरून $x^2 = 2x + 3$ या समीकरणाच्या, म्हणजेच $x^2 - 2x - 3 = 0$ च्या उकली कशा मिळतात, हे समजून घ्या.

उदा. (4) $25x^2 + 30x + 9 = 0$

उकल: $25x^2 + 30x + 9 = 0$ ची

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 25,\ b = 30,\ c = 9,$

$\therefore b^2 - 4ac = (30)^2 - 4 \times 25 \times 9$

$= 900 - 900 \quad = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-30 \pm \sqrt{0}}{2 \times 25}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-30 + 0}{50} \text{ किंवा } x = \frac{-30 - 0}{50}$$

$$\therefore \quad x = -\frac{30}{50} \text{ किंवा } x = -\frac{30}{50}$$

$$\therefore \quad x = -\frac{3}{5} \text{ किंवा } x = -\frac{3}{5}$$

लक्षात घ्या, की $25x^2 + 30x + 9 = 0$ या समीकरणाची दोन्ही मुळे समान आहेत.

तसेच $25x^2 + 30x + 9 = 0$.

म्हणजेच $(5x + 3)^2 = 0$ हे ध्यानात घ्या.

उदा. (5) $x^2 + x + 5 = 0$

उकल: $x^2 + x + 5 = 0$ ची

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1,\ b = 1,\ c = 5,$

$\therefore b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 5$

$= 1 - 20$

$= -19$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

परंतु $\sqrt{-19}$ ही वास्तव संख्या नाही. म्हणून दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव संख्या नाहीत.

कृती : $2x^2 + 13x + 15 = 0$ हे वर्गसमीकरण अवयवपद्धती, पूर्ण वर्गपद्धती व वर्गसूत्राचा वापर करून सोडवा. उत्तरे सारखीच येतात याचा पडताळा घ्या.

सरावसंच 2.4

1. खालील वर्गसमीकरणांची सामान्य रूपाशी तुलना करून a, b, c च्या किमती लिहा.

   (1) $x^2 - 7x + 5 = 0$ (2) $2m^2 = 5m - 5$ (3) $y^2 = 7y$

2. खालील वर्गसमीकरणे सूत्राचा वापर करून सोडवा.

   (1) $x^2 + 6x + 5 = 0$ (2) $x^2 - 3x - 2 = 0$ (3) $3m^2 + 2m - 7 = 0$

   (4) $5m^2 - 4m - 2 = 0$ (5) $y^2 + \frac{1}{3}y = 2$ (6) $5x^2 + 13x + 8 = 0$

3. $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ हे वर्गसमीकरण सूत्राचा वापर करून खालील प्रवाह आकृतीत दिलेल्या माहितीच्या आधारे सोडवा.

उकल : $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ ची $ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून a,b,c च्या किमती ठरवा. → $b^2 - 4ac$ ची किंमत काढा. → वर्गसमीकरण सोडवण्याचे सूत्र लिहा. → सूत्रामध्ये किमती घालून उकल काढा.

जाणून घेऊया.

वर्गसमीकरणाच्या मुळांचे स्वरूप (Nature of roots of a quadratic equation)

वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ ची मुळे $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ अशी असतात, हे आपण अभ्यासले आहे.

(1) जर $b^2 - 4ac = 0$ असेल, तर $x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$ $\therefore\ x = \frac{-b+0}{2a}$ किंवा $x = \frac{-b-0}{2a}$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व समान असतात.

(2) जर $b^2 - 4ac > 0$ असेल, तर $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

म्हणजेच $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ आणि $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व असमान असतात.

(3) जर $b^2 - 4ac < 0$ असेल तर $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ या वास्तव संख्या नसतात, म्हणजेच वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव नसतात.

वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ च्या मुळांचे स्वरूप $b^2 - 4ac$ च्या किमतीवरून निश्चित होते. म्हणून $b^2 - 4ac$ ला वर्गसमीकरणाचा विवेचक (discriminant) म्हणतात. तो Δ (डेल्टा) या चिन्हाने दर्शवतात. (Δ हे ग्रीक अक्षर आहे.)

कृती : खाली दिलेल्या माहितीवरून रिकाम्या जागा भरा.

	विवेचकाची किंमत		मुळांचे स्वरूप
(1)	50	→	
(2)	-30	→	
(3)	0	→	

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) $x^2 + 10x - 7 = 0$ या वर्गसमीकरणामध्ये विवेचकाची किंमत काढा.

उकल : $x^2 + 10x - 7 = 0$ ची तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ शी करून,

$a = 1,\ b = 10\ ,\ c = -7\ ,$

$\therefore b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times (-7)$

$= 100 + 28$

$= 128$

उदा. (2) विवेचकावरून वर्गसमीकरणांच्या मुळांचे स्वरूप ठरवा.

(i) $2x^2 - 5x + 7 = 0$

उकल : $2x^2 - 5x + 7 = 0$ ची तुलना

$ax^2 + bx + c = 0$ शी करून,

$a = 2,\ b = -5\ ,\ c = 7$

$\therefore b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7$

$\therefore \quad \Delta = 25 - 56$

$= -31$

$\therefore b^2 - 4ac < 0$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव संख्या नाहीत.

(ii) $x^2 + 2x - 9 = 0$

उकल : $x^2 + 2x - 9 = 0$ ची तुलना

$ax^2 + bx + c = 0$ शी करून,

$a = \square,\ b = 2,\ c = \square$

$\therefore b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times \square \times \square$

$\therefore \quad \Delta = 4 + \square$

$= 40$

$\therefore b^2 - 4ac > 0$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व असमान आहेत.

(iii) $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$

उकल : $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ ची तुलना

$ax^2 + bx + c = 0$ शी करून,

येथे $a = \sqrt{3},\ b = 2\sqrt{3}\ ,\ c = \sqrt{3}\ ,$

$\therefore b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$= 4 \times 3 - 4 \times 3$

$= 12 - 12$

$= 0$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व समान आहेत.

जाणून घेऊया.

वर्गसमीकरणाची मुळे आणि सहगुणक यांच्यामधील संबंध

(Relation between roots and coefficients of a quadratic equation)

जर $ax^2 + bx + c = 0$ या वर्गसमीकरणाची α व β मुळे असतील तर

$$\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= -\frac{2b}{2a}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

तसेच

$$\alpha \times \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\times\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

$$\therefore \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

कृती : खाली दिलेल्या चौकटींत योग्य संख्या भरा.

$10x^2 + 10x + 1 = 0$ करिता $\alpha + \beta =$ ☐ आणि

$\alpha \times \beta =$ ☐

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) α आणि β ही $2x^2 + 6x - 5 = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत, तर $\alpha + \beta$ आणि $\alpha \times \beta$ च्या किमती काढा.

उकल : $2x^2 + 6x - 5 = 0$ ची तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ शी करून,

$\therefore\ a = 2,\ b = 6,\ c = -5$

$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$

आणि $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$

उदा. (2) $x^2 - 13x + k = 0$ या वर्गसमीकरणाच्या मुळांमधील फरक 7 आहे, तर k ची किंमत काढा.

उकल : $x^2 - 13x + k = 0$ ची तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1,\ b = -13\ ,\ c = k$

समजा, α आणि β ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत आणि $\alpha > \beta$ गृहीत धरून

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-13)}{1} = 13 \ldots \text{(I)}$$

परंतु $\alpha - \beta = 7$ . . . . (दिले आहे) (II)

$2\alpha = 20$ . . . . (समीकरण (I) व (II) यांची बेरीज करून)

$\therefore \alpha = 10$

$\therefore 10 + \beta = 13$ . . . . . . ((I) वरून)

$\therefore \beta = 13 - 10$

$\therefore \beta = 3$

परंतु $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$

$\therefore 10 \times 3 = \frac{k}{1}$

$\therefore k = 30$

उदा. (3) α आणि β ही $x^2 + 5x - 1 = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत, तर

(i) $\alpha^3 + \beta^3$ (ii) $\alpha^2 + \beta^2$ च्या किमती काढा.

उकल : $x^2 + 5x - 1 = 0$

येथे $a = 1,\ b = 5\ ,\ c = -1$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

(i) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= (-5)^3 - 3 \times (-1) \times (-5)$

$= -125 - 15$

$\alpha^3 + \beta^3 = -140$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (-5)^2 - 2 \times (-1)$

$= 25 + 2$

$\alpha^2 + \beta^2 = 27$

जाणून घेऊया.

मुळे दिली असता वर्गसमीकरण मिळवणे
(To obtain a quadratic equation having given roots)

समजा, α आणि β ही x या चलांतील वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.

$\therefore\ x = \alpha$ किंवा $x = \beta$

$\therefore\ x - \alpha = 0$ किंवा $x - \beta = 0$

$\therefore\ (x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$\therefore\ x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0$

$\therefore\ x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha\beta = 0$

म्हणजेच α आणि β ही मुळे असणारे वर्गसमीकरण

x^2 − (मुळांची बेरीज) x + मुळांचा गुणाकार = 0 या सूत्राने मिळवता येईल.

कृती (I) : मुळांची बेरीज 10 आणि मुळांचा गुणाकार 9 असणारे वर्गसमीकरण लिहा.

वर्गसमीकरण $x^2 - \square\, x + \square = \square$

कृती (II) : $\alpha = 2$ आणि $\beta = 5$ ही मुळे असणारे वर्गसमीकरण कोणते ?

$x^2 - (\square + \square)\, x + \square \times \square = 0$ असे लिहिता येते.

म्हणजेच $x^2 - \square\, x + \square = 0$

या समीकरणाला कोणत्याही शून्येतर संख्येने गुणल्यास मिळणाऱ्या समीकरणाची मुळे α आणि β हीच असतात, हे ध्यानात घ्या.

सोडवलेले उदाहरण

उदा. ज्या वर्गसमीकरणाची मुळे −3 व −7 आहेत असे वर्गसमीकरण तयार करा.

उकल : समजा $\alpha = -3$ आणि $\beta = -7$

$\therefore\ \alpha + \beta = (-3) + (-7) = -10$ आणि $\alpha\times\beta = (-3) \times (-7) = 21$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण, $x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha\beta = 0$

$\therefore\ x^2 - (-10) x + 21 = 0$

$\therefore\ x^2 + 10x + 21 = 0$

हे लक्षात ठेवूया.

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे α आणि β असतील, तर

(i) $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ आणि $\beta = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(ii) $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ आणि $\alpha \times \beta = \dfrac{c}{a}$

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ या वर्गसमीकरणाच्या मुळांचे स्वरूप $b^2 - 4ac$ या राशीच्या किमतीवर अवलंबून असते. म्हणून या राशीला विवेचक (discriminant) म्हणतात. विवेचक Δ या ग्रीक अक्षराने दर्शवतात.

(3) जर $\Delta = 0$ असेल, तर वर्गसमीकरणाची दोन्ही मुळे समान वास्तवसंख्या असतात.

जर $\Delta > 0$ असेल, तर वर्गसमीकरणाची मुळे भिन्न वास्तवसंख्या असतात.

जर $\Delta < 0$ असेल, तर वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तवसंख्या नसतात.

(4) ज्याची मुळे α व β असतात, ते वर्गसमीकरण $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ असते.

सरावसंच 2.5

1. खालील रिकाम्या चौकटी भरा.

(1) वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ → $b^2 - 4ac = 5$ → ☐ ; $b^2 - 4ac = -5$ → ☐ (मुळांचे स्वरूप)

(2) मुळांची बेरीज $= -7$ → वर्गसमीकरण . . . . ← मुळांचा गुणाकार $= 5$

(3) जर α व β ही खालील वर्गसमीकरणाची मुळे असतील, तर

$2x^2 - 4x - 3 = 0$ → $\alpha + \beta = \ldots\ldots$; $\alpha \times \beta = \ldots\ldots$

2. खालील वर्गसमीकरणांसाठी विवेचकाची किंमत काढा.

(1) $x^2 + 7x - 1 = 0$ (2) $2y^2 - 5y + 10 = 0$ (3) $\sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} = 0$

3. विवेचकाच्या किमतीवरून खालील वर्गसमीकरणांच्या मुळांचे स्वरूप ठरवा.

(1) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (2) $2y^2 - 7y + 2 = 0$ (3) $m^2 + 2m + 9 = 0$

4. ज्या वर्गसमीकरणाची मुळे खालीलप्रमाणे आहेत अशी वर्गसमीकरणे तयार करा.

(1) 0 व 4 (2) 3 व −10 (3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (4) $2-\sqrt{5}\,,\ 2+\sqrt{5}$

★5. $x^2 - 4kx + k + 3 = 0$ या वर्गसमीकरणाच्या मुळांची बेरीज ही त्यांच्या गुणाकाराच्या दुप्पट आहे, तर k ची किंमत काढा.

★6. जर α आणि β ही $y^2 - 2y - 7 = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे असतील, तर

(1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\alpha^3 + \beta^3$ च्या किमती काढा.

7. खालील प्रत्येक वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व समान असतील तर k ची किंमत काढा.

(1) $3y^2 + ky + 12 = 0$ (2) $kx(x - 2) + 6 = 0$

जाणून घेऊया.

वर्गसमीकरणाचे उपयोजन (Application of quadratic equation)

दैनंदिन जीवनातील अनेक बाबींची उकल करण्यासाठी वर्गसमीकरणे उपयोगी पडतात. हीच बाब आपण या भागात अभ्यासणार आहोत.

उदा. (1) तिवसा येथील श्री. रत्नाकरराव यांच्या शेतातील काटकोन चौकोनाकृती कांदाचाळीच्या तळाची लांबी ही रुंदीपेक्षा 7 मीटर जास्त आहे, आणि कर्ण हा लांबीपेक्षा 1 मीटर जास्त आहे. तर त्या कांदाचाळीच्या तळाची लांबी आणि रुंदी काढा.

उकल : समजा, काटकोन चौकोनाकृती कांदाचाळीच्या तळाची रुंदी x मीटर आहे.

$\therefore$ लांबी = $(x + 7)$ मीटर, कर्ण = $x + 7 + 1 = (x + 8)$ मीटर

पायथागोरसचे प्रमेय वापरून,

$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$

$x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$

$\therefore x^2 + 14x - 16x + 49 - 64 = 0$

$\therefore x^2 - 2x - 15 = 0$

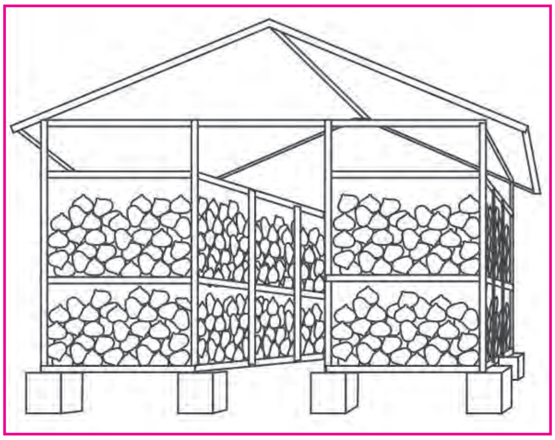
$\therefore \underline{x^2 - 5x} + \underline{3x - 15} = 0$

$\therefore x(x - 5) + 3(x - 5) = 0$

$\therefore (x - 5)(x + 3) = 0$

$\therefore x - 5 = 0$ किंवा $x + 3 = 0$

$\therefore x = 5$ किंवा $x = -3$



कांदाचाळ

परंतु रुंदी ऋण नसते. $\therefore x \neq -3$

$\therefore x = 5$ आणि $x + 7 = 5 + 7 = 12$

$\therefore$ कांदाचाळीच्या तळाची लांबी 12 मीटर आणि रुंदी 5 मीटर.

उदा. (2) एक आगगाडी एकसमान वेगाने (चालीने) 360 किमी अंतर जाते; परंतु तिचा वेग ताशी 5 किमीने वाढवल्यास तिला तेवढेच अंतर जाण्यासाठी 48 मिनिटे कमी लागतात, तर गाडीचा सुरुवातीचा वेग काढा.

उकल : समजा, आगगाडीचा सुरुवातीचा वेग ताशी x किमी आहे.

$\therefore$ वेग वाढवल्यानंतर गाडीचा ताशी वेग $(x+5)$ किमी असेल .

360 किमी अंतर कापण्यासाठी लागणारा सुरुवातीचा वेळ = $\frac{\text{अंतर}}{\text{वेग}} = \frac{360}{x}$ तास.

वेग वाढवल्यावर तेच अंतर जाण्यासाठी लागणारा वेळ = $\frac{360}{x+5}$

दिलेल्या अटीनुसार,

$\frac{360}{x+5} = \frac{360}{x} - \frac{48}{60}$ ------ ($\because$ 48 मिनिटे = $\frac{48}{60}$ तास)

$\therefore \frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = \frac{48}{60}$

$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{48}{60\times 360}$ ----- (दोन्ही बाजूंना 360 ने भागून)

$\therefore \frac{x+5-x}{x(x+5)} = \frac{4}{5\times 360}$

$\therefore \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{5\times 90}$

$\therefore \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{450}$

$\therefore x^2 + 5x = 2250$

$\therefore x^2 + 5x - 2250 = 0$

$\therefore x^2 + 50x - 45x - 2250 = 0$

-2250 → $+50$, -45

$\therefore x(x + 50) - 45(x + 50) = 0$

$\therefore (x + 50)(x - 45) = 0$

$\therefore x + 50 = 0$ किंवा $x - 45 = 0$

$\therefore x = -50$ किंवा $x = 45$

परंतु वेग ऋण नसतो. $\therefore x \neq -50$

$\therefore x = 45$

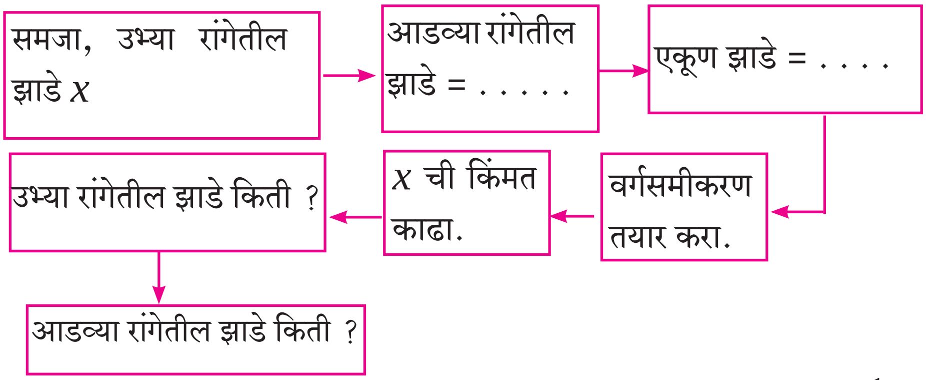
$\therefore$ आगगाडीचा सुरुवातीचा वेग ताशी 45 किमी.

सरावसंच 2.6

1. प्रगतीच्या 2 वर्षांपूर्वीच्या आणि 3 वर्षांनंतरच्या वयांचा गुणाकार 84 आहे, तर तिचे आजचे वय काढा.

2. दोन क्रमागत सम नैसर्गिक संख्यांच्या वर्गांची बेरीज 244 आहे, तर त्या संख्या शोधा.

3. श्री. मधुसूदन यांच्या संत्राबागेत आडव्या रांगेतील झाडांची संख्या, उभ्या रांगेतील झाडांच्या संख्येपेक्षा 5 ने अधिक आहे. जर संत्राबागेत एकूण 150 झाडे असतील तर आडव्या तसेच उभ्या रांगेतील झाडांची संख्या किती ? खालील प्रवाहआकृतीच्या आधारे उदाहरण सोडवा.



4. विवेक, हा किशोरपेक्षा 5 वर्षांनी मोठा असून त्यांच्या वयांच्या गुणाकार व्यस्तांची बेरीज $\frac{1}{6}$ आहे, तर त्यांची आजची वये काढा.

5. सुयशला गणिताच्या पहिल्या चाचणीत मिळालेल्या गुणांपेक्षा दुसऱ्या चाचणीत 10 गुण अधिक मिळाले. दुसऱ्या चाचणीतील गुणांची 5 पट ही पहिल्या चाचणीतील गुणांच्या वर्गाइतकी आहे, तर त्याचे पहिल्या चाचणीतील गुण किती ?

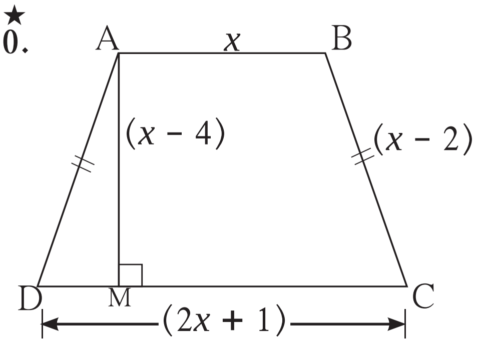
6.★ श्री. कासम यांचा मातीची भांडी बनवण्याचा कुटीर उद्योग आहे. ते दररोज ठरावीक संख्येएवढी भांडी तयार करतात. प्रत्येक भांड्याचे निर्मितिमूल्य, तयार केलेल्या भांड्यांच्या संख्येची 10 पट अधिक 40 रु. असते. जर एका दिवसातील भांड्यांचे निर्मितिमूल्य 600 रुपये असेल, तर प्रत्येक भांड्याचे निर्मितिमूल्य व एका दिवसात बनवलेल्या भांड्यांची संख्या काढा.

7.★ एका नदीत, बोटीने प्रवाहाच्या विरुद्ध 36 किमी जाऊन परत त्याच जागी येण्यास प्रतीकला 8 तास लागतात. बोटीचा संथ पाण्यातील वेग ताशी 12 किमी असल्यास नदीच्या प्रवाहाचा वेग काढा.

8.★ पिंटूला एक काम करण्यासाठी निशूपेक्षा 6 दिवस अधिक लागतात. दोघांनी मिळून काम केल्यास ते काम पूर्ण करण्यासाठी त्यांना 4 दिवस लागतात. तर ते काम एकट्यानेच पूर्ण करण्यास प्रत्येकास किती दिवस लागतील ?

9.★ 460 या संख्येला एका नैसर्गिक संख्येने भागल्यास भागाकार भाजकाच्या 5 पटीपेक्षा 6 ने अधिक येत असून बाकी 1 येते. तर भागाकार व भाजक किती ?

10.★



बाजूच्या समलंब □ABCD मध्ये AB || CD असून त्याचे क्षेत्रफळ 33 चौसेमी आहे, तर आकृतीतील दिलेल्या माहितीवरून चौकोनाच्या चारही बाजूंची लांबी खालील कृती पूर्ण करून काढा.

उकल : □ABCD समलंब चौकोन आहे. AB || CD

A (□ABCD) = $\frac{1}{2}$(AB + CD) × ☐

$\therefore$ 33 = $\frac{1}{2}(x + 2x + 1)$ × ☐

$\therefore$ ☐ = $(3x + 1)$ × ☐

$\therefore$ $3x^2$ + ☐ − ☐ = 0

$\therefore$ $3x$ (. . . .) +10(. . . .) = 0

$\therefore$ $(3x + 10)$(----) = 0

$\therefore$ $(3x + 10) = 0$ किंवा ☐ = 0

$\therefore$ $x = -\frac{10}{3}$ किंवा x = ☐

परंतु लांबी ऋण नसते.

$\therefore$ $x \neq -\frac{10}{3}$ $\therefore$ x = ☐

AB = ---, CD = ---, AD = BC = ---

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. खालील प्रश्नांच्या उत्तरांचा अचूक पर्याय निवडा.

(1) खालीलपैकी कोणते वर्गसमीकरण आहे ?

(A) $\frac{5}{x} - 3 = x^2$ (B) $x(x + 5) = 2$ (C) $n - 1 = 2n$ (D) $\frac{1}{x^2}(x + 2) = x$

(2) खालीलपैकी कोणते वर्गसमीकरण नाही ?

(A) $x^2 + 4x = 11 + x^2$ (B) $x^2 = 4x$ (C) $5x^2 = 90$ (D) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(3) $x^2 + kx + k = 0$ ची मुळे वास्तव व समान असतील, तर k ची किंमत खालीलपैकी कोणती ?

(A) 0   (B) 4   (C) 0 किंवा 4   (D) 2

(4) $\sqrt{2}x^2 - 5x + \sqrt{2} = 0$ करिता विवेचकाची किंमत खालीलपैकी कोणती ?

(A) −5   (B) 17   (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2} - 5$

(5) खालीलपैकी कोणत्या समीकरणाची मुळे 3 व 5 आहेत ?

(A) $x^2 - 15x + 8 = 0$ (B) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(C) $x^2 + 3x + 5 = 0$ (D) $x^2 + 8x - 15 = 0$

(6) खालीलपैकी कोणत्या समीकरणाच्या मुळांची बेरीज −5 आहे ?

(A) $3x^2 - 15x + 3 = 0$ (B) $x^2 - 5x + 3 = 0$

(C) $x^2 + 3x - 5 = 0$ (D) $3x^2 + 15x + 3 = 0$

(7) $\sqrt{5}m^2 - \sqrt{5}m + \sqrt{5} = 0$ ला खालीलपैकी कोणते विधान लागू पडते ?

(A) वास्तव व असमान मुळे   (B) वास्तव व समान मुळे

(C) मुळे वास्तव संख्या नाहीत.   (D) तीन मुळे.

(8) $x^2 + mx - 5 = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ 2 असेल, तर m ची किंमत खालीलपैकी कोणती ?

(A) −2   (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

2. खालीलपैकी कोणती समीकरणे वर्गसमीकरणे आहेत ?

(1) $m^2 + 2m + 11 = 0$ (2) $x^2 - 2x + 5 = x^2$ (3) $(x + 2)^2 = 2x^2$

3. खालीलपैकी प्रत्येक समीकरणाच्या विवेचकाची किंमत काढा.

(1) $2y^2 - y + 2 = 0$ (2) $5m^2 - m = 0$ (3) $\sqrt{5}x^2 - x - \sqrt{5} = 0$

4. $2x^2 + kx - 2 = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ -2 आहे, तर k ची किंमत किती ?

5. असे वर्गसमीकरण तयार करा, की ज्याची मुळे खालीलप्रमाणे आहेत.

(1) 10 आणि -10 (2) $1-3\sqrt{5}$ आणि $1+3\sqrt{5}$ (3) 0 आणि 7

6. खाली दिलेल्या वर्गसमीकरणाच्या मुळांचे स्वरूप ठरवा.

(1) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (2) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$ (3) $m^2 - 2m + 1 = 0$

7. खालील वर्गसमीकरणे सोडवा.

(1) $\frac{1}{x+5} = \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0, x + 5 \neq 0)$ (2) $x^2 - \frac{3x}{10} - \frac{1}{10} = 0$ (3) $(2x + 3)^2 = 25$

(4) $m^2 + 5m + 5 = 0$ (5) $5m^2 + 2m + 1 = 0$ (6) $x^2 - 4x - 3 = 0$

8.★ $(m - 12)x^2 + 2(m - 12)x + 2 = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व समान असतील तर m ची किंमत काढा.

9.★ एका वर्गसमीकरणाच्या दोन मुळांची बेरीज 5 आणि त्यांच्या घनांची बेरीज 35 आहे, तर ते वर्गसमीकरण कोणते ?

10.★ असे वर्गसमीकरण तयार करा की ज्याची मुळे $2x^2 + 2(p + q)x + p^2 + q^2 = 0$ या समीकरणाच्या मुळांच्या बेरजेचा वर्ग व वजाबाकीचा वर्ग असतील.

11.★ मुकुंदजवळ सागरपेक्षा 50 रुपये अधिक आहेत. त्यांच्याजवळील रकमांचा गुणाकार 15000 असेल, तर प्रत्येका जवळील रक्कम किती ?

12.★ दोन संख्यांच्या वर्गांमधील फरक 120 आहे. लहान संख्येचा वर्ग हा मोठ्या संख्येच्या दुपटीइतका आहे, तर त्या संख्या शोधा.

13.★ रंजनाला वाढदिवसानिमित्त 540 संत्री काही विद्यार्थ्यांना समान वाटायची आहेत. जर 30 विद्यार्थी जास्त असते तर प्रत्येकाला 3 संत्री कमी मिळाली असती, तर विद्यार्थ्यांची संख्या काढा.

14.★ तळवेल येथील शेतकरी श्री दिनेश यांच्या आयताकृती शेताची लांबी ही रुंदीच्या दुपटीपेक्षा 10 मीटरने अधिक आहे. त्यांनी त्या शेतात पावसाचे पाणी पुनर्भरणासाठी शेताच्या रुंदीच्या $\frac{1}{3}$ पट बाजू असणाऱ्या चौरसाकृती शेततळ्याची निर्मिती केली. तेव्हा मूळ शेताचे क्षेत्रफळ हे शेततळ्याच्या क्षेत्रफळाच्या 20 पट होते, तर त्या शेताची लांबी आणि रुंदी तसेच शेततळ्याच्या बाजूची लांबी काढा.

15.★ एक टाकी दोन नळांच्या साहाय्याने 2 तासांत पूर्ण भरते. त्यातील फक्त लहान नळाने टाकी भरण्यास लागणारा वेळ, फक्त मोठ्या नळाने टाकी भरण्यास लागणाऱ्या वेळापेक्षा 3 तास जास्त असतो. तर प्रत्येक नळाने ती टाकी भरण्यास किती वेळ लागतो ? □□□