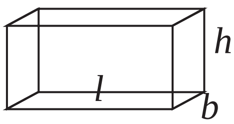
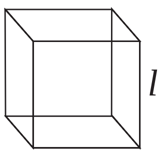
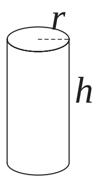
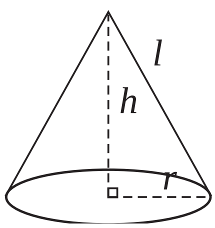
7 महत्वमापन

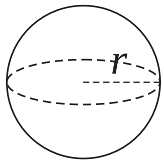
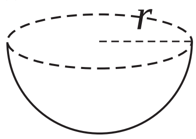
आओ सीखें

- विभिन्न घनाकृतियों के पृष्ठफल तथा घनफल पर आधारित मिश्रित उदाहरण
- वृत्त चाप – वृत्त चाप की लंबाई
- वृत्त के द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल
- वृत्तखंड का क्षेत्रफल

थोड़ा याद करें

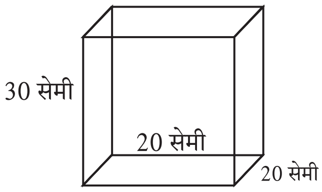
पिछली कक्षा में हमने कुछ त्रिमितीय आकृतियों के पृष्ठफल तथा घनफल का अध्ययन किया है । इसके लिए उपयोग में आनेवाले सूत्रों को याद करें ।

क्र.	त्रिमितीय आकृति	सूत्र
1 .	घनाभ 	ऊर्ध्वाधर पृष्ठों का पृष्ठफल = $2h\ (\ l + b\ )$ संपूर्ण पृष्ठफल = $2\ \ (lb + bh + hl\ )$ घनाभ का घनफल = lbh
2 .	समघन 	समघन के ऊर्ध्वाधर पृष्ठों का पृष्ठफल = $4l^2$ समघन का संपूर्ण पृष्ठफल = $6l^2$ समघन का घनफल = l^3
3 .	लंबवृत्ताकार बेलन 	लंबवृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल = $2\pi rh$ लंबवृत्ताकार बेलन का संपूर्ण पृष्ठफल = $2\pi r\ (\ r + h\ )$ लंबवृत्ताकार बेलन का घनफल = πr^2h
4 .	शंकु 	शंकु की तिरछी ऊँचाई (l) = $\sqrt{h^2 + r^2}$ शंकु का वक्रपृष्ठफल = πrl शंकु का संपूर्ण पृष्ठफल = $\pi r\ (r + l)$ शंकु का घनफल = $\frac{1}{3} \times \pi r^2h$

क्र.	त्रिमितीय आकृति	सूत्र
5.	गोला 	गोले का पृष्ठफल = $4\ \pi r^2$ गोले का घनफल = $\frac{4}{3}\ \pi r^3$
6.	अर्धगोला 	अर्धगोले का वक्रपृष्ठफल = $2\pi r^2$ अर्धगोले का संपूर्ण पृष्ठफल = $3\pi r^2$ अर्धगोले का घनफल = $\frac{2}{3}\ \pi r^3$

निम्नलिखित उदाहरणों को हल कीजिए ।

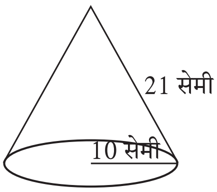
उदा.(1)



आकृति 7.1

संलग्न आकृति में 30 सेमी ऊँचाई, 20 सेमी लंबाई तथा 20 सेमी चौड़ाई वाला तेल का डिब्बा है । उसमें कितने लीटर तेल भरा जा सकेगा ? (1 लीटर = 1000 सेमी^{3})

उदा.(2)



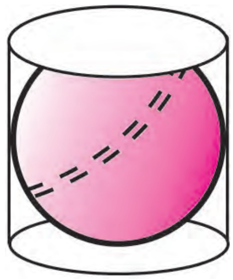
आकृति 7.2

संलग्न आकृति में जोकर की टोपी और टोपी का माप दर्शाया गई है । दिए गए माप के अनुसार इस टोपी को बनाने में कितना कपड़ा लगेगा ?

थोड़ा सोचें

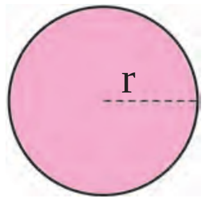
संलग्न आकृति में दर्शाएनुसार किसी लंब वृत्ताकार बेलन के अंतःभाग में एक गोला है । गोला वृत्ताकार बेलन के आधार, ऊपरी पृष्ठभाग और वक्र पृष्ठभाग को स्पर्श करती है । वृत्त के आधार की त्रिज्या r हो तो,

1. गोले की त्रिज्या और वृत्ताकार बेलन की त्रिज्या का अनुपात कितना होगा ?
2. वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल और गोले के वक्रपृष्ठफल का अनुपात कितना होगा ?
3. वृत्ताकार बेलन का घनफल और गोले के घनफल का अनुपात कितना होगा ?

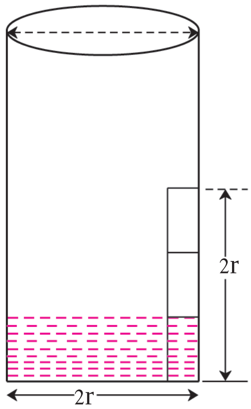


आकृति 7.3

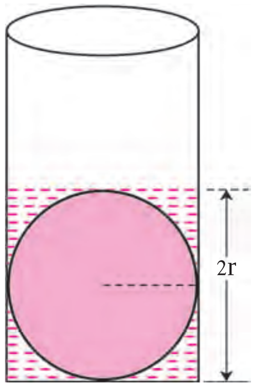
कृति :



आकृति 7.4



आकृति 7.5



आकृति 7.6

उपर्युक्त आकृतियों में दर्शाएनुसार एक गेंद और गेंद की त्रिज्या (r) के बराबर त्रिज्या वाला एक बीकर लें । बीकर के व्यास की लंबाई के बराबर ($2r$) लंबाई वाली एक कागज की पट्टी लें । पट्टी पर उसकी लंबाई के तीन समान भाग करने वाली दो रेखाएँ बनाइए । वह पट्टी बीकर के तल (आधार) से खड़ी चिपकाएँ । बीकर में कागज की पट्टी से नीचे से पहले भाग तक पानी भरें उसके पश्चात गेंद, बीकर के तल (आधार) तक सावधानीपूर्वक रखें । बीकर में पानी की सतह कितनी बढ़ी है इसे देखें ।

पानी की सतह , कागज की पट्टी की ऊँचाई तक बढ़ी हुई दिखेगी ।

हम इस निरीक्षण से गेंद का घनफल प्राप्त करने का सूत्र कैसे प्राप्त होगा इसे समझेंगे ।

बीकर का आकार वृत्ताकार लंब बेलन का है इसलिए बीकर के 2r के बराबर ऊँचाई तक के भाग का घनफल वृत्ताकार लंब बेलन के घनफल के सूत्र से प्राप्त होगा । माना घनफल V है ।

$\therefore\ V = \pi \times r^2 \times 2r = 2\pi r^3$

किंतु V = गेंद का घनफल + पहले भरे गए पानी का घनफल

= गेंद का घनफल + $\frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$\therefore$ गेंद का घनफल = $V - \frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3} \qquad = \frac{4\pi r^3}{3}$

$\therefore$ गोले के घनफल का सूत्र $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ प्राप्त होगा ।

(इस सूत्र की सहायता से आकृति 7.3 के संदर्भ में प्रश्न क्रमांक 3 का हल अब आप ज्ञात कर सकेंगे ।)

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) किसी वृत्ताकार बेलन के आकारवाले पानी की टंकी की त्रिज्या 2.8 मी और उंचाई 3.5 मी है। तो उस टंकी में कितने लीटर पानी भर जा सकेगा ? एक व्यक्ति को प्रतिदिन औसतन 70 लीटर पानी लगता हो तो पूरी भरी हुई टंकी का पानी प्रतिदिन कितने व्यक्तियों के लिए पर्याप्त होगा? ($\pi = \frac{22}{7}$)

हल : त्रिज्या (r) = 2.8 मीटर, उँचाई (h) = 3.5 मीटर, $\pi = \frac{22}{7}$

पानी की टंकी की धारिता = वृत्ताकार बेलन के आकारवाली पानी की टंकी का घनफल

$= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \times 3.5$

$= 86.24$ मी^{3}

$= 86.24 \times 1000$ लीटर ($\because$ 1मी^{3} = 1000 लीटर)

$= 86240.00$ लीटर

$\therefore$ टंकी में 86240 लीटर पानी भर जा सकेगा।

70 लीटर पानी प्रतिदिन एक व्यक्ति के लिए पर्याप्त होता है।

$\therefore$ संपूर्ण भरी हुई टंकी का पानी प्रतिदिन $\frac{86240}{70}$ = 1232 व्यक्तियों के लिए पर्याप्त होगा।

उदा. (2) 30 सेमी त्रिज्या के एक ठोस गोले को पिघलाकर उससे 10 सेमी त्रिज्यावाले तथा 6 सेमी ऊँचाई वाले ठोस वृत्ताकार बेलन बनाए गए तो उससे बने वृत्ताकार बेलनों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : गोले की त्रिज्या r = 30 सेमी

वृत्ताकार बेलन की त्रिज्या R = 10 सेमी

वृत्ताकर बेलन की ऊँचाई H = 6 सेमी

माना n वृत्ताकार बेलन बनेंगे

$\therefore$ गोले का घनफल = n × एक वृत्ताकार बेलन का घनफल

$\therefore$ वृत्ताकार बेलन की संख्या = n = $\frac{\text{गोले का घनफल}}{\text{एक वृत्ताकार बेलन का घनफल}}$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi (r)^3}{\pi (R)^2 H}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\times(30)^3}{10^2 \times 6} \qquad = \frac{\frac{4}{3}\times 30\times 30\times 30}{10\times 10\times 6} \quad = 60$$

$\therefore$ वृत्ताकार बेलनों की कुल संख्या 60

उदा. (3) किसी सर्कस के तंबू का निचला हिस्सा वृत्ताकार बेलन के आकार का तथा ऊपरी हिस्सा शंकु के आकार का है । तंबू के आधार का व्यास 48 मी तथा वृत्ताकार बेलन की ऊँचाई 15 मी है । तंबू की कुल ऊँचाई 33 मी हो तो तंबू बनाने में लगनेवाले कपड़े का क्षेत्रफल तथा तंबू में स्थित हवा का घनफल ज्ञात कीजिए ।

हल : तंबू की कुल ऊँचाई 33 मी है ।

माना वृत्ताकार बेलन के भाग की ऊँचाई = H $\therefore$ H = 15 मी

$\therefore$ शंक्वाकार भाग की लंब ऊँचाई h = (33−15) = 18 मी

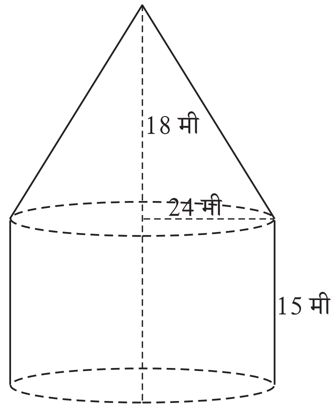
शंकु की तिरछी ऊँचाई (l) = $\sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{24^2 + 18^2}$

$= \sqrt{576 + 324}$

$= \sqrt{900}$

l = 30 मी



आकृति 7.7

सर्कस के तंबू में लगनेवाला कपड़ा = वृत्ताकार भाग का वक्रपृष्ठफल + शंक्वाकार भाग का वक्रपृष्ठफल

$= 2\pi rH + \pi rl$

$= \pi r\,(2H + l)$

$= \frac{22}{7} \times 24\,(2 \times 15 + 30)$

$= \frac{22}{7} \times 24 \times 60$

= 4525.71 वर्ग मी

तंबू में स्थित हवा का घनफल = वृत्ताकार भाग का घनफल + शंक्वाकार भाग का घनफल

$= \pi r^2 H + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \pi r^2 \left(H + \frac{1}{3}h\right)$

$= \frac{22}{7} \times 24^2\,(15 + \frac{1}{3} \times 18)$

$= \frac{22}{7} \times 576 \times 21$

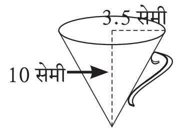
= 38,016 घमी

तंबू के लिए लगनेवाले कपड़े का क्षेत्रफल = 4525.71 वर्ग मी

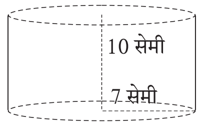
तंबू में स्थित हवा का घनफल = 38016 घमी

प्रश्नसंग्रह 7.1

1. किसी शंकु के आधार की त्रिज्या 1.5 सेमी तथा लंब ऊँचाई 5 सेमी हो तो शंकु का घनफल ज्ञात कीजिए ।
2. 6 सेमी व्यासवाले गोले का घनफल ज्ञात कीजिए ।
3. किसी लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या 5 सेमी तथा ऊँचाइ क्रमश: 40 सेमी हो तो उसका संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।
4. किसी गोले की त्रिज्या 7 सेमी हो तो उसका पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।
5. किसी धातु के वृत्ताकार बेलन की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई 44 सेमी, 21 सेमी और 12 सेमी है । उसे पिघलाकर 24 सेमी ऊँचाई का शंकु बनाया गया तो शंकु के आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।
6.



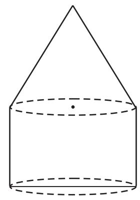
आकृति 7.8
शंक्वाकार पानी का जग



आकृति 7.9
वृत्ताकार बेलन के आकार का पात्र

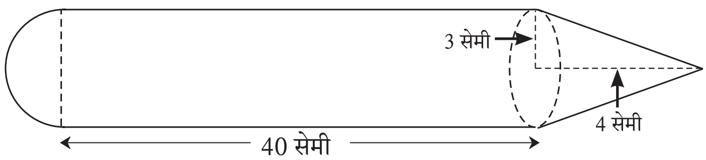
आकृति 7.8 तथा 7.9 में निरीक्षण द्वारा ज्ञात कीजिए कि वृत्ताकार बेलन के आकार वाले बर्तन में कितना पानी भरा जाएगा ?

7. किसी वृत्ताकार बेलन तथा शंकु का आधार समान है । वृत्ताकार बेलन पर शंकु को रखें वृत्ताकार बेलन की ऊँचाई 3 सेमी तथा उसके आधार का क्षेत्रफल 100 वर्ग सेमी है यदि संपूर्ण घनाकृति का घनफल 500 घसेमी हो तो संपूर्ण घनाकृति की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.10

8. संलग्न आकृति 7.11 में दी गई जानकारी के आधार पर अर्धगोले, वृत्ताकार बेलन तथा शंकु से बनाए गए खिलौने का संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.11

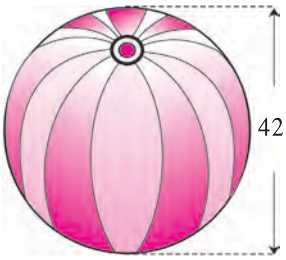
9. आकृति 7.12 में वृत्ताकार बेलन के आकार की चपटी गोली का 10 सेमी लंबाई का एक वेष्टन है । एक गोली की त्रिज्या 7 मिमी और ऊँचाई 5 मिमी हो तो ऐसी कितनी गोलियाँ उस वेष्टन में समाविष्ट होंगी ?

आकृति 7.12

10. आकृति 7.13 में बच्चों का एक खिलौना दर्शाया गया है । खिलौना एक अर्धगोले तथा शंकु की सहायता से बनाया गया है । आकृति में दर्शाए गए माप के आधारपर खिलौने का घनफल तथा पृष्ठफल ज्ञात कीजिए । ($\pi = 3.14$)

आकृति 7.13

11. आकृति मे दर्शाएनुसार बीच बॉल का पृष्ठफल तथा घनफल ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.14

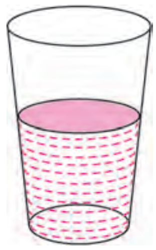
12. आकृति में दर्शाएनुसार लंब वृत्ताकार बेलन वाले ग्लास में पानी है तथा उसमें 2 सेमी व्यास वाले धातु की एक गोली डुबाई गई है । तो पानी का घनफल ज्ञात कीजिए ।

आकृति 7.15

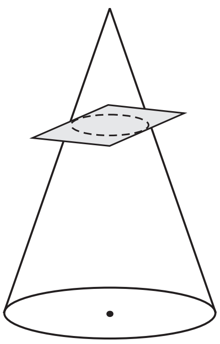
आओ जानें

शंकु छेद (Frustum of the cone)

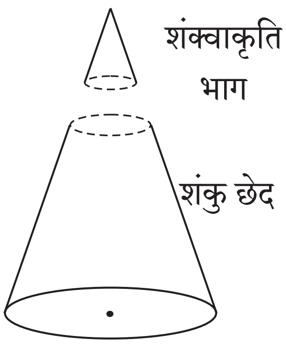
हम पानी पीने के लिए शंक्वाकार प्याले (ग्लास) का उपयोग करते हैं । इस प्याले का आकार उसी प्रकार पानी का आकार यह शंकु छेद के आकार का होता है ।



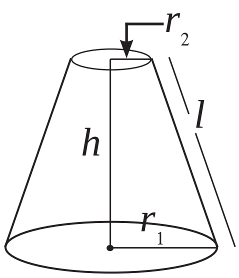
आकृति 7.16



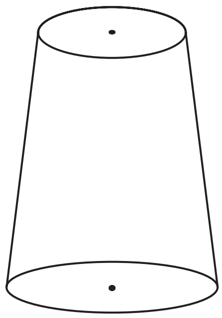
आकृति 7.17
शंकु काटने पर



आकृति 7.18
शंकु को काटने पर अलग हुए दो भाग



आकृति 7.19
शंकु छेद



आकृति 7.20
उल्टा रखा गया गिलास

आकृति में एक शंकु को उल्टा रखा हुआ दर्शाया गया है । इस शंकु को उसके आधार के समांतर काटा गया । इस प्रकार हुए दो भागों में से एक भाग शंकु ही है । और शेष भाग को शंकु छेद कहते हैं ।

शंकु की तरह ही शंकु छेद का पृष्ठफल तथा घनफल ज्ञात किया जा सकता है । इसके लिए हम आगे दिए गए सूत्रों का उपयोग करेंगे ।

इसे ध्यान में रखें

h = शंकु छेद की ऊँचाई, l = शंकु छेद की तिरछी ऊँचाई,

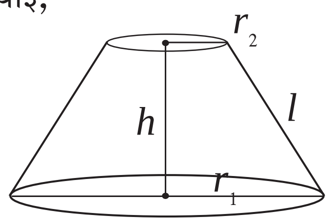
r_1 तथा r_2 = शंकु छेद के वृत्ताकार भाग की त्रिज्या ($r_1 > r_2$)

शंकु छेद की तिरछी ऊँचाई = l = $\sqrt{h^2+(r_1-r_2)^2}$

शंकु छेद का वक्रपृष्ठफल = $\pi l\,(r_1 + r_2)$

शंकु छेद का संपूर्ण पृष्ठफल = $\pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

शंकु छेद का घनफल = $\frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$



आकृति 7.21

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) किसी एक शंकु छेद के आकार की बाल्टी की ऊँचाई 28 सेमी है । बाल्टी के दोनों वृत्ताकार भाग की त्रिज्या 12 सेमी तथा 15 सेमी है तो बाल्टी में भरे जाने वाले पानी की मात्रा ज्ञात कीजिए ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

हल : बाल्टी के वृत्ताकार भाग की त्रिज्या r_1 = 15 सेमी, r_2 = 12 सेमी

बाल्टी की ऊँचाई h = 28 सेमी

बाल्टी में भरे जाने वाले पानी की मात्रा = शंकु छेद का घनफल

$$= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$$

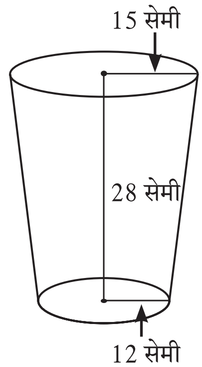
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 28\,(15^2 + 12^2 + 15 \times 12)$$

$$= \frac{22\times 4}{3} \times (225 + 144 + 180)$$

$$= \frac{22\times 4}{3} \times 549$$

$$= 88 \times 183$$

$$= 16104 \text{ सेमी}^3 = 16.104 \text{ लीटर}$$



आकृति 7.22

बाल्टी में पानी की मात्रा 16.104 लीटर है ।

उदा. (2) शंकु छेद के वृत्ताकार भाग की त्रिज्या क्रमश: 14 सेमी तथा 8 सेमी है । यदि शंकु छेद की ऊँचाई 8 सेमी हो तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए । (π= 3.14)

(i) शंकु छेद का वक्रपृष्ठफल (ii) शंकु छेद का संपूर्ण पृष्ठफल (iii) शंकु छेद का घनफल

हल : त्रिज्या r_1 = 14 सेमी , r_2 = 8 सेमी, ऊँचाई h = 8 सेमी

शंकु छेद की तिरछी ऊँचाई $l = \sqrt{h^2+(r_1-r_2)^2}$

$$l = \sqrt{8^2+(14-8)^2}$$

$$l = \sqrt{64+36} = 10 \text{ सेमी}$$

शंकुछेद का वक्रपृष्ठफल = $\pi(r_1 + r_2)\, l$

$= 3.14 \times (14 + 8) \times 10$

$= 690.8$ वसेमी

शंकुछेद का संपूर्ण पृष्ठफल = $\pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$= 3.14 \times 10\,(14 + 8) + 3.14 \times 14^2 + 3.14 \times 8^2$

$= 690.8 + 615.44 + 200.96$

$= 690.8 + 816.4$

$= 1507.2$ वसेमी

शंकुछेद का घनफल = $\frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 8\,(14^2 + 8^2 + 14 \times 8)$

$= 3114.88$ घसेमी

प्रश्नसंग्रह 7.2

1. 30 सेमी ऊँचाई वाले शंकुछेद के आकार वाली बाल्टी के वृत्ताकार भागों की त्रिज्या 14 सेमी तथा 7 सेमी है उस बाल्टी में कितने लीटर पानी भरा जा सकता है ? ज्ञात कीजिए। (1 लीटर = 1000 घसेमी)
2. शंकुछेद के वृत्ताकार भाग की त्रिज्या क्रमश: 14 सेमी तथा 6 सेमी तथा उसकी ऊँचाई 6 सेमी हो तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)

   (1) शंकुछेद का वक्रपृष्ठफल (2) शंकुछेद का संपूर्ण पृष्ठफल (3) शंकुछेद का घनफल
3. किसी शंकुछेद के वृत्ताकार आधार की परिधि क्रमश: 132 सेमी तथा 88 सेमी तथा ऊँचाई 24 सेमी है। तो उस शंकुछेद का वक्रपृष्ठफल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$)

परिधि$_1 = 2\pi r_1 = 132$

$r_1 = \frac{132}{2\pi} = \square$ सेमी

परिधि$_2 = 2\pi r_2 = 88$

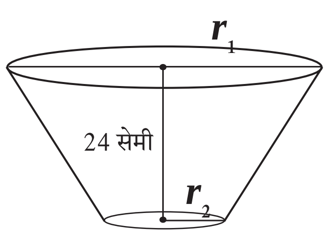
$r_2 = \frac{88}{2\pi} = \square$ सेमी

शंकुछेद की तिरछी ऊँचाई $= l$

तथा $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$\therefore\ l = \sqrt{\square^2 + \square^2}$

$l = \square$ सेमी



आकृति 7.23

शंकुछेद का वक्रपृष्ठफल = $\pi(r_1 + r_2)l$

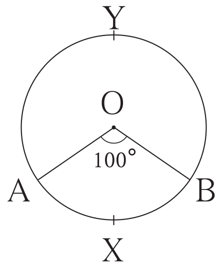
$= \pi \times \square \times \square$

$= \square$ वर्ग सेमी

थोड़ा याद करें

संलग्न आकृति के आधार पर निम्नलिखित सारिणी पूर्ण कीजिए ।

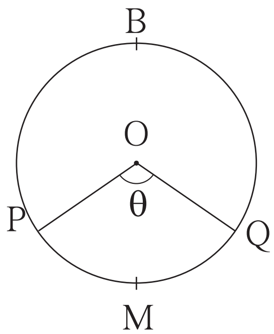
चाप का प्रकार	चाप का नाम	चाप का माप
लघु वृत्त चाप	चाप AXB	....
....	चाप AYB	....



आकृति 7.24

आओ जानें

द्वैत्रिज्य (Sector of a circle)



आकृति 7.25

आकृति में केंद्रीय कोण द्वारा वृत्त क्षेत्र का दो भागों में विभाजन हुआ है । प्रत्येक भाग को द्वैत्रिज्य कहते हैं । वृत्त की दो त्रिज्याओं और उसके दोनों सिरों के जोड़ने वाले वृत्त चाप द्वारा सीमित किए हुए भाग को द्वैत्रिज्य कहते हैं ।

आकृति में O –PMQ और O–PBQ ऐसे दो द्वैत्रिज्य हैं ।

लघु द्वैत्रिज्य (Minor sector) :

दो त्रिज्या तथा उसके संगत लघु चाप द्वारा सीमित किए हुए चाप को लघु द्वैत्रिज्य कहते हैं ।

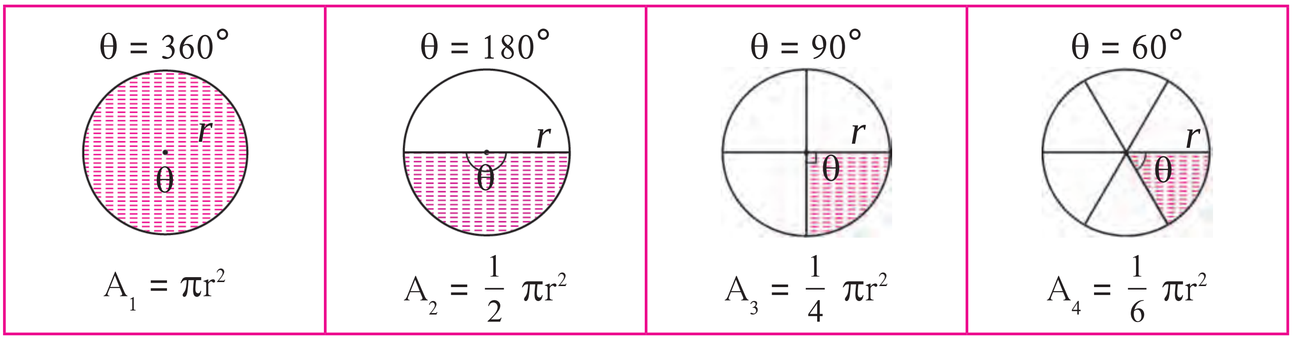
आकृति में O–PMQ लघु द्वैत्रिज्य है ।

दीर्घ द्वैत्रिज्य (Major sector) :

दो त्रिज्या तथा उसके दीर्घ चाप द्वारा सीमित किए हुए चाप को दीर्घ द्वैत्रिज्य कहते हैं । आकृति में O–PBQ यह दीर्घ द्वैत्रिज्य है ।

द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल (Area of a sector)

नीचे दी गई आकृति में दर्शाएनुसार समान त्रिज्यावाले वृत्त के छायांकित भागों के क्षेत्रफल का निरीक्षण करके दी गई सारिणी पूर्ण कीजिए ।



आकृति 7.26

वृत्त के केंद्रीय कोण का माप = 360° = पूर्ण कोण

वृत्त के केंद्रीय कोण का माप = 360° , वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2			
द्‌वैत्रिज्य	द्‌वैत्रिज्य के चाप का माप	$\frac{\theta}{360}$	द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल A
A_1	360°	$\frac{360}{360}=1$	$1 \times \pi r^2$
A_2	180°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \pi r^2$
A_3	90°	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times \pi r^2$
A_4	60°	....	....
A	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

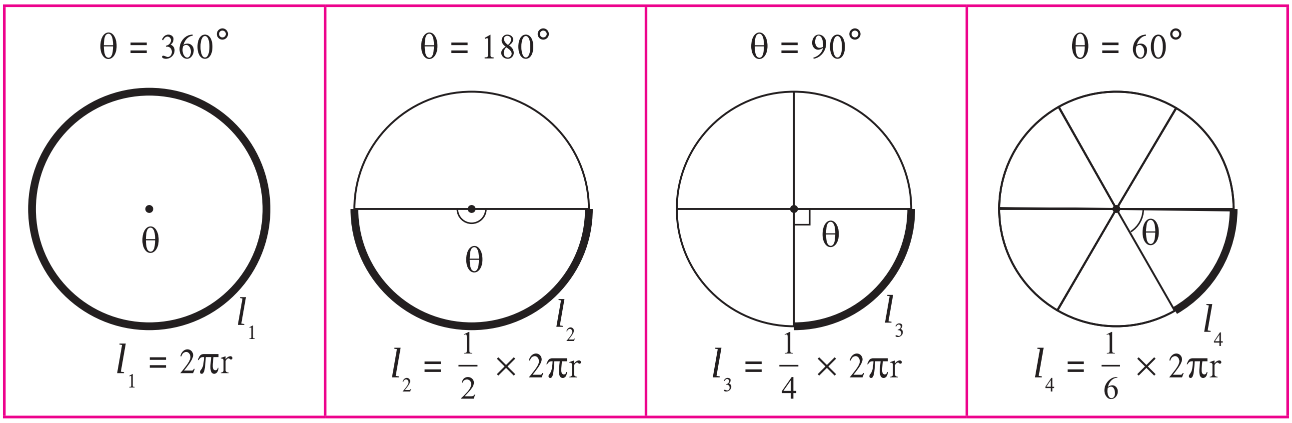
सारिणी से ध्यान में आता है कि वृत्त के क्षेत्रफल को $\frac{\theta}{360}$ से गुणा करने पर चाप का माप θ वाले द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल प्राप्त होता है । इसे सूत्र के रूप में निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं ।

$$\text{द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल (A)} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

इस सूत्र से $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360}$ अर्थात $\frac{\text{द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल}}{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}} = \frac{\theta}{360}$

वृत्त चाप की लंबाई (Length of an arc)

नीचे दर्शाएनुसार समान त्रिज्यावाले वृत्तों के गहरे चिन्हांकित किए गए चापों की लंबाई का निरीक्षण करें तथा नीचे दी गई सारिणी पूर्ण कीजिए ।



आकृति 7.27

वृत्त की परिधि = $2\pi r$			
वृत्त चाप की लंबाई	वृत्त चाप का माप (θ)	$\frac{\theta}{360}$	वृत्त चाप की लंबाई (l)
l_1	360°	$\frac{360}{360} = 1$	$1 \times 2\pi r$
l_2	180°	$\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 2\pi r$
l_3	90°	$\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 2\pi r$
l_4	60°	....	....
l	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

उपर्युक्त आकृतिबंध से ध्यान में आता है कि वृत्त की परिधि $\frac{\theta}{360}$ से गुणा करने पर θ माप वाले वृत्त चाप की लंबाई प्राप्त होती है ।

$$\text{वृत्त चाप की लंबाई } (l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

सूत्र के अनुसार,

$$\frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$$

$$\frac{\text{वृत्त चाप की लंबाई}}{\text{परिधि}} = \frac{\theta}{360}$$

वृत्त चाप की लंबाई और द्‍वैत्रिज्य के क्षेत्रफल में संबंध

द्‍वैत्रिज्य का क्षेत्रफल $A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ I

उसी प्रकार वृत्त चाप की लंबाई $(l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$\therefore \frac{\theta}{360} = \frac{l}{2\pi r} \quad .... \text{II}$$

$$A = \frac{l}{2\pi r} \times \pi r^2 \quad .... \text{I तथा II से}$$

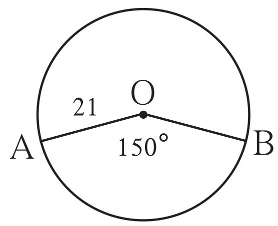
$$A = \frac{1}{2}\, lr = \frac{lr}{2}$$

$$\therefore \text{द्‍वैत्रिज्य का क्षेत्रफल} = \frac{\text{वृत्त चाप की लंबाई} \times \text{त्रिज्या}}{2}$$

उसी प्रकार $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) 21 सेमी त्रिज्यावाले द्‍वैत्रिज्य के केंद्रीय कोण का माप 150° हो तो द्‍वैत्रिज्य का क्षेत्रफल तथा संगत वृत्त चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.28

हल : $r = 21$सेमी, $\theta = 150$, $\pi = \frac{22}{7}$

द्‍वैत्रिज्य का क्षेत्रफल $(A) = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{150}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

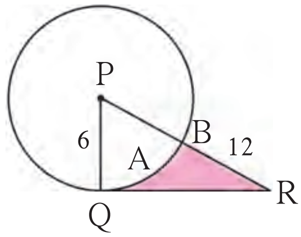
$= \frac{1155}{2}$ सेमी^{2} $= 577.5$ सेमी^{2}

वृत्त चाप की लंबाई $= l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$= \frac{150}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$

$= 55$ सेमी

उदा. (2) आकृति में वृत्त का केंद्र P और त्रिज्या 6 सेमी है। रेख QR वृत्त की स्पर्श रेखा है। PR = 12 सेमी हो तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{3}$ = 1.73)



आकृति 7.29

हल : वृत्त के स्पर्श बिंदु से खींची गई त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंब होती है।

$\therefore$ Δ PQR में, $\angle PQR = 90^\circ$, PQ = 6 सेमी, PR = 12 सेमी

$\therefore PQ = \frac{PR}{2}$

यदि समकोण त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई उसके कर्ण की लंबाई की आधी हो तो उस भुजा के सम्मुख कोण का माप 30° होता है।

$\therefore \angle R = 30^\circ$ और $\angle P = 60^\circ$

30°-60°-90° प्रमेय से, $QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times PR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$

$QR = 6\sqrt{3}$ सेमी

$\therefore A(\Delta PQR) = \frac{1}{2} QR \times PQ$

$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6$

$= 18\sqrt{3}$

$= 18 \times 1.73$

$= 31.14$ सेमी²

द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$\therefore A(P\text{-}QAB) = \frac{60}{360} \times 3.14 \times 6^2$

$= \frac{1}{6} \times 3.14 \times 6 \times 6$

$= 3.14 \times 6$

$= 18.84$ सेमी²

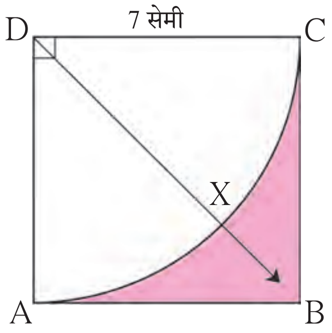
छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= A(\Delta PQR) - A(P\text{-}QAB)$

$= 31.14 - 18.84$

$= 12.30$ सेमी²

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = 12.30 सेमी²

उदा. (3) दी गई आकृति में वर्ग ABCD की प्रत्येक भुजा की लंबाई 7 सेमी है । बिंदु D को केंद्र मानकर तथा DA त्रिज्या लेकर खींचा गया द्‌वैत्रिज्य D – AXC है, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए रिक्त चौखटों को भरकर उदाहरण पूर्ण कीजिए ।



आकृति 7.30

हल :

वर्ग का क्षेत्रफल = $\square$ (सूत्र)

= $\square$

= 49 वर्ग सेमी

द्‌वैत्रिज्य (D– AXC) का क्षेत्रफल = $\square$ (सूत्र)

$= \dfrac{\square}{360} \times \dfrac{22}{7} \times \square$

= 38.5 वर्ग सेमी

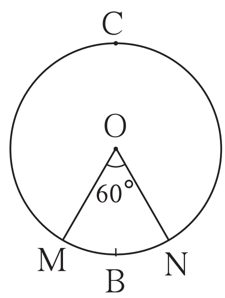
छायांकित भाग का क्षेत्रफल = $\square$ का क्षेत्रफल – $\square$ का क्षेत्रफल

= $\square$ वर्ग सेमी – $\square$ वर्ग सेमी

= $\square$ वर्ग सेमी

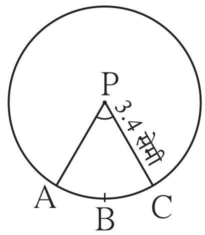
प्रश्नसंग्रह 7.3

1. किसी वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी तथा वृत्त चाप का माप 54° हो तो उस चाप द्‌वारा सीमित द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । (π =3.14)
2. किसी वृत्तचाप का माप 80° और त्रिज्या 18 सेमी है तो उसके वृत्तचाप की लंबाई ज्ञात कीजिए । (π =3.14)
3. किसी द्‌वैत्रिज्य की त्रिज्या 3.5 सेमी तथा उसके वृत्त चाप की लंबाई 2.2 सेमी हो तो द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
4. किसी वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी तथा उसके लघु द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल 100 वर्ग सेमी हो तो उसके दीर्घ द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । (π =3.14)
5. 15 सेमी त्रिज्यावाले किसी द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल 30 वर्ग सेमी हो तो संगत वृत्त चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए ।
6. संलग्न आकृति में वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है और
   m(चाप MBN)= 60°
   तो (1) वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
   (2) A(O – MBN) ज्ञात कीजिए ।
   (3) A(O – MCN) ज्ञात कीजिए ।

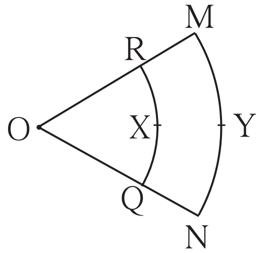


आकृति 7.31

7. 3.4 सेमी त्रिज्यावाले किसी द्‌वैत्रिज्य की परिमिति 12.8 सेमी है तो द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.32



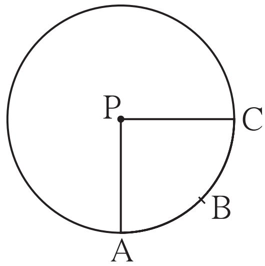
आकृति 7.33

8. संलग्न आकृति में बिंदु O यह द्‌वैत्रिज्य का केंद्र है । $\angle$ ROQ = $\angle$ MON = 60°, OR = 7 सेमी, OM = 21 सेमी हो तो चाप RXQ तथा चाप MYN की लंबाई ज्ञात कीजिए । ($\pi = \frac{22}{7}$)

9. संलग्न आकृति में A(P–ABC) = 154 वर्ग सेमी और वृत्त की त्रिज्या 14 सेमी हो, तो

(1) $\angle$ APC का माप ज्ञात कीजिए ।

(2) चाप ABC की लंबाई ज्ञात कीजिए ।



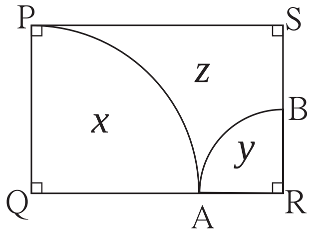
आकृति 7.34

10. किसी द्‌वैत्रिज्य की त्रिज्या 7 सेमी है । यदि द्‌वैत्रिज्य के चापों के माप निम्नलिखित हों तो उन द्‌वैत्रिज्यों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(1) 30°   (2) 210°   (3) 3 समकोण

11. लघु द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल 3.85 वर्ग सेमी तथा उसके संगत केंद्रीय कोण का माप 36° हो तो उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

12. संलग्न आकृति 7.35 में □ PQRS एक आयत है । PQ = 14 सेमी, QR = 21 सेमी, हो तो आकृति में दर्शाएनुसार x, y और z इस प्रत्येक भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.35

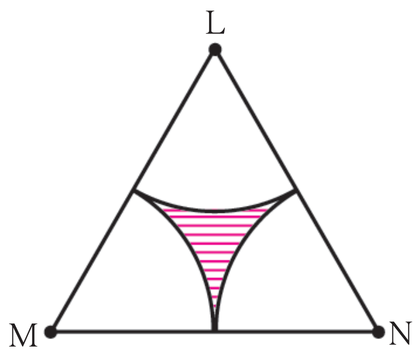
13. Δ LMN समबाहु त्रिभुज है । LM = 14 सेमी. त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष बिंदु को केंद्र मानकर तथा 7 सेमी त्रिज्या लेकर आकृति में दर्शाएनुसार तीन द्‌वैत्रिज्य खींचकर उसके आधार पर,

(1) A (Δ LMN) = ?

(2) एक द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(3) तीनों द्‌वैत्रिज्यों का संपूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(4) रेखांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.36

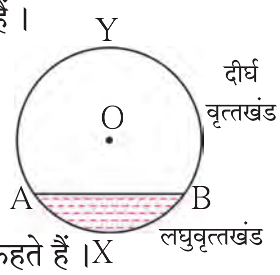
आओ जानें

वृत्तखंड (Segment of a circle)

वृत्त की जीवा तथा संगत वृत्त चाप द्‌वारा सीमित किए गए भाग को वृत्तखंड कहते हैं ।

लघु वृत्तखंड : जीवा तथा लघु वृत्तचाप के द्‌वारा सीमित किए हुए भाग को लघु वृत्तखंड कहते हैं । आकृति में वृत्तखंड AXB लघु वृत्तखंड है ।

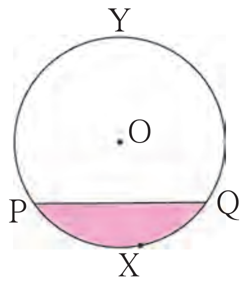
दीर्घ वृत्तखंड : जीवा तथा दीर्घ वृत्तचाप द्‌वारा सीमित किए हुए भाग को दीर्घ वृत्तखंड कहते हैं । आकृति में वृत्तखंड AYB यह दीर्घ वृत्तखंड है ।



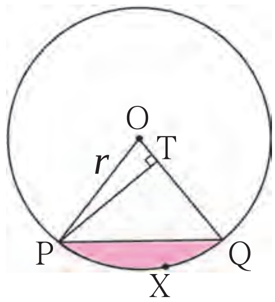
आकृति 7.37

अर्ध वृत्तखंड : व्यास द्‌वारा बनने वाले वृत्तखंडों को अर्ध वृत्तखंड कहते हैं ।

वृत्तखंड का क्षेत्रफल (Area of a segment)



आकृति 7.38



आकृति 7.39

आकृति में PXQ लघु वृत्तखंड है तथा PYQ दीर्घ वृत्तखंड है ।

लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं ?

वृत्तकेंद्र O से OP तथा OQ दो त्रिज्याएँ खींचें । हम द्‌वैत्रिज्य O–PXQ का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं । इसी प्रकार Δ OPQ का क्षेत्रफल भी ज्ञात कर सकते हैं । द्‌वैत्रिज्य के क्षेत्रफल में से त्रिभुज का क्षेत्रफल घटाने पर वृत्तखंड का क्षेत्रफल प्राप्त होता है ।

वृत्तखंड PXQ का क्षेत्रफल = द्‌वैत्रिज्य (O – PXQ) का क्षेत्रफल – Δ OPQ का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta \text{ OPQ का क्षेत्रफल} \text{ ---------- (I)}$$

आकृति 7.39 Δ OPQ में, रेख PT यह भुजा OQ पर डाला गया लंब है,

समकोण Δ OTP में, $\sin\theta = \frac{PT}{OP}$

$\therefore$ PT = OP $\times \sin\theta$

PT = r $\sin\theta$ $\quad\quad (\because OP = r)$

Δ OPQ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ ×आधार × ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times OQ \times PT$

$= \frac{1}{2} \times r \times r \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times r^2 \sin\theta$ ---------------- (ii)

(I) तथा (II) से,

वृत्तखंड PXQ का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

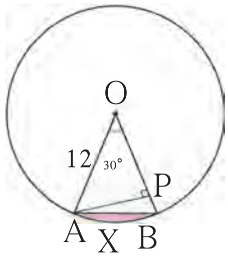
$$= r^2\left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$$

(हमने न्यूनकोण के साइन अनुपात का अध्ययन किया है इसलिए ध्यान रखें कि θ का माप 90° या उससे कम होने पर ही इस सूत्र का उपयोग कर सकते हैं ।)

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) आकृति में $\angle AOB = 30^\circ$, OA = 12 सेमी हो तो लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(π = 3.14)



आकृति 7.40

विधि I :

r = 12, $\theta = 30^\circ$, π = 3.14

द्‌वैत्रिज्य (O-AXB) का

क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 12^2$

$= 3.14 \times 12$

= 37.68 वर्ग सेमी

A(Δ OAB) = $\frac{1}{2} r^2 \times \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times 12^2 \times \sin 30$

$= \frac{1}{2} \times 144 \times \frac{1}{2}$ .....$(\because \sin 30 = \frac{1}{2})$

= 36 वर्ग सेमी

वृत्तखंड AXB का क्षेत्रफल = द्‌वैत्रिज्य (O - AXB) का क्षेत्रफल - A(Δ OAB)

= 37.68 - 36

= 1.68 वसेमी

विधि II :

वृत्तखंड AXB का क्षेत्रफल = $r^2\left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$

$= 12^2\left[\frac{3.14\times30}{360} - \frac{\sin 30}{2}\right]$

$= 144\left[\frac{3.14}{12} - \frac{1}{2\times2}\right]$

$= \frac{144}{4}\left[\frac{3.14}{3} - 1\right]$

$= 36\left[\frac{3.14-3}{3}\right]$

$= \frac{36}{3}\times0.14 = 12 \times 0.14$

= 1.68 वसेमी

उदा. (2) P केंद्रवाले किसी वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी है । जीवा AB द्‌वारा वृत्त केंद्र पर समकोण बनाया गया हो तो लघु वृत्तखंड तथा दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । (π = 3.14)

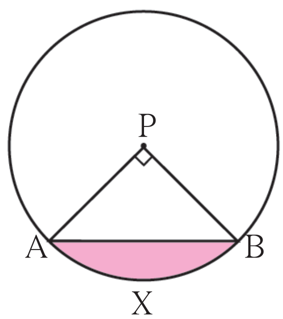
हल : r = 10 सेमी, θ = 90, π = 3.14

द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{90}{360} \times 3.14 \times 10^2$

$= \frac{1}{4} \times 314$

= 78.5 वसेमी



आकृति 7.41

A(ΔAPB) = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10$

= 50 वसेमी

लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल = द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल – त्रिभुज का क्षेत्रफल

= 78.5 - 50

= 28.5 वसेमी

दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल − लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

$= 3.14 \times 10^2 - 28.5$

$= 314 - 28.5$

= 285.5 वर्ग सेमी

उदा. (3) 14 सेमी त्रिज्यावाले किसी वृत्त में समषट्‌भुज अंतर्लिखित किया गया है तो समषट्‌भुज के बाह्य तथा वृत्त के अंत:भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$, $\sqrt{3} = 1.732$)

हल : समषट्‌भुज की भुजा = समषट्‌भुज के परिवृत्त की त्रिज्या

∴ समषट्‌भुज की भुजा = 14 सेमी

समषट्‌भुज का क्षेत्रफल = $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ (भुजा)^2

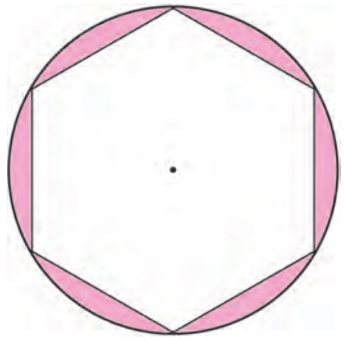
$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14^2$

= 509.208 वर्ग सेमी

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

= 616 वसेमी



आकृति 7.42

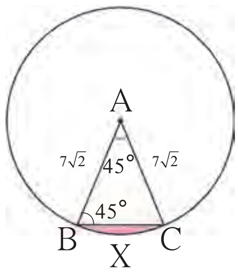
समषट्‌भुज के बाह्य तथा वृत्त के अंत:भाग का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल − समषट्‌भुज का क्षेत्रफल

$= 616 - 509.208$

= 106.792 वसेमी

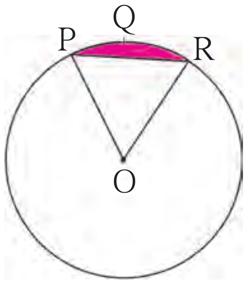
प्रश्नसंग्रह 7.4

1. आकृति 7.43 में बिंदु A केंद्रवाले वृत्त में $\angle ABC = 45^\circ$, $AC = 7\sqrt{2}$ सेमी, हो तो वृत्तखंड BXC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$, $\sqrt{2} = 1.41$)



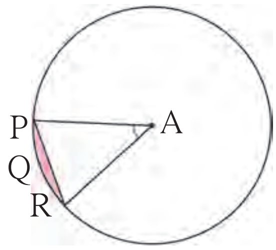
आकृति 7.43

2. आकृति 7.44 में बिंदु O वृत्त का केंद्र है। m(चाप PQR) = 60°, OP = 10 सेमी, हो तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

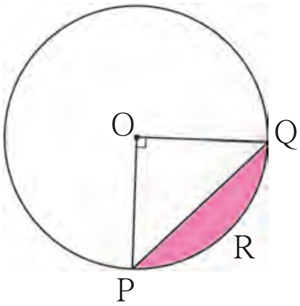


आकृति 7.44

3. संलग्न आकृति 7.45 में A केंद्र वाले वृत्त में $\angle$ PAR = 30° AP = 7.5 हो तो, वृत्तखंड PQR का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । (π = 3.14)



आकृति 7.45

4. 

आकृति 7.46

आकृति 7.46 में O केंद्रवाले किसी वृत्त में PQ जीवा है । $\angle$ POQ = 90°, और छायांकित भाग का क्षेत्रफल 114 वसेमी हो तो वृत्त कि त्रिज्या ज्ञात कीजिए । (π = 3.14)

5. 15 सेमी त्रिज्यावाले किसी वृत्त में जीवा PQ वृत्त के केंद्र से 60° का कोण बनाती है । उस जीवा से बनने वाले दीर्घ वृत्तखंड और लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । (π = 3.14, $\sqrt{3}$ = 1.73)

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

1. **नीचे दिए गए बहुवैकल्पिक प्रश्नों में से उचित विकल्प चुनकर लिखिए ।**

(1) किसी वृत्त की परिधि तथा क्षेत्रफल का अनुपात 2:7 हो तो उस उस वृत्त की परिधि कितनी होगी?

(A) 14π (B) $\frac{7}{\pi}$ (C) 7π (D) $\frac{14}{\pi}$

(2) 44 सेमी लंबाईवाले किसी वृत्त चाप का माप 160° हो तो उस वृत्त की परिधि कितनी होगी?

(A) 66 सेमी (B) 44 सेमी (C) 160 सेमी (D) 99 सेमी

(3) किसी चाप का माप 90° तथा त्रिज्या 7 सेमी हो तो द्‍वैत्रिज्य की परिमिति ज्ञात कीजिए ।

(A) 44 सेमी (B) 25 सेमी (C) 36 सेमी (D) 56 सेमी

(4) किसी शंकु के आधार की त्रिज्या 7 सेमी तथा ऊँचाई 24 सेमी हो तो शंकु का वक्रपृष्ठफल कितना होगा?

(A) 440 सेमी^{2} (B) 550 सेमी^{2} (C) 330 सेमी^{2} (D) 110 सेमी^{2}

(5) 5 सेमी त्रिज्या वाले किसी लंबवृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल 440 सेमी^{2} हो तो उस लंबवृत्ताकार बेलन की ऊँचाई कितनी होगी?

(A) $\frac{44}{\pi}$ सेमी (B) 22π सेमी (C) 14π सेमी (D) $\frac{22}{\pi}$ सेमी

(6) किसी शंकु को पिघलाकर उसके आधार की त्रिज्या के बराबर त्रिज्या वाला लंबवृत्ताकार बेलन बनाया गया । यदि लंबवृत्ताकार बेलन की ऊँचाई 5 सेमी हो तो शंकु की ऊँचाई कितनी होगी ?

(A) 15 सेमी (B) 10 सेमी (C) 18 सेमी (D) 5 सेमी

(7) 0.01 सेमी भुजावाले समघन का घनफल कितना घसेमी होगा?

(A) 1 (B) 0.001 (C) 0.0001 (D) 0.000001

(8) एक घन मीटर घनफल वाले समघन के भुजा की लंबाई कितनी होगी?

(A) 1 सेमी (B) 10 सेमी (C) 100 सेमी (D) 1000 सेमी

2. किसी शंकु छेद के आकारवाले कपड़े धोने के टब की ऊँचाई 45 सेमी है। टब के दोनों वृत्ताकार भाग की त्रिज्या क्रमश: 20 सेमी तथा 15 सेमी है। उस टब में पानी रखने की क्षमता कितनी होगी? ($\pi = \frac{22}{7}$)

3★. 1 सेमी त्रिज्यावाले प्लास्टिक की छोटी गोली पिघलाकर लंबवृत्ताकार बेलन के आकार की नली बनाई गई। नली की मोटाई 2 सेमी, ऊँचाई 90 सेमी तथा बाहरी त्रिज्या 30 सेमी हो तो नली बनवाने के लिए कितनी गोलियाँ पिघलानी पड़ेगी?

4. 16 सेमी लंबाई, 11 सेमी चौड़ाई, 10 सेमी ऊँचाईवाले किसी धातु के आयताकार बेलन (घनाभ) से धातु के 2 मिमी मोटे तथा 2 सेमी व्यासवाले कुछ सिक्के बनाने हों तो ऐसे कितने सिक्के बनेंगे ज्ञात कीजिए?

5. किसी मैदान को समतल करने के लिए 120 सेमी व्यास तथा 84 सेमी लंबाई वाले रोलर के 200 फेरे लगते हैं, तो 10 रु प्रतिवर्ग मीटर की दर से मैदान समतल करने में कितना खर्च लगेगा ?

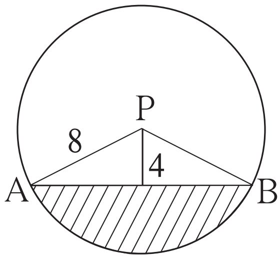
6. किसी धातु के खोखले गोले का व्यास 12 सेमी तथा उसकी मोटाई 0.01 मीटर हो तब उस खोखले गोले के बाहरी भाग का पृष्ठफल ज्ञात कीजिए तथा धातु का घनत्व 8.88 ग्राम प्रतिघनसेमी हो तो उस खोखले गोले का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

7. किसी वृत्ताकार बेलन के आकार वाली बाल्टी के आधार का व्यास 28 सेमी तथा ऊँचाई 20 सेमी है बाल्टी रेत से पूर्णत: भरी है उस बाल्टी की रेत को जमीन पर इसतरह पलटिए कि रेत का शंकु बने। रेत के शंकु की ऊँचाई 14 सेमी हो तो शंकु के आधार का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. 9 सेमी त्रिज्यावाले किसी धातु के ठोस गोले को पिघलाकर 4 मिमी व्यासवाला धातु का तार बनाया जाय तो उस तार की लंबाई कितने मीटर होगी ?

9. 6 सेमी त्रिज्यावाले किसी वृत्त के एक द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल 15π सेमी^{2} हो तो उस द्वैत्रिज्य के चाप का माप तथा वृत्त चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

10.

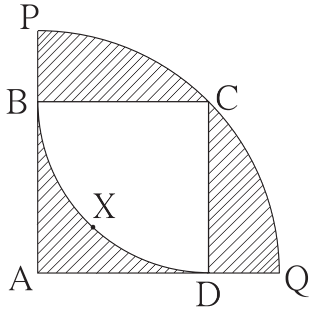


आकृति 7.47

संलग्न आकृति में वृत्त का केंद्र P और रेख AB वृत्त की जीवा है। PA = 8 सेमी और जीवा AB वृत्त के केंद्र से4 सेमी की दूरी पर हो तो रेखांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

11. द्वैत्रिज्य A–PCQ में $\square$ ABCD यह एक वर्ग है । द्वैत्रिज्य C – BXD की त्रिज्या 20 सेमी हो तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए नीचे दी गई कृति पूर्ण कीजिए ।



आकृति 7.48

हल : वर्ग ABCD की भुजा = द्वैत्रिज्य C – BXD की त्रिज्या = $\square$ सेमी

वर्ग का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2 = \square^2 = \square$ ..... (I)

वर्ग के छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= वर्ग ABCD का क्षेत्रफल – द्वैत्रिज्य C – BXD का क्षेत्रफल

$= \square - \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \square - \frac{90}{360} \times \frac{3.14}{1} \times \frac{400}{1}$

$= \square - 314$

$= \square$

बड़े द्वैत्रिज्य की त्रिज्या = वर्ग ABCD के विकर्ण की लंबाई

$= 20\sqrt{2}$

बड़े द्वैत्रिज्य में वर्ग के बाहर के छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= द्वैत्रिज्य (A – PCQ) का क्षेत्रफल – वर्ग ABCD का क्षेत्रफल

= A(A – PCQ) – A($\square$ ABCD)

$= \left(\frac{\theta}{360} \times \pi \times r^2\right) - \square^2$

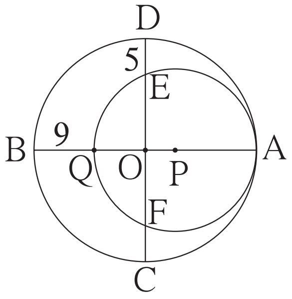
$= \frac{90}{360} \times 3.14\,(20\sqrt{2})^2 - (20)^2$

$= \square - \square$

$= \square$

$\therefore$ छायांकित भाग का संपूर्ण क्षेत्रफल = 86 + 228 = 314 वसेमी

12.



आकृति 7.49

O और P केंद्रवाले वृत्त परस्पर बिंदु A पर अंत:स्पर्श करते हैं, यदि BQ = 9, DE = 5, हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करने के लिए नीचे दी गई कृति पूर्ण कीजिए।

हल : माना बड़े वृत्त की त्रिज्या = R

तथा छोटे वृत्त की त्रिज्या = r

OA, OB, OC और OD यह बड़े वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

$\therefore$ OA = OB = OC = OD = R

PQ = PA = r

OQ = OB −BQ = □

OE = OD − DE = □

P केंद्रवाले वृत्त में दो जीवाओं के अंत: प्रतिच्छेदन के गुणधर्मानुसार

$OQ \times OA = OE \times OF$

□ $\times$ R = □ $\times$ □ ($\because$ OE = OF)

$R^2 - 9R = R^2 - 10R + 25$

R = □

AQ = 2r = AB − BQ

2r = 50 − 9 = 41

r = □ = □