4 भूमितीय रचनाएँ

आओ सीखें

- समरूप त्रिभुजों की रचना
  - ✻ दो समरूप त्रिभुजों में से किसी एक त्रिभुज की भुजाएँ और दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं का अनुपात दिया गया हो तो दूसरे की रचना करना ।
    - (i) एक भी शीर्षबिंदु सामान्य न होने पर ।
    - (ii) एक शीर्षबिंदु सामान्य होने पर ।
- वृत्त की स्पर्श रेखा खींचना
  - ✻ वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त की स्पर्शरेखा खींचना ।
    - (i) वृत्त के केंद्र का उपयोग करते हुए ।
    - (ii) वृत्त के केंद्र का उपयोग न करते हुए ।
  - ✻ वृत्त के बाह्य बिंदु से उस वृत्त पर स्पर्शरेखा खींचना ।

थोड़ा याद करें

पिछली कक्षाओं में हम नीचे दी गई रचना का अध्ययन कर चुके हैं । अब इन रचनाओं का पुनरावर्तन कीजिए ।

- दी गई रेखा के बाहर स्थित बिंदु से रेखा के समांतर रेखा खींचना ।
- दी गई रेखा का लंब समद्विभाजक खींचना ।
- त्रिभुज की भुजा तथा कोण में से पर्याप्त घटक दिए गए हों तो त्रिभुज की रचना करना ।
- दिए गए रेखाखंड का दी गई संख्या के आधार पर समान भाग करना ।
- दिए गए रेखाखंड का दिए गए अनुपात में विभाजन करना ।
- दिए गए कोण के सर्वांगसम कोण की रचना करना ।

कक्षा नौवीं में आपने परिसर का मानचित्र बनाने का उपक्रम किया है । किसी इमारत को बनाने के पूर्व उस इमारत की रूपरेखा तैयार करते हैं । विद्यालय का परिसर और उसका मानचित्र, इमारत और उसकी रूपरेखा परस्पर समरूप होते हैं । भूगोल, वास्तुशास्त्र, यंत्रशास्त्र आदि क्षेत्रों में समरूप आकृतियों को बनाने की आवश्यकता होती है । त्रिभुज सबसे सरल बंद आकृति है । इसलिए दिए गए त्रिभुजों के समरूप त्रिभुज कैसे बनाए जाते हैं, इसे देखेंगे ।

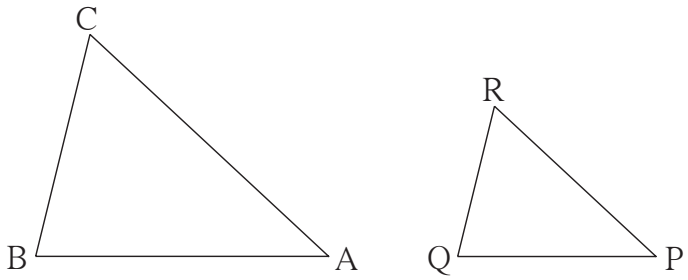
आओ जानें

समरूप त्रिभुजों की रचना

किसी त्रिभुज की भुजाएँ दी गई हों, तो उसके समरूप एवं अनुपात की शर्त पूरी करने वाले त्रिभुज की रचना करना ।

दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपात में होती हैं और उनके संगत कोण सर्वांगसम होते हैं । इस कथन का उपयोग करके दिए गए त्रिभुज के समरूप त्रिभुज की रचना की जा सकती है ।

उदा. (1) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, ΔABC में AB = 5.4 सेमी, BC = 4.2 सेमी, AC = 6.0 सेमी । AB: PQ = 3:2 तो ΔABC और ΔPQR की रचना कीजिए ।



आकृति 4.1

कच्ची आकृति

सर्वप्रथम दिए गए माप के अनुसार ΔABC की रचना कीजिए ।

ΔABC और ΔPQR समरूप हैं ।

$\therefore$ उनकी संगत भुजाएँ समानुपात में हैं ।

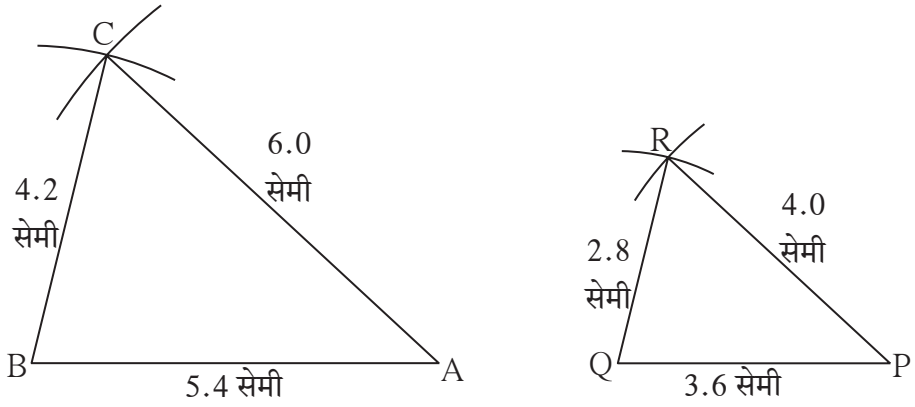
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{3}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

AB, BC, AC इन भुजाओं की लंबाई ज्ञात होने पर उपर्युक्त समीकरण से PQ, QR, PR भुजाओं की लंबाई प्राप्त होगी ।

समीकरण [I] से

$$\frac{5.4}{PQ} = \frac{4.2}{QR} = \frac{6.0}{PR} = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ PQ = 3.6 सेमी, QR = 2.8 सेमी और PR = 4.0 सेमी



आकृति 4.2

Δ PQR की सभी भुजाओं की लंबाई ज्ञात होने पर हम उस त्रिभुज की रचना कर सकते हैं ।

अधिक जानकारी हेतू :

कई बार दिए गए त्रिभुज के समरूप रचना किए जाने वाले त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई मापन पट्टी से मापन संभव नहीं होता । ऐसे समय दिए गए रेखाखंड के 'दिए गए संख्यानुसार समान भाग करना' इस रचना का उपयोग कर त्रिभुज की भुजा ज्ञात कर सकते हैं ।

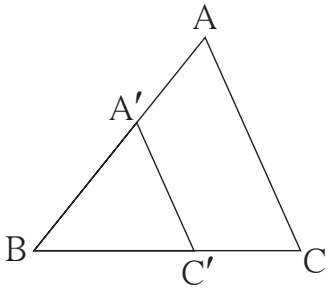
उदाहरणार्थ, भुजा AB की लंबाई $\frac{11.6}{3}$ सेमी हो, तो 11.6 सेमी लंबाई वाले रेखाखंड के 3 समान भाग कर रेख AB ज्ञात कर सकते हैं ।

उपर्युक्त उदा. (1) में रचना में दिए गए तथा खींचे जाने वाले त्रिभुजों में सामान्य शीर्ष बिंदु नहीं होता । एक शीर्ष बिंदु सामान्य हो तो त्रिभुज की रचना दिए गए उदाहरण में दर्शाए अनुसार करना सुविधाजनक होता है ।

उदा.(2) एक Δ ABC की रचना कीजिए ।

Δ ABC के समरूप Δ A′BC′ की रचना ऐसे कीजिए कि

AB : A′B = 5:3



आकृति 4.3

कच्ची आकृति

स्पष्टीकरण : एकरेखीय बिंदु B, A′, A की तरह ही बिंदु B, C′, C लीजिए ।

Δ ABC ~ Δ A′BC′ $\therefore$ $\angle$ ABC = $\angle$A′BC′

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}$$

$\therefore$ Δ ABC की भुजाएँ Δ A′BC′ की संगत भुजाओं से बड़ी होगी ।

$\therefore$ रेख BC के 5 समान भाग करने पर उसके तीन समान भाग के बराबर रेख BC′ की लंबाई होगी ।

Δ ABC खींचकर रेख BC पर बिंदु B से तीन भाग के बराबर दूरी पर बिंदु C′ होना चाहिए । बिंदु C′ से रेख AC के समांतर खींची गई रेखा, रेख BA को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करेगी वह बिंदु A′ होगा ।

$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{5}$ अर्थात, $\frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{3}$ ..... विपर्य स्थानुपात से

रचना के सोपान :

(1) किसी Δ ABC की रचना कीजिए ।

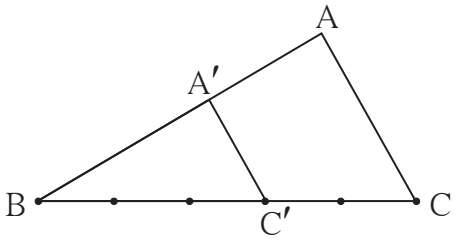
(2) रेख BC के पाँच समान भाग कीजिए ।

(3) बिंदु B से तीसरे बिंदु को C′ नाम दीजिए ।

$\therefore BC' = \frac{3}{5} BC$

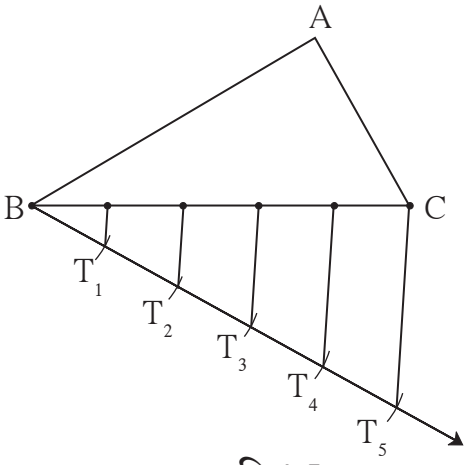
(4) अब C′ से रेख CA के समांतर रेखा खींचिए । यह रेख AB को जहाँ प्रतिच्छेदित करती है, उस बिंदु को A′ नाम दीजिए ।

(5) Δ ABC के समरूप Δ A′BC′ यही अभीष्ट त्रिभुज है ।



आकृति 4.4

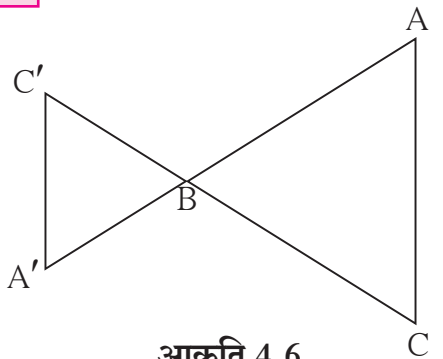
टीप : रेख BC के पाँच समान भाग करने पर, रेख BC के जिस ओर बिंदु A है उसके विपरीत ओर बिंदु B से एक किरण खींचकर उसे विभाजित करना सुविधाजनक होता है ।
उस किरण पर $BT_1 = T_1T_2 = T_2T_3 = T_3T_4 = T_4T_5$ ऐसे समान भाग लीजिए ।
T_5C जोड़े तथा T_1, T_2, T_3, T_4 से T_5C के समांतर रेखा खींचिए ।



आकृति 4.5

थोड़ा सोचें

समरूप त्रिभुज की रचना करने के लिए संलग्न आकृति में दर्शाएनुसार Δ A′BC′ खींच सकते हैं ।
इस आकृति के अनुसार Δ A′BC′ की रचना करनी हो तो रचना के सोपान में कौन-सा बदलाव करना होगा ?



आकृति 4.6

उदा.(3) Δ ABC के समरूप Δ A′BC′ की रचना इस प्रकार कीजिए कि AB : A′B = 5:7

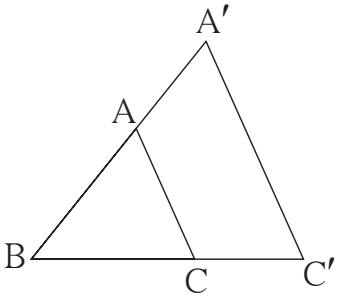
स्पष्टीकरण : एकरेखीय बिंदु B, A, A′ की तरह ही बिंदु B, C, C′ लीजिए।

Δ ABC ~ Δ A′BC′ और AB : A′B = 5:7

$\therefore$ Δ ABC की भुजा Δ A′BC′ की संगत भुजाओं से छोटी होगी

उसी प्रकार $\angle ABC \cong \angle A'BC'$

इस मुद्दे को ध्यान में रखकर कच्ची आकृति बनाएँ।



आकृति 4.7

कच्ची आकृति

अब $\frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7}$

$\therefore$ रेख BC के 5 समान भाग करे तो उनमें से किसी एक भाग का 7 गुना रेख BC′ की लंबाई होगी।

$\therefore$ Δ ABC खींचकर रेख BC के पाँच समान भाग करें। बिंदु C′ किरण BC पर बिंदु B से सात भाग की दूरी पर होगा।

समानुपात के मूलभूत प्रमेय के अनुसार बिंदु C′ से भुजा AC के समांतर रेखा खींचें तो वह बढ़ी हुई किरण BA को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है, वह बिंदु A′ होगा। रेख A′C′ खींचने पर Δ A′BC′ अभीष्ट (अपेक्षित) त्रिभुज प्राप्त होगा।

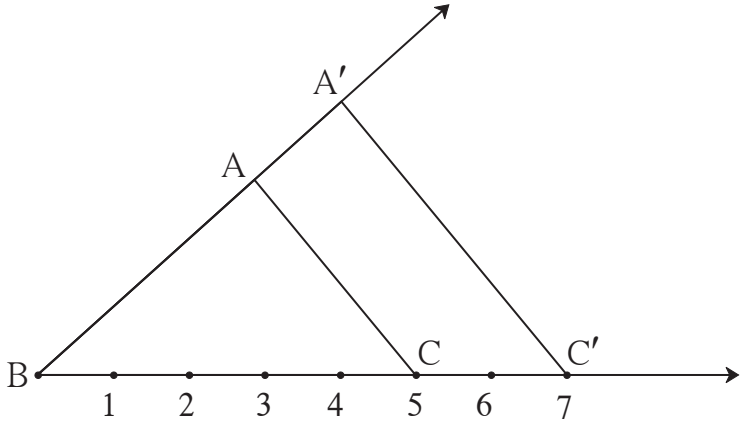
रचना के सोपान :

(1) Δ ABC बनाइए।

(2) रेख BC के पाँच समान भाग कीजिए। किरण BC पर बिंदु C′ इस प्रकार लें, कि रेख BC′ की लंबाई रेख BC के एक भाग की सात गुना हो।

(3) रेख AC के C′ से समांतर रेखा खींचिए। यह रेखा किरण BA को जहाँ प्रतिच्छेदित करती है, उस बिंदु को A′ नाम दीजिए।

Δ A′BC′ यह Δ ABC के समरूप अभीष्ट त्रिभुज है।



आकृति 4.8

प्रश्नसंग्रह 4.1

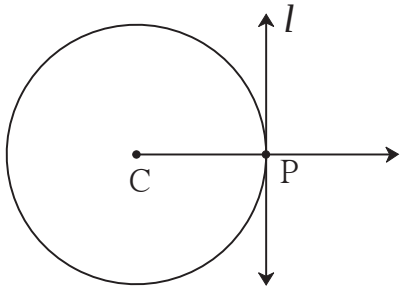
1. Δ ABC ~ Δ LMN , Δ ABC में AB = 5.5 सेमी, BC = 6 सेमी, CA = 4.5 सेमी और $\frac{BC}{MN} = \frac{5}{4}$ तो Δ ABC तथा Δ LMN की रचना कीजिए ।
2. Δ PQR ~ Δ LTR, Δ PQR में PQ = 4.2 सेमी, QR = 5.4 सेमी, PR = 4.8 सेमी और $\frac{PQ}{LT} = \frac{3}{4}$ तो Δ PQR तथा Δ LTR की रचना कीजिए ।
3. Δ RST ~ Δ XYZ, Δ RST में RS = 4.5 सेमी, $\angle$ RST = 40°, ST = 5.7 सेमी और $\frac{RS}{XY} = \frac{3}{5}$ तो Δ RST तथा Δ XYZ की रचना कीजिए ।
4. Δ AMT ~ Δ AHE, Δ AMT में AM = 6.3 सेमी, $\angle$ TAM = 50°, AT = 5.6 सेमी और $\frac{AM}{AH} = \frac{7}{5}$ तो Δ AHE की रचना कीजिए ।

आओ जानें

वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त की स्पर्शरेखा खींचना

(i) वृत्त केंद्र का उपयोग करते हुए :

स्पष्टीकरण :



आकृति 4.9

माना C केंद्रवाले वृत्तपर स्थित बिंदु P से जानेवाली, स्पर्श रेखा l खींचना है ।

त्रिज्या के बाह्य छोर से खींची गई लंब रेखा उस वृत्त की स्पर्श रेखा होती है, इस गुणधर्म का उपयोग कीजिए । त्रिज्या CP खींची तो रेख CP $\perp$ रेखा l अर्थात त्रिज्या CP पर बिंदु P से जाने वाली लंब रेखा ही अभीष्ट स्पर्शरेखा होगी ।

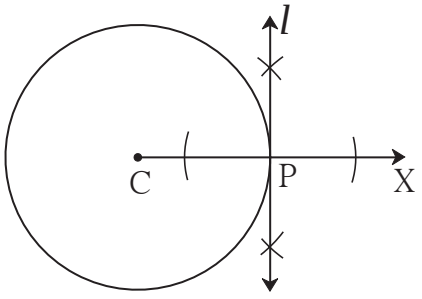
रेखा पर दी गई बिंदु से जाने वाली, उस रेखा पर लंब रेखा की रचना यहाँ करनी पड़ेगी । इसलिए सुविधा के लिए किरण CP खींचकर रेखा l की रचना करें ।

रचना के सोपान :

(1) C केंद्रवाला एक वृत्त खींचिए, उसपर एक बिंदु P लीजिए ।

(2) किरण CP खींचिए ।

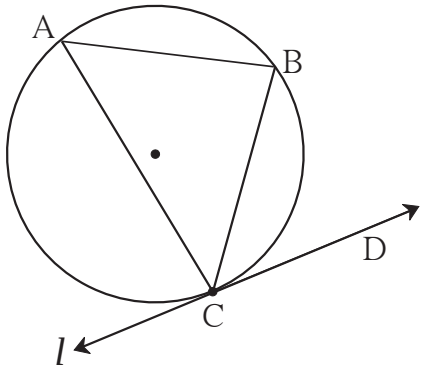
(3) बिंदु P से किरण CX पर लंब रेखा l खींचिए । रेखा l, बिंदु P से जानेवाली वृत्त की अभीष्ट स्पर्शरेखा है ।



आकृति 4.10

(ii) वृत्त केंद्र का उपयोग न करते हुए :

उदाहरण : उचित त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए, उसपर कोई एक बिंदु C लीजिए । वृत्त केंद्र का उपयोग न करते हुए बिंदु C से होकर जाने वाली उस वृत्त की स्पर्शरेखा खींचिए ।



आकृति 4.11

स्पष्टीकरण :

माना आकृति में दर्शाए अनुसार रेखा l बिंदु C से जाने वाली स्पर्श रेखा है । रेख CB जीवा और ∠ CAB अंतर्लिखित कोण खींचिए । स्पर्श रेखा छेदन रेखा कोण प्रमेय के अनुसार ∠CAB ≅ ∠BCD ।

स्पर्श रेखा–छेदन रेखा कोण प्रमेय के विलोम अनुसार ,

यदि ∠CAB ≅ ∠BCD, तो रेखा l यह वृत्त की स्पर्श रेखा होती है ।

अर्थात रेख CB वृत्त की जीवा और ∠CAB अंतर्लिखित कोण खींचिए । ∠BCD की रचना इस प्रकार करें कि, ∠BCD ≅ ∠BAC

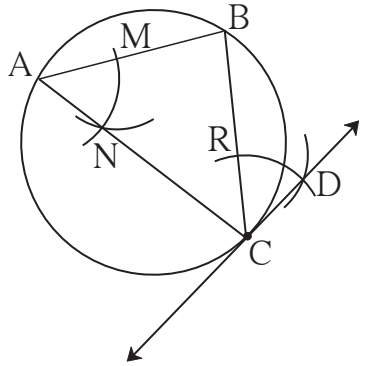
रेखा CD यह दिए गए वृत्त के बिंदु C से जाने वाली उस वृत्त की स्पर्श रेखा होगी ।

रचना के सोपान :

(1) एक वृत्त खींचकर उसपर कोई एक बिंदु C लीजिए ।

(2) जीवा CB और अंतर्लिखित ∠CAB खींचिए ।

(3) बिंदु A केंद्र तथा उचित (सुविधाजनक) त्रिज्या लेकर ∠BAC की भुजाओं को बिंदु M तथा बिंदु N पर प्रतिच्छेदित करने वाला चाप खींचिए ।



आकृति 4.12

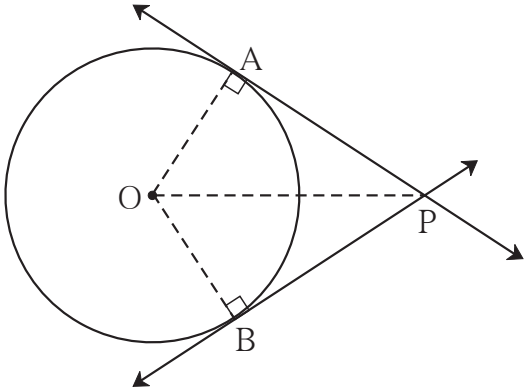
(4) वही त्रिज्या तथा बिंदु C को केंद्र मानकर जीवा CB को प्रतिच्छेदित करने वाला चाप खींचिए उस प्रतिच्छेदन बिंदु को R नाम दीजिए ।

(5) कंपास में MN के बराबर त्रिज्या लीजिए । केंद्र R लेकर पहले खींचे गए चाप को प्रतिच्छेदित करने वाला एक और चाप खींचिए । उस प्रतिच्छेदन बिंदु को D नाम दीजिए । रेखा CD खींचिए । रेखा CD यह वृत्त की स्पर्श रेखा है ।

(उपर्युक्त आकृति में ∠ MAN ≅ ∠ BCD के कारण को ध्यान में रखिए । रेखाखंड MN तथा रेखाखंड RD खींचने पर – भु भु भु कसौटी के अनुसार Δ MAN ≅ Δ RCD. ∴ ∠ MAN ≅ ∠ BCD)

वृत्त के बाह्य भाग में स्थित किसी बिंदु से वृत्त पर स्पर्शरेखा खींचना

स्पष्टीकरण :



आकृति 4.13

माना, आकृति में दर्शाए अनुसार 'O' केंद्रवाले वृत्त के बाह्यभाग में एक बिंदु P स्थित है । बिंदु P से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा वृत्त को बिंदु A तथा बिंदु B पर स्पर्श करती है । वृत्त पर बिंदु A तथा बिंदु B का स्थान निश्चित हो जाने पर स्पर्श रेखा PA और PB खींची जा सकती है । क्योंकि त्रिज्या OA और OB खींचा तो त्रिज्या OA $\perp$ रेखा PA और त्रिज्या OB $\perp$ रेखा PB.

समकोण Δ OAP तथा Δ OBP में, OP यह दोनों त्रिभुज के कर्ण हैं । यदि रेख OP व्यास वाला वृत्त खींचा तो वह O केंद्रवाले वृत्त को जिन बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करेंगे वे बिंदु A और B होंगे, क्योंकि अर्धवृत्त में अंतर्लिखित कोण समकोण होता है ।

रचना के सोपान :

(1) 'O' केंद्र तथा उचित माप की त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए ।

(2) वृत्त के बाहर एक बिंदु P लीजिए ।

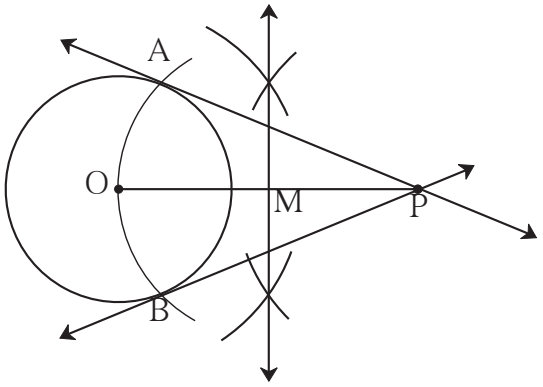
(3) रेख OP खींचिए । रेख OP का लंब समद्विभाजक खींचकर मध्य बिंदु M प्राप्त कीजिए ।

(4) केंद्र M तथा त्रिज्या OM लेकर वृत्त चाप बनाइए ।

(5) यह वृत्त चाप दिए गए वृत्त को बिंदु A और बिंदु B पर प्रतिच्छेदित करेगा ।

(6) रेखा PA तथा रेखा PB खींचिए ।

रेखा PA तथा रेखा PB वृत्त की अभीष्ट स्पर्शरेखाएँ हैं ।



आकृति 4.14

प्रश्नसंग्रह 4.2

1. बिंदु P केंद्र और त्रिज्या 3.2 सेमी लेकर वृत्त पर स्थित बिंदु M से जानेवाली स्पर्शरेखा खींचिए ।
2. 2.7 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्त बनाइए । इस वृत्त पर स्थित एक बिंदु से वृत्त पर स्पर्शरेखा खींचिए ।
3. 3.6 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्त खींचिए । वृत्त केंद्र का उपयोग न करते हुए वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए ।
4. 3.3 सेमी त्रिज्यावाला एक वृत्त बनाइए । वृत्त में 6.6 सेमी लंबाई वाली एक जीवा PQ खींचिए । स्पर्श रेखा के संदर्भ में अपने निरीक्षण दर्ज कीजिए ।

5. 3.4 सेमी त्रिज्यावाला एक वृत्त खींचिए । उसमें 5.7 सेमी लंबाई वाली जीवा MN खींचिए । बिंदु M तथा बिंदु N से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए ।

6. केंद्र P तथा त्रिज्या 3.4 सेमी लेकर एक वृत्त खींचिए । वृत्त के केंद्र से 5.5 सेमी दूरी पर एक बिंदु Q लीजिए । Q से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए ।

7. 4.1 सेमी त्रिज्यावाला एक वृत्त खींचिए । वृत्त के केंद्र से 7.3 सेमी दूर स्थित बिंदु से स्पर्श रेखा खींचिए ।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

1. उचित विकल्प चुनिए :

(1) वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त पर खींची जा सकने वाली स्पर्शरेखाओं की संख्या ..... होती है ।

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

(2) वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से उस वृत्त पर अधिक से अधिक ..... स्पर्श रेखा खींची जा सकती है ।

(A) 2 (B) 1 (C) एक और केवल एक (D) 0

(3) यदि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $\frac{AB}{PQ} = \frac{7}{5}$ तो .....

(A) ΔABC बड़ा होगा (B) ΔPQR बड़ा होगा

(C) दोनों त्रिभुज समान होंगे (D) निश्चित नहीं कहा जा सकता

2. O केंद्र तथा 3.5 सेमी त्रिज्यावाला एक वृत्त बनाइए । वृत्त के केंद्र से 5.7 सेमी दूरी पर एक बिंदु P लीजिए । बिंदु P से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए ।

3. एक वृत्त खींचिए । वृत्त पर एक बिंदु A लेकर वृत्त के केंद्र का उपयोग किए बिना वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए ।

4. 6.4 सेमी व्यासवाला एक वृत्त खींचिए । वृत्त के केंद्र से वृत्त के माप के बराबर दूरी पर एक बिंदु R लीजिए । इस बिंदु से वृत्त की स्पर्श रेखाएँ खींचिए ।

5. P केंद्रवाला एक वृत्त खींचिए । 100° माप का एक लघु चाप AB खींचिए । बिंदु A तथा बिंदु B से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए ।

6. E केंद्र तथा 3.4 सेमी त्रिज्यावाला एक वृत्त खींचिए । वृत्त पर एक बिंदु F लीजिए । बिंदु A इस प्रकार लीजिए कि E-F-A और FA = 4.1 सेमी । बिंदु A से वृत्त पर स्पर्श रेखा खींचिए ।

7. यदि $\Delta ABC \sim \Delta LBN$, ΔABC में AB = 5.1 सेमी, $\angle B = 40^\circ$, BC = 4.8 सेमी, $\frac{AC}{LN} = \frac{4}{7}$ तो ΔABC तथा ΔLBN की रचना कीजिए ।

8. ΔPYQ में, PY = 6.3 सेमी, YQ = 7.2 सेमी, PQ = 5.8 सेमी । त्रिभुज PQR के समरूप ΔXYZ की रचना इस प्रकार कीजिए कि, $\frac{YZ}{YQ} = \frac{6}{5}$ हो ।