

2

पायथागोरस का प्रमेय



आओ सीखें

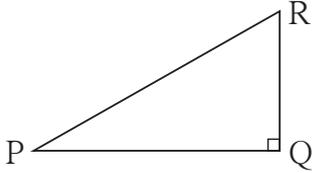
- पायथागोरस का त्रिक
- ज्यामितीय माध्य का प्रमेय
- पायथागोरस के प्रमेय का उपयोजन
- समकोण त्रिभुजों की समरूपता
- पायथागोरस का प्रमेय
- अपोलोनियस का प्रमेय



थोड़ा याद करें

पायथागोरस का प्रमेय :

समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग, अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है ।



आकृति 2.1

आकृति 2.1 देखिए ΔPQR में $\angle PQR = 90^\circ$

$$l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$$

इसे हम $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ ऐसा लिखेंगे ।

ΔPQR में भुजा PQ, QR तथा PR की लंबाई क्रमशः r , p और q इन चिन्हों से दर्शाई जाती है । इस प्रकार आकृति 2.1 के संदर्भ में पायथागोरस के प्रमेय को $q^2 = p^2 + r^2$ ऐसा भी लिखा जा सकता है।

पायथागोरस के त्रिक :

प्राकृत संख्याओं के त्रिक में यदि बड़ी संख्या का वर्ग अन्य दो संख्याओं के वर्गों के योगफल के बराबर हो तो उन्हें पायथागोरस का त्रिक कहते हैं ।

उदाहरणार्थ : (11, 60, 61) इन संख्याओं के त्रिक में,

$$11^2 = 121, \quad 60^2 = 3600, \quad 61^2 = 3721 \quad \text{और} \quad 121 + 3600 = 3721$$

यहाँ पर बड़ी संख्या का वर्ग अन्य दो संख्याओं के वर्गों के योगफल के बराबर है ।

\therefore 11, 60, 61 यह 'पायथागोरस का त्रिक' है ।

उसी प्रकार (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (24, 25, 7) भी पायथागोरस के त्रिक हैं, इसकी जाँच करें ।

'पायथागोरस के त्रिक' की संख्याओं को किसी भी क्रम से लिखा जा सकता है ।

पायथागोरस का प्रमेय (Theorem of Pythagoras)

समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

दत्त : ΔABC में, $\angle ABC = 90^\circ$

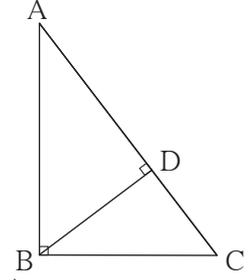
साध्य : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : बिंदु B से भुजा AC पर एक लंब BD

खींचिए A-D-C

उपपत्ति : समकोण ΔABC में रेखा $BD \perp$ कर्ण AC (रचना)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC$ (समकोण त्रिभुजों की समरूपता) आकृति 2.7



$\Delta ABC \sim \Delta ADB$

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB}$ - (समरूप त्रिभुजों की संगतभुजाएँ)

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$

$AB^2 = AD \times AC$ (I)

(I) तथा (II) का योग करनेपर

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= AD \times AC + DC \times AC \\ &= AC (AD + DC) \\ &= AC \times AC \text{ (A-D-C)} \end{aligned}$$

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

इसीप्रकार, $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ - (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$

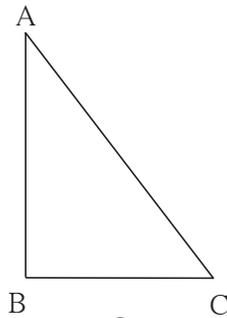
$BC^2 = DC \times AC$ (II)

पायथागोरस के प्रमेय का विलोम (Converse of Pythagoras theorem)

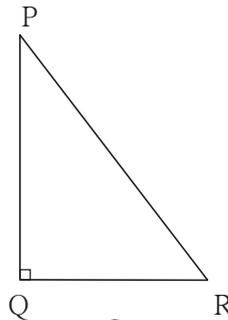
यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है, तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है।

दत्त : ΔABC में, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

साध्य : $\angle ABC = 90^\circ$



आकृति 2.8

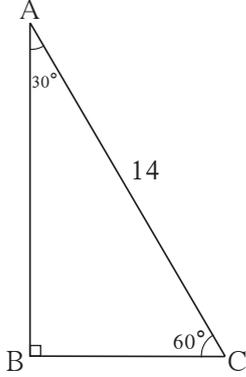


आकृति 2.9

हल किए हुए उदाहरण

उदा. (1) आकृति 2.11 देखिए। ΔABC में $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AC = 14$ तो AB तथा BC का मान ज्ञात कीजिए।

हल :



आकृति 2.11

ΔABC में,

$$\angle B = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, \therefore \angle C = 60^\circ$$

$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ के प्रमेयानुसार,

$$BC = \frac{1}{2} \times AC$$

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC$$

$$BC = \frac{1}{2} \times 14$$

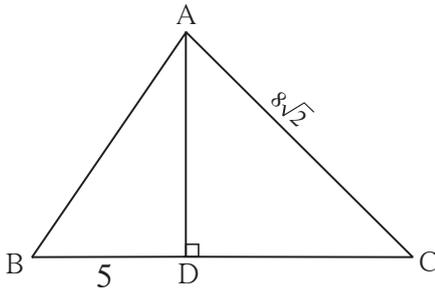
$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14$$

$$BC = 7$$

$$AB = 7\sqrt{3}$$

उदा. (2) आकृति 2.12 देखिए ΔABC में रेखा $AD \perp$ रेखा BC , $\angle C = 45^\circ$, $BD = 5$ और $AC = 8\sqrt{2}$, तो AD और BC का मान ज्ञात कीजिए।

हल :



आकृति 2.12

ΔADC में,

$$\angle ADC = 90^\circ, \angle C = 45^\circ, \therefore \angle DAC = 45^\circ$$

$$AD = DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2} \dots (\text{45}^\circ - \text{45}^\circ - \text{90}^\circ \text{ के प्रमेयानुसार})$$

$$\therefore DC = 8 \quad \therefore AD = 8$$

$$BC = BD + DC$$

$$= 5 + 8$$

$$= 13$$

उदा. (3) आकृति 2.13 में $\angle PQR = 90^\circ$, रेखा $QN \perp$ रेखा PR , $PN = 9$, $NR = 16$ तो QN ज्ञात कीजिए।

हल : ΔPQR में, रेखा $QN \perp$ रेखा PR

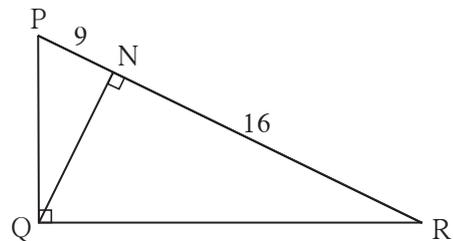
$$\therefore QN^2 = PN \times NR \dots (\text{ज्यामितिय माध्य का प्रमेय})$$

$$\therefore QN = \sqrt{PN \times NR}$$

$$= \sqrt{9 \times 16}$$

$$= 3 \times 4$$

$$= 12$$



आकृति 2.13



आओ जानें

पायथागोरस के प्रमेय का उपयोजन

पायथागोरस के प्रमेय में समकोण त्रिभुज का कर्ण और समकोण बनाने वाली भुजाओं में परस्पर संबंध अर्थात् समकोण की सम्मुख भुजा और अन्य दो भुजाओं में संबंध बताया गया है।

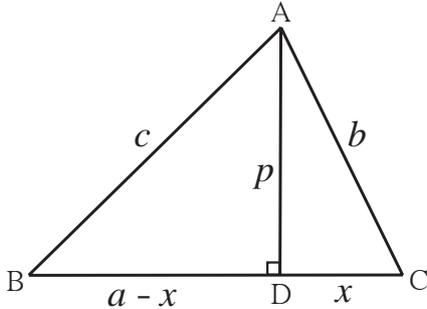
त्रिभुज में न्यूनकोण की सम्मुख भुजा का अन्य दो भुजाओं से संबंध, इसी प्रकार अधिक कोण की सम्मुख भुजा का अन्य दो भुजाओं से संबंध पायथागोरस के प्रमेय से निश्चित किया जाता है। यह संबंध निम्नलिखित उदाहरणों से समझिए।

उदा.(1) ΔABC में, $\angle C$ न्यूनकोण है, रेख $AD \perp$ रेख BC तो सिद्ध कीजिए कि :

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$$

दी गई आकृति में, $AB = c$, $AC = b$, $AD = p$, $BC = a$, $DC = x$ माना।

$$\therefore BD = a - x$$



आकृति 2.23

(II) में p^2 का मान, (I) में रखनेपर,

$$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$$

$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$$

ΔADB में, पायथागोरस के प्रमेयानुसार

$$c^2 = (a-x)^2 + \square$$

$$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \square \dots\dots\dots (I)$$

ΔADC में, पायथागोरस के प्रमेयानुसार

$$b^2 = p^2 + \square$$

$$p^2 = b^2 - \square \dots\dots\dots (II)$$

उदा.(2) ΔABC में, $\angle ACB$ अधिक कोण है, रेख $AD \perp$ रेख BC , तो सिद्ध कीजिए कि :

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$$

मान लीजिए $AD = p$, $AC = b$, $AB = c$,

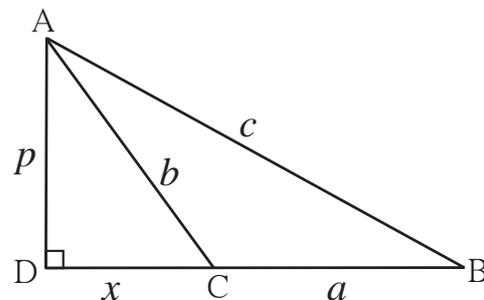
$BC = a$, $DC = x$ (माना)

$$DB = a + x$$

ΔADB में, पायथागोरस के प्रमेयानुसार,

$$c^2 = (a + x)^2 + p^2$$

$$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + p^2 \dots\dots\dots (I)$$

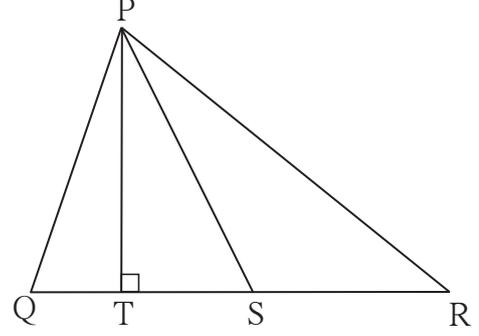


आकृति 2.24

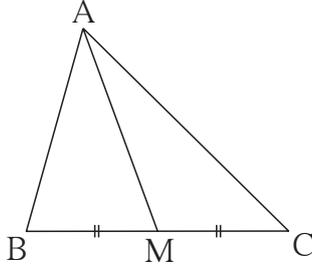
1. ΔPQR में, बिंदु S यह भुजा QR का मध्यबिंदु है, यदि $PQ = 11$, $PR = 17$, $PS = 13$ हो तो QR की लंबाई ज्ञात कीजिए।
2. ΔABC में, $AB = 10$, $AC = 7$, $BC = 9$ तो बिंदु C से भुजा AB पर खींची गई माध्यिका की लंबाई कितनी होगी?
3. आकृति 2.28 में रेख PS यह ΔPQR की माध्यिका है और $PT \perp QR$ तो सिद्ध कीजिए कि,

$$(1) PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$$

$$(2) PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$$



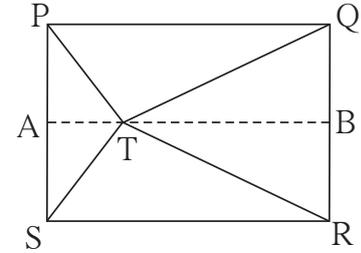
आकृति 2.28



आकृति 2.29

4. आकृति 2.29 में, ΔABC में बिंदु M यह भुजा BC का मध्यबिंदु है, यदि $AB^2 + AC^2 = 290$ सेमी, $AM = 8$ सेमी, तो BC ज्ञात कीजिए।

- 5*. आकृति 2.30 में दर्शाएनुसार बिंदु T यह आयत PQRS के अंतर्भाग में स्थित है। तो सिद्ध कीजिए कि, $TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$
(आकृति में दर्शाएनुसार रेख $AB \parallel$ भुजा SR ऐसा खींचिए कि A-T-B)

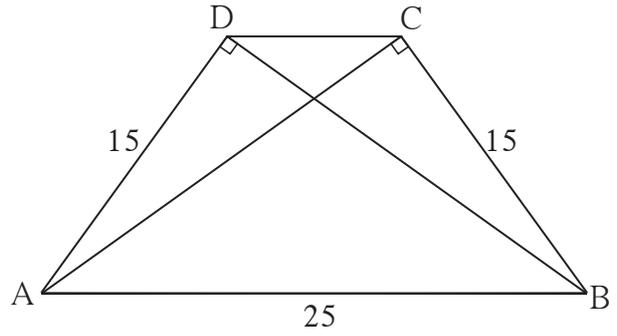


आकृति 2.30

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

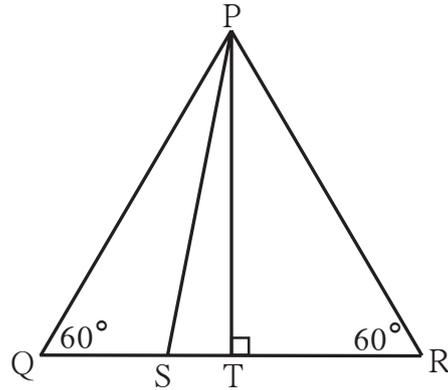
1. निम्नलिखित बहुवैकल्पिक प्रश्नों के दिए गए उत्तरों में से उचित विकल्प चुनकर लिखिए।
 - (1) निम्नलिखित में से कौन-सा पायथागोरस का त्रिक है ?
(A) (1, 5, 10) (B) (3, 4, 5) (C) (2, 2, 2) (D) (5, 5, 2)
 - (2) समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं के वर्गों का योगफल 169 हो तो उसके कर्ण की लंबाई कितनी होगी ?
(A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

15. समलंब चतुर्भुज ABCD में,
रेख AB \parallel रेख DC
रेख BD \perp रेख AD,
रेख AC \perp रेख BC,
यदि AD = 15, BC = 15 और AB = 25
हो तो A(□ABCD) का मान कितना होगा?



आकृति 2.34

- 16*. संलग्न आकृति में ΔPQR एक समबाहु त्रिभुज है जिसमें बिंदु S यह रेख QR पर इस प्रकार है कि,
 $QS = \frac{1}{3} QR$ तो सिद्ध कीजिए कि;
 $9 PS^2 = 7 PQ^2$



आकृति 2.35

- 17*. ΔPQR में रेख PM यह माधिका है। यदि $PQ = 40$, $PR = 42$ और $PM = 29$, तो QR की लंबाई ज्ञात कीजिए।
18. ΔABC में रेख AM यह माधिका है। यदि $AB = 22$, $AC = 34$, $BC = 24$, तो AM की लंबाई ज्ञात कीजिए।



ICT Tools or Links

इंटरनेट से 'Story on the life of Pythagoras' की जानकारी प्राप्त कर के Slide show तैयार कीजिए।

