

1

समरूपता



आओ सीखें

- दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात
- समानुपात का मूलभूत प्रमेय
- समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम
- त्रिभुज के कोण समद्विभाजक का गुणधर्म
- तीन समांतर रेखा तथा तिर्यक रेखा द्वारा बने अंतःखंडों का गुणधर्म
- समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल का गुणधर्म
- त्रिभुजों की समरूपता की कसौटी



थोड़ा याद करें

हमने अनुपात तथा समानुपात का अध्ययन किया है। a और b इन दो संख्याओं का अनुपात $\frac{m}{n}$ है, इस कथन को a और b दोनों संख्याएँ $m:n$ के अनुपात में हैं, ऐसा भी लिखा जाता है।

इस संकल्पना के लिए हम सामान्यतः धनात्मक वास्तविक संख्या का विचार करते हैं। हमें यह ज्ञात है कि रेखाखंडों की लंबाई और किसी आकृति का क्षेत्रफल धनात्मक वास्तविक संख्या होती है।

हमें त्रिभुजों के क्षेत्रफल के सूत्र की जानकारी है।

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{ऊँचाई}$$



आओ जानें

दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात (Ratio of areas of two triangles)

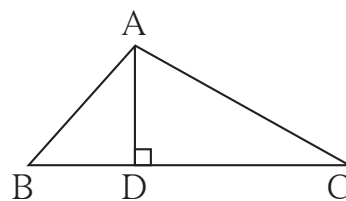
किन्हीं दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करेंगे।

उदाहरण $\triangle ABC$ का आधार BC तथा ऊँचाई AD है।

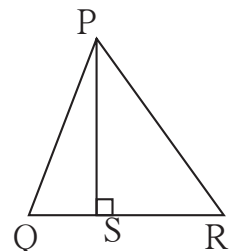
$\triangle PQR$ का आधार QR तथा ऊँचाई PS

है।

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AD}{\frac{1}{2} \times QR \times PS}$$



आकृति 1.1



आकृति 1.2



इस आधारपर दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके आधारों और संगत ऊँचाइयों के गुणनफलों के अनुपात के बराबर होता है ।

इन दो त्रिभुजों के संबंध में कुछ शर्तें रखकर देखिये ।

A diagram of a triangle with vertices labeled A, B, and C. Vertex A is at the top, B is at the bottom left, and C is at the bottom right. A vertical line segment from A to the base BC is labeled h . A right-angle symbol is shown at the intersection of this segment and the base. A double-headed arrow below the base BC is labeled b_1 .

A diagram of a triangle PQR with vertex P at the top and base QR at the bottom. A vertical line segment PS represents the height h , where S is a point on the base QR . A right-angle symbol is shown at S . A double-headed arrow below the base QR is labeled b_2 .

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times h}{QR \times h} = \frac{BC}{QR}$$

गुणधर्म : समान ऊँचाई वाले दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके संगत आधारों के अनुपात के बराबर होता है।

A diagram of a triangle ABC with vertices A , B , and C . The base is the line segment AB . A solid vertical line segment CD is drawn from vertex C to point D on AB , representing the altitude. A dashed line segment AP is drawn from vertex A to point P on the side BC . A solid vertical line segment h_2 is drawn from point P to point Q on the line AB , representing the distance from P to the line AB . Right angle symbols are shown at D and Q .

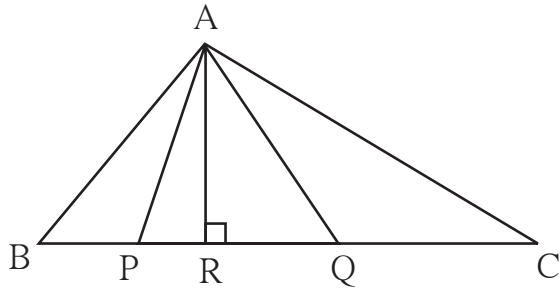
$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{AB \times h_1}{AB \times h_2}$$

गुणधर्म : समान आधारवाले दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत ऊँचाइयों के अनुपात के बराबर होता है।

कृति :

नीचे दी गई रिक्त चौखटें भरिए ।

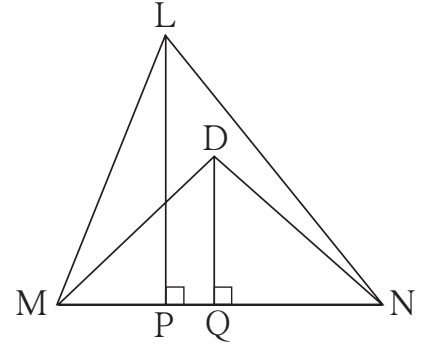
(i)



आकृति 1.6

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APQ)} = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

(ii)



आकृति 1.7

$$\frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta DMN)} = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

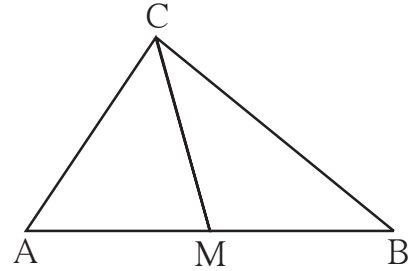
(iii)

बिंदु M यह रेखा AB का मध्य बिंदु है ।

रेखा CM यह ΔABC की माधिका है ।

$$\begin{aligned} \therefore \frac{A(\Delta AMC)}{A(\Delta BMC)} &= \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \\ &= \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{} \end{aligned}$$

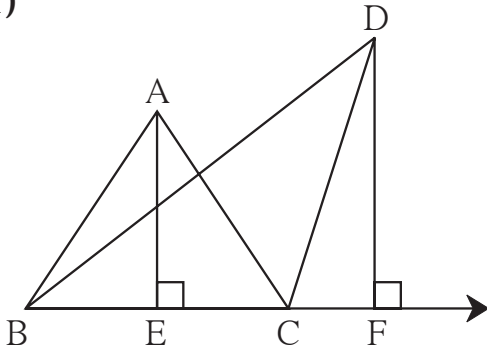
कारण लिखिए ।



आकृति 1.8

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1)



आकृति 1.9

संलग्न आकृति में,

रेखा $AE \perp$ रेखा BC, रेखा $DF \perp$ रेखा BC

$AE = 4$, $DF = 6$ तो $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

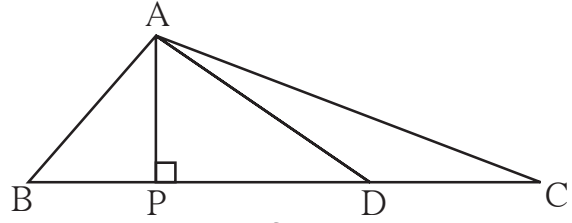
$$\begin{aligned} \text{हल} \quad : \quad \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)} &= \frac{AE}{DF} \dots\dots\dots \text{समान आधारवाले त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत} \\ &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ऊँचाई के अनुपात के बराबर होता है ।

उदा. (2) ΔABC में भुजा BC पर बिंदु D इस प्रकार है कि $DC = 6$, $BC = 15$

$A(\Delta ABD) : A(\Delta ABC)$ और $A(\Delta ABD) : A(\Delta ADC)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : बिंदु A यह $\triangle ABD$, $\triangle ADC$ तथा $\triangle ABC$ का सामान्य शीर्षबिंदु है। इन तीनों त्रिभुजों का आधार एक ही रेखा पर है अर्थात् तीनों त्रिभुजों की ऊँचाई समान है।



आकृति 1.10

$$BC = 15, DC = 6 \quad \therefore BD = BC - DC = 15 - 6 = 9$$

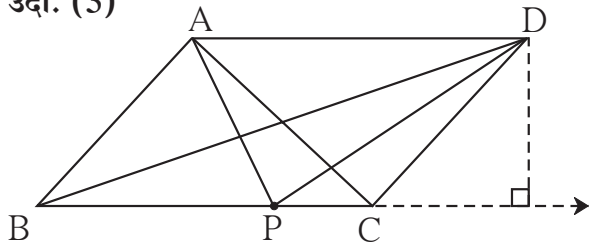
$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{BD}{BC} \dots\dots\dots \text{ऊँचाई समान है इसलिए क्षेत्रफल आधार के अनुपात में}$$

$$= \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)} = \frac{BD}{DC} \dots\dots\dots \text{ऊँचाई समान है इसलिए क्षेत्रफल आधार के अनुपात में}$$

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

उदा. (3)



आकृति 1.11

□ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। भुजा BC पर कोई बिंदु P स्थित है, तो समान क्षेत्रफलवाले त्रिभुजों की दो जोड़ियाँ बनाइए।

हल : $\square$ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

$$\therefore AD \parallel BC \text{ तथा } AB \parallel DC$$

ΔABC तथा ΔBDC पर विचार कीजिए।

यह त्रिभुज दो समांतर रेखाओं के मध्य खींचे गए हैं। इसलिए समांतर रेखाओं के बीच की दूरी ही इन दोनों त्रिभुजों की ऊँचाई होगी।

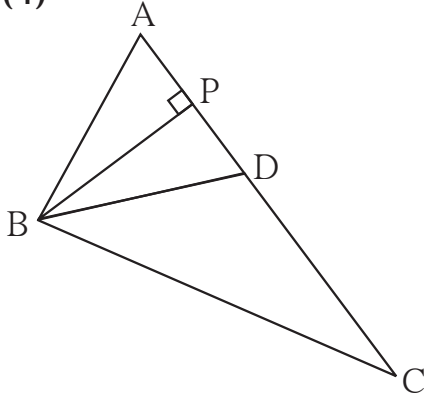
ΔABC तथा ΔBDC में आधार BC समान है तथा ऊँचाई भी समान है।

$$\therefore A(\Delta ABC) = A(\Delta BDC)$$

ΔABC तथा ΔABD में आधार AB समान है तथा ऊँचाई भी समान है ।

$$\therefore A(\Delta ABC) = A(\Delta ABD)$$

उदा. (4)



आकृति 1.12

संलग्न आकृति में $\triangle ABC$ की भुजा AC पर बिंदु D

इस प्रकार है कि $AC = 16$, $DC = 9$,

$BP \perp AC$, तो निम्नलिखित अनुपात ज्ञात कीजिए ।

(i) $\frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle ABC)}$ (ii) $\frac{A(\triangle BDC)}{A(\triangle ABC)}$

(iii) $\frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle BDC)}$

हल : $\triangle ABC$ में भुजा AC पर बिंदु P तथा बिंदु D हैं। इसलिए $\triangle ABD$, $\triangle BDC$, $\triangle ABC$, $\triangle APB$ का सामान्य शीर्षबिंदु B पर विचार करें तो उनकी AD, DC, AC, AP आदि भुजाएँ एक ही रेखा पर स्थित हैं। इन सभी त्रिभुजों की ऊँचाई समान है। इसलिए इन त्रिभुजों का क्षेत्रफल उनके आधारों के अनुपात में है।

$$AC = 16, DC = 9,$$

$$\therefore AD = 16 - 9 = 7$$

$$\therefore \frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle ABC)} = \frac{AD}{AC} = \frac{7}{16} \dots\dots\dots (\text{समान ऊँचाईवाले त्रिभुज})$$

$$\frac{A(\triangle BDC)}{A(\triangle ABC)} = \frac{DC}{AC} = \frac{9}{16} \dots\dots\dots (\text{समान ऊँचाईवाले त्रिभुज})$$

$$\frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle BDC)} = \frac{AD}{DC} = \frac{7}{9} \dots\dots\dots (\text{समान ऊँचाईवाले त्रिभुज})$$



इसे ध्यान में रखें

- दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उन त्रिभुजों के संगत आधार तथा संगत ऊँचाइयों के गुणनफल के अनुपात के बराबर होता है।
- समान ऊँचाई वाले त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके संगत आधारों के अनुपात के बराबर होता है।
- समान आधारवाले त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत ऊँचाइयों के अनुपात के बराबर होता है।



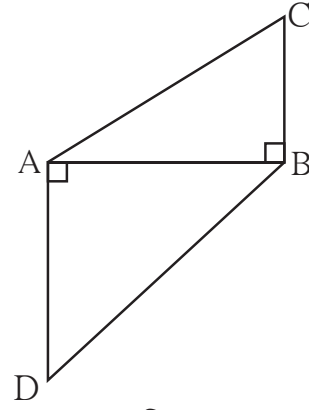
प्रश्नसंग्रह 1.1



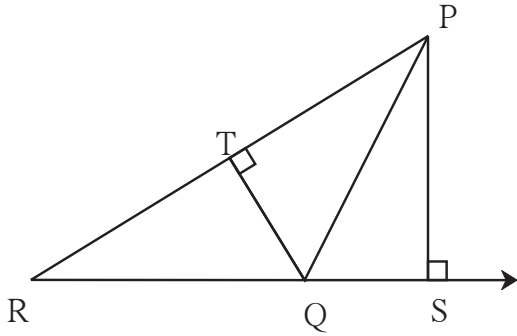
1. यदि किसी त्रिभुज का आधार 9 और ऊँचाई 5 है। दूसरे त्रिभुज का आधार 10 और ऊँचाई 6 हो तो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।



2. संलग्न आकृति 1.13 में $BC \perp AB$,
 $AD \perp AB$, $BC = 4$, $AD = 8$ तो
 $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADB)}$ का मान ज्ञात कीजिए ।



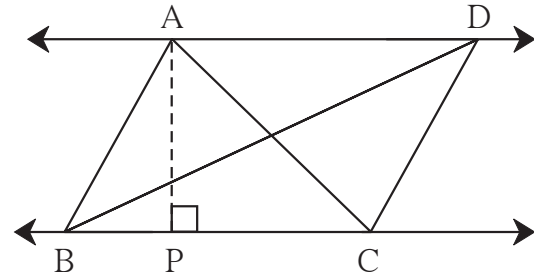
आकृति 1.13



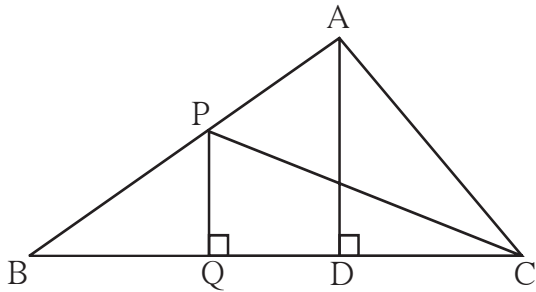
आकृति 1.14

3. संलग्न आकृति 1.14 में रेख $PS \perp$ रेख RQ
रेख $QT \perp$ रेख PR । यदि $RQ = 6$, $PS = 6$,
 $PR = 12$, तो QT का मान ज्ञात कीजिए ।

4. संलग्न आकृति 1.15 में $AP \perp BC$,
 $AD \parallel BC$, तो $A(\Delta ABC) : A(\Delta BCD)$
का मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 1.15



आकृति 1.16

5. संलग्न आकृति 1.16 में, $PQ \perp BC$,
 $AD \perp BC$ तो निम्नलिखित अनुपात ज्ञात कीजिए ।

- (i) $\frac{A(\Delta PQB)}{A(\Delta PBC)}$ (ii) $\frac{A(\Delta PBC)}{A(\Delta ABC)}$
(iii) $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADC)}$ (iv) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta PQC)}$



आओ जानें

समानुपात का मूलभूत प्रमेय (Basic Proportionality Theorem)

प्रमेय : यदि किसी त्रिभुज की किसी एक भुजा के समांतर खींची गई रेखा उसकी अन्य दो भुजाओं को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करे तो वह रेखा अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।

दत्त : ΔABC में रेखा $l \parallel$ भुजा BC
और रेखा l यह भुजा AB को बिंदु P पर
तथा भुजा AC को बिंदु Q पर
प्रतिच्छेदित करती है।

साध्य : $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

रचना : रेख PC तथा रेख BQ खींचिए।

उपपत्ति : ΔAPQ तथा ΔPQB समान ऊँचाई वाले त्रिभुज हैं।

$$\therefore \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \frac{AP}{PB} \quad \dots\dots\dots \text{(आधार के अनुपात में क्षेत्रफल)} \dots\dots (I)$$

$$\text{इसी प्रकार } \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)} = \frac{AQ}{QC} \quad \dots\dots\dots \text{(आधार के अनुपात में क्षेत्रफल)} \dots\dots (II)$$

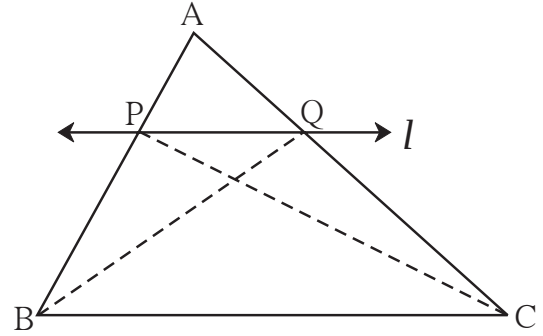
ΔPQB तथा ΔPQC में रेख PQ सामान्य आधार है। रेख $PQ \parallel$ रेख BC

इसलिए ΔPQB तथा ΔPQC की ऊँचाई समान है।

$$A(\Delta PQB) = A(\Delta PQC) \quad \dots\dots\dots (III)$$

$$\frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)} \quad \dots\dots\dots [(I), (II) \text{ तथा } (III)] \text{ से}$$

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \quad \dots\dots\dots [(I) \text{ तथा } (II)] \text{ से}$$



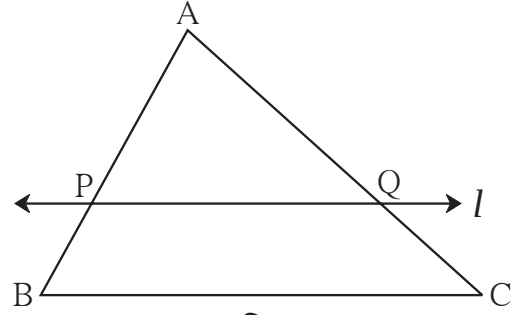
आकृति 1.17

समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम (converse of B.P.T.)

प्रमेय : यदि कोई रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है, तो वह रेखा उस त्रिभुज की तीसरी भुजा के समांतर होती है।

आकृति 1.18 में रेखा l यह ΔABC की भुजा AB और भुजा AC को क्रमशः बिंदु P और Q पर प्रतिच्छेदित करती है। और $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ तो रेखा $l \parallel$ रेख BC

इस प्रमेय की उपपत्ति अप्रत्यक्ष पद्धति से दे सकते हैं।



आकृति 1.18

कृति :

- किसी एक $\triangle ABC$ की रचना कीजिए।
- त्रिभुज के $\angle B$ को समद्विभाजित कीजिए। वह AC को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है उसे D नाम दीजिए।

- भुजा नापकर लिखिए।

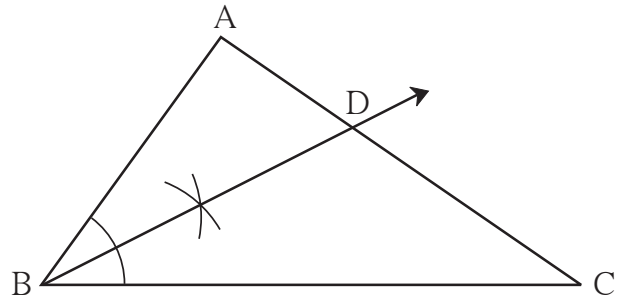
AB = सेमी BC = सेमी

AD = सेमी DC = सेमी

- $\frac{AB}{BC}$ तथा $\frac{AD}{DC}$ का अनुपात ज्ञात कीजिए।

- दोनों अनुपात लगभग समान होते हैं, यह समझ में आता है।

- त्रिभुज के अन्य कोणों को समद्विभाजित कीजिए तथा उपर्युक्त विधि से अनुपात ज्ञात कीजिए। यह अनुपात भी समान आते हैं इसे समझिए।



आकृति 1.19



आओ जानें

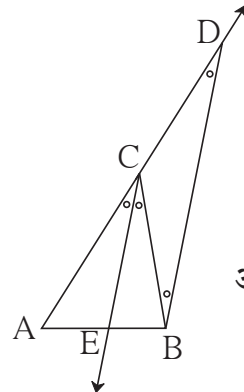
त्रिभुज के कोण समद्विभाजक का प्रमेय (Theorem of angle bisector of a triangle)

प्रमेय : किसी त्रिभुज में कोण का समद्विभाजक, कोण की सम्मुख भुजा को अन्य भुजाओं की लंबाइयों के अनुपात में विभाजित करता है।

दत्त : $\triangle ABC$ में $\angle C$ का समद्विभाजक रेखा AB को बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करता है।

साध्य : $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$

रचना : बिंदु B से, किरण CE के समांतर एक रेखा खींचिए जो किरण AC को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करती हो।



आकृति 1.20

उपपत्ति : किरण $CE \parallel$ किरण BD और रेखा AD तिर्यक रेखा है ।

$$\therefore \angle ACE = \angle CDB \quad \dots\dots\dots (\text{संगत कोण}) \quad \dots(I)$$

अब BC को तिर्यक रेखा मानकर

$$\angle ECB = \angle CBD \quad \dots\dots\dots (\text{एकांतर कोण}) \quad \dots(II)$$

$$\text{परंतु } \angle ACE \cong \angle ECB \quad \dots\dots\dots (\text{दत्त}) \quad \dots(III)$$

$$\therefore \angle CBD \cong \angle CDB \quad \dots\dots\dots [\text{कथन (I), (II) तथा (III) से}]$$

$$\Delta CBD \text{ में, भुजा } CB \cong \text{भुजा } CD \quad \dots\dots\dots (\text{सर्वांगसम कोणों की सम्मुख भुजाएँ})$$

$$\therefore CB = CD \quad \dots(IV)$$

$$\text{अब, } \Delta ABD \text{ में रेखा } EC \parallel \text{भुजा } BD \quad \dots\dots\dots (\text{रचना})$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CD} \quad \dots\dots\dots (\text{समानुपात का मूलभूत प्रमेय}) \quad \dots(V)$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB} \quad \dots\dots\dots [\text{कथन (IV) तथा (V) से}]$$

अधिक जानकारी हेतु :

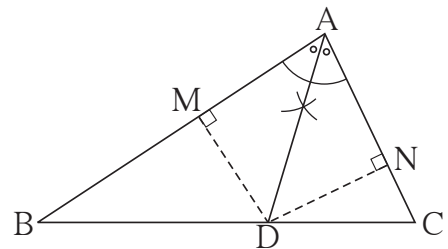
उपर्युक्त प्रमेय की उपपत्ति दूसरे प्रकार से स्वयं लिखिए ।

इसके लिए आकृति 1.21 में दर्शाए अनुसार ΔABC की रचना कीजिए और $DM \perp AB$ तथा $DN \perp AC$ खींचिए ।

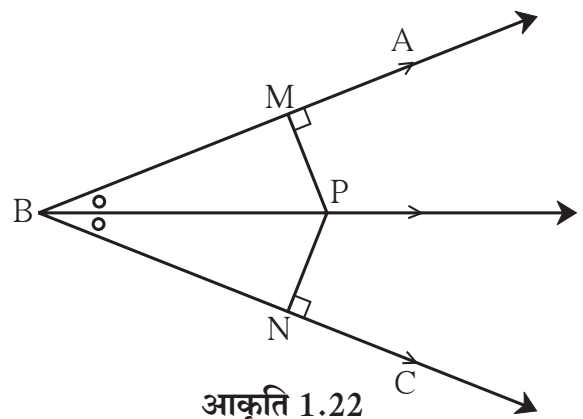
- (1) समान ऊँचाई वाले त्रिभुजों के क्षेत्रफल उनके संगत आधारों के अनुपात के बराबर होते हैं इसका उपयोग कीजिए ।

और

- (2) कोण के समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु कोण के भुजाओं से समदूरस्थ होता है । इस गुणधर्म का उपयोग कीजिए ।



आकृति 1.21



आकृति 1.22



त्रिभुज के कोण समद्विभाजक के प्रमेय का विलोम (Converse of angle bisector of triangle)

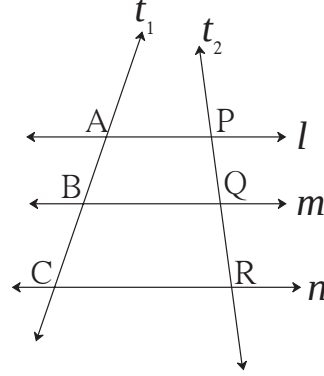
ΔABC में बिंदु D भुजा BC पर इस प्रकार है, कि $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, तो किरण AD यह $\angle BAC$ की समद्विभाजक होती है।

तीन समांतर रेखाएँ तथा उनकी तिर्यक रेखा का गुणधर्म

(Property of three parallel lines and their transversal)

कृति :

- तीन समांतर रेखाएँ खींचीए।
- उन्हें l, m, n नाम दीजिए।
- t_1 तथा t_2 दो तिर्यक रेखाएँ खींचीए।
- तिर्यक रेखा t_1 पर AB तथा BC अंतःखंड हैं।
- तिर्यक रेखा t_2 पर PQ तथा QR अंतःखंड हैं।
- $\frac{AB}{BC}$ तथा $\frac{PQ}{QR}$ के अनुपात ज्ञात कीजिए। यह दोनों अनुपात लगभग समान होते हैं। इसे समझिए।



आकृति 1.23

प्रमेय : किसी तिर्यक रेखा द्वारा किन्हीं तीन समांतर रेखाओं पर निर्मित अंतःखंडों का अनुपात किसी अन्य तिर्यक रेखा द्वारा उन्हीं तीन समांतर रेखाओं पर निर्मित अंतःखंडों के अनुपात के बराबर होता है।

दत्त : रेखा $l \parallel$ रेखा $m \parallel$ रेखा n
 t_1 तथा t_2 उनकी तिर्यक रेखाएँ हैं।
 तिर्यक रेखा t_1 यह इन रेखाओं को क्रमशः बिंदु A, B तथा C पर प्रतिच्छेदित करती है। तिर्यक रेखा t_2 यह इन रेखाओं को क्रमशः बिंदु P, Q, तथा R पर प्रतिच्छेदित करती है।

साध्य : $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

उपपत्ति : रेख PC खींचो। यह रेखाखंड रेखा m को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करती है।

ΔACP में, $BD \parallel AP$

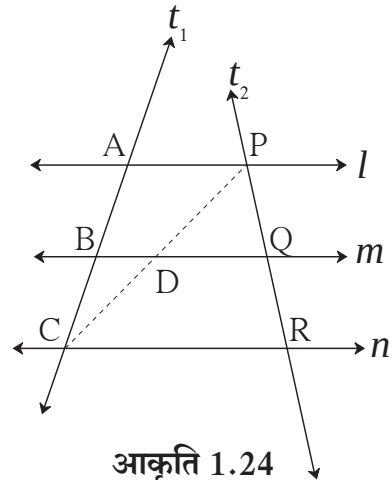
$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC}$ (I) (समानुपात का मूलभूत प्रमेय)

ΔCPR में $DQ \parallel CR$

$\therefore \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$ (II) (समानुपात का मूलभूत प्रमेय)

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$ (I) तथा (II) से

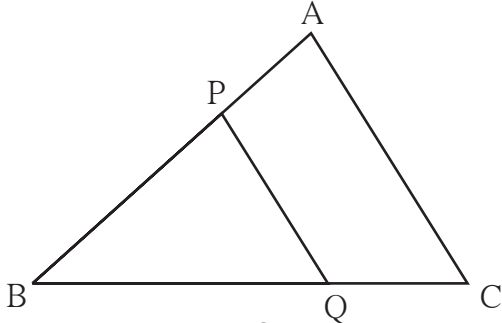
$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$



आकृति 1.24



इसे ध्यान में रखें

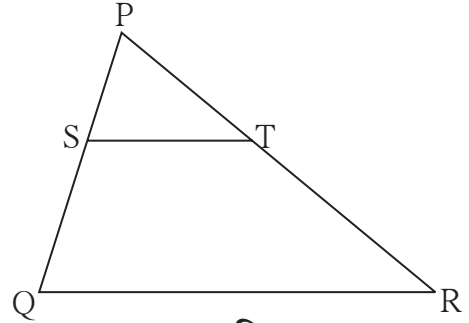


आकृति 1.25

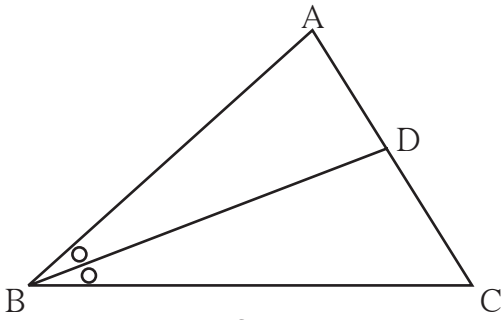
- (1) समानुपात का मूलभूत प्रमेय
 ΔABC में यदि $B-P-A$; $B-Q-C$
 रेखा $PQ \parallel$ रेखा AC हो

$$\text{तो } \frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$$

- (2) समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम
 ΔPQR में यदि $P-S-Q$; $P-T-R$
 तथा $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$
 तो रेखा $ST \parallel$ रेखा QR .



आकृति 1.26

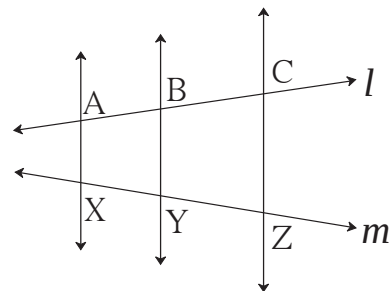


आकृति 1.27

- (3) त्रिभुज के कोण समद्विभाजक का प्रमेय
 यदि ΔABC में रेखा BD यह $\angle ABC$ की
 समद्विभाजक हो और $A-D-C$ हो,
 तो $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

- (4) तीन समांतर रेखाओं तथा उनकी तिर्यक रेखा
 का गुणधर्म
 यदि रेखा $AX \parallel$ रेखा $BY \parallel$ रेखा CZ और
 तिर्यक रेखाएँ l तथा m क्रमशः A, B, C तथा
 X, Y, Z में प्रतिच्छेदित करती हो, तो

$$\frac{AB}{BC} = \frac{XY}{YZ}$$



आकृति 1.28



हल किए गए उदाहरण

उदा (1) ΔABC में $DE \parallel BC$

$DB = 5.4$ सेमी, $AD = 1.8$ सेमी

$EC = 7.2$ सेमी तो AE का मान ज्ञात कीजिए।

हल : ΔABC में $DE \parallel BC$

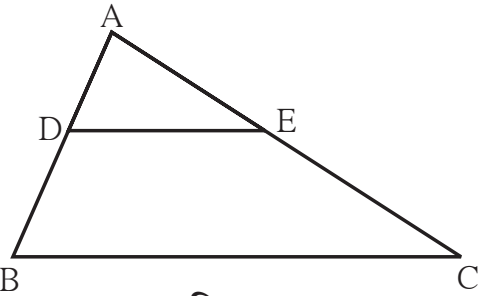
$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \dots\dots (\text{समानुपात का मूलभूत प्रमेय})$$

$$\therefore \frac{1.8}{5.4} = \frac{AE}{7.2}$$

$$AE \times 5.4 = 1.8 \times 7.2$$

$$AE = \frac{1.8 \times 7.2}{5.4} = 2.4$$

$$AE = 2.4 \text{ सेमी}$$



आकृति 1.29

उदा. (2) ΔPQR में रेखा RS यह $\angle R$ की समद्विभाजक है।

$PR = 15$, $RQ = 20$, $PS = 12$

तो SQ का मान ज्ञात कीजिए।

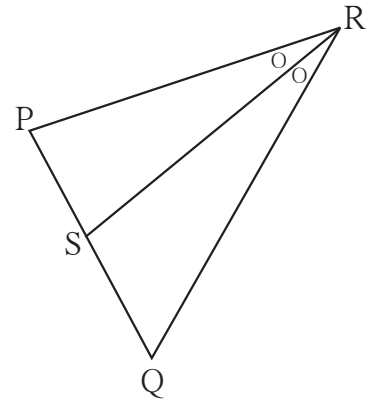
हल : ΔPRQ में रेखा RS यह $\angle R$ की समद्विभाजक है।

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{PS}{SQ} \dots\dots (\text{कोण समद्विभाजक का प्रमेय})$$

$$\frac{15}{20} = \frac{12}{SQ}$$

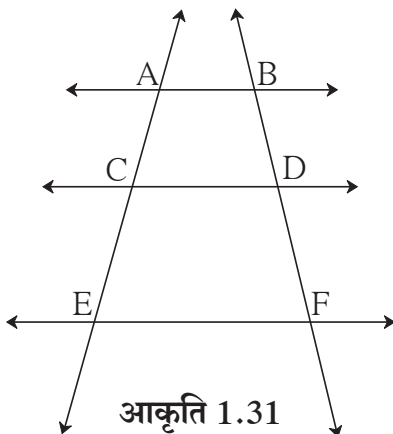
$$SQ = \frac{12 \times 20}{15} = 16$$

$$\therefore SQ = 16$$



आकृति 1.30

कृति :



आकृति 1.31

संलग्न आकृति में $AB \parallel CD \parallel EF$

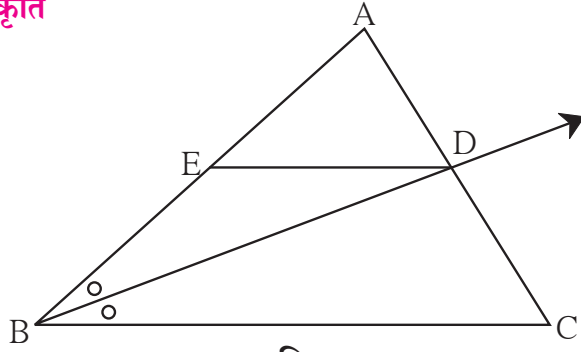
यदि $AC = 5.4$, $CE = 9$, $BD = 7.5$ तो चौखटों को भरकर DF का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $AB \parallel CD \parallel EF$

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF} \dots\dots (\quad)$$

$$\frac{5.4}{9} = \frac{7.5}{DF} \therefore DF = \quad$$

कृति



आकृति 1.32

ΔABC में किरण BD यह $\angle ABC$ की समद्विभाजक है। रेख A-D-C, रेख DE $\parallel$ भुजा BC, A-E-B तो सिद्ध कीजिए कि, $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EB}$

उपपत्ति : ΔABC में किरण BD यह $\angle B$ की समद्विभाजक है।

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \quad \dots\dots\dots (\text{कोण समद्विभाजक प्रमेय}) \quad \dots\dots\dots (I)$$

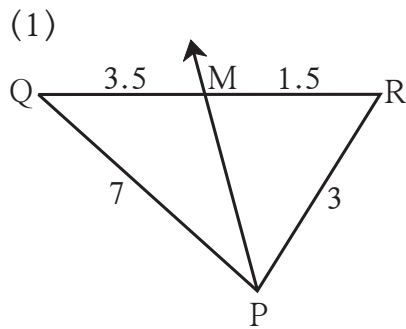
ΔABC में DE $\parallel$ BC

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \quad \dots\dots\dots (\quad) \quad \dots\dots\dots (II)$$

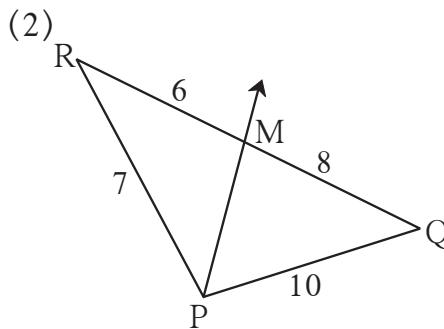
$$\frac{AB}{\quad} = \frac{\quad}{EB} \quad \dots\dots\dots (I) \text{ तथा } (II) \text{ से}$$

प्रश्नसंग्रह 1.2

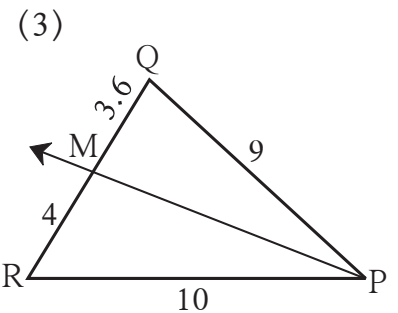
1. नीचे कुछ त्रिभुज और उनके रेखाखंडों की लंबाई दी गई है। इस आधार पर पहचानिए कि किस आकृति में किरण PM यह $\angle QPR$ की समद्विभाजक है।



आकृति 1.33

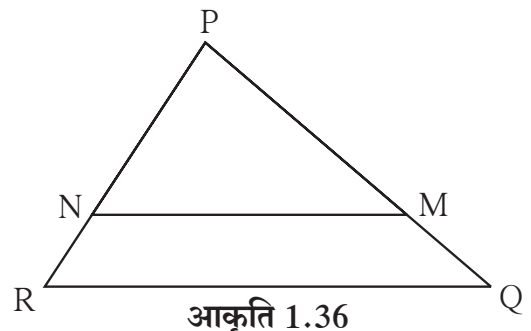


आकृति 1.34



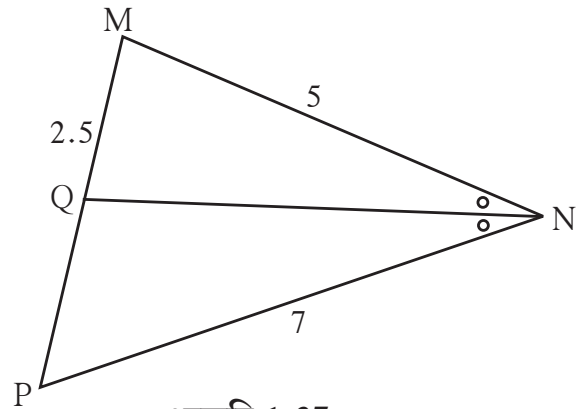
आकृति 1.35

2. ΔPQR में PM = 15, PQ = 25, PR = 20, NR = 8 तो बताइए रेख NM भुजा RQ के समांतर है क्या? कारण लिखिए।

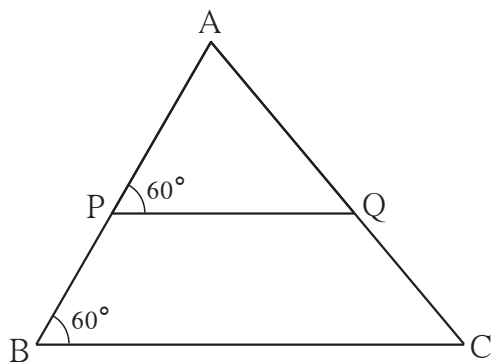


आकृति 1.36

3. ΔMNP में रेख NQ यह $\angle N$ की समद्विभाजक है। यदि $MN = 5$, $PN = 7$, $MQ = 2.5$ तो QP का मान ज्ञात कीजिए।

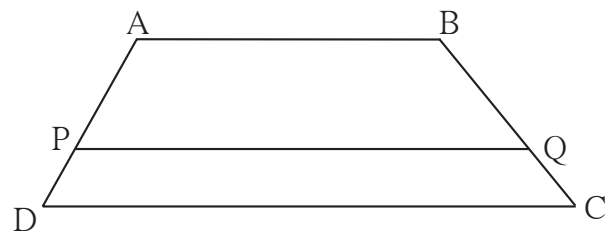


आकृति 1.37

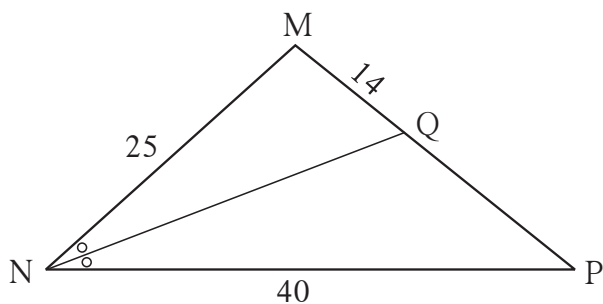


आकृति 1.38

5. समलंब चतुर्भुज ABCD में,
भुजा $AB \parallel$ भुजा $PQ \parallel$ भुजा DC , यदि $AP = 15$, $PD = 12$, $QC = 14$ तो BQ का मान ज्ञात कीजिए।

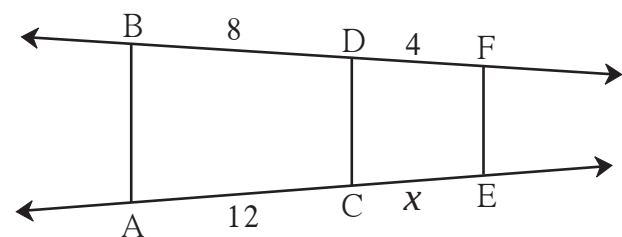


आकृति 1.39

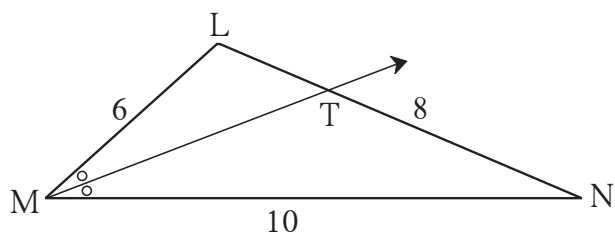


आकृति 1.40

7. संलग्न आकृति 1.41 में $AB \parallel CD \parallel FE$
तो x तथा AE का मान ज्ञात कीजिए।



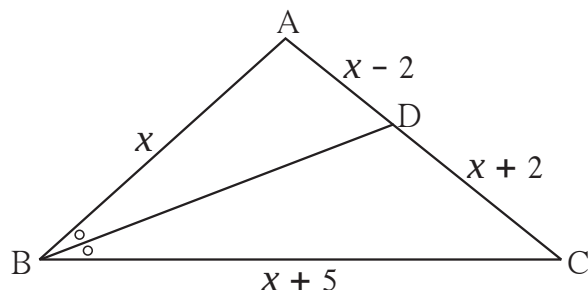
आकृति 1.41



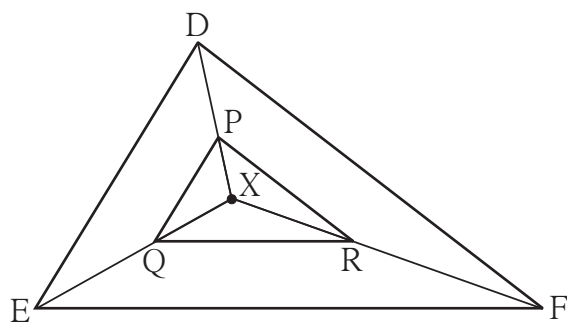
आकृति 1.42

9. ΔABC में रेखा BD यह $\angle ABC$ की समद्विभाजक है, यदि $AB = x$, $BC = x + 5$
 $AD = x - 2$, $DC = x + 2$
तो x का मान ज्ञात कीजिए।

8. ΔLMN में किरण MT यह $\angle LMN$ की समद्विभाजक है।
 $LM = 6$, $MN = 10$, $TN = 8$ तो LT का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 1.43



आकृति 1.44

10. संलग्न आकृति 1.44 में त्रिभुज के अंतःभाग में स्थित एक बिंदु X है। बिंदु X को त्रिभुज के शीर्षबिंदुओं से जोड़ा गया है। इसी प्रकार रेखा $PQ \parallel$ रेखा DE, रेखा $QR \parallel$ रेखा EF, तो रेखा $PR \parallel$ रेखा DF को सिद्ध करने के लिए निम्नलिखित चौखटों को पूरा कीजिए।

उपपत्ति : ΔXDE में $PQ \parallel DE$

.....

$$\therefore \frac{XP}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{QE}$$

..... (I) (समानुपात का मूलभूत प्रमेय)

ΔXEF में $QR \parallel EF$

.....

$$\therefore \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

.....(II)

$$\therefore \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

..... कथन (I) तथा (II) से

$\therefore$ रेखा PR $\parallel$ रेखा DF

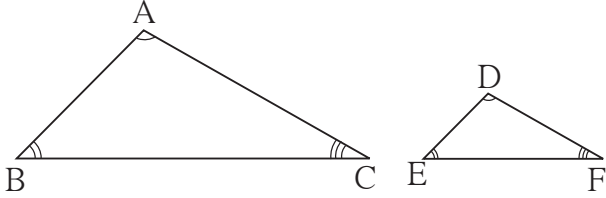
..... (समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम)

- 11*. ΔABC में $AB = AC$, $\angle B$ तथा $\angle C$ के समद्विभाजक भुजा AC तथा भुजा BC को क्रमशः बिंदु D तथा E पर प्रतिच्छेदित करते हैं। तो सिद्ध कीजिए कि रेखा ED $\parallel$ रेखा BC



थोड़ा याद करें

समरूप त्रिभुज (Similar triangles)



आकृति 1.45

ΔABC तथा ΔDEF में यदि $\angle A \cong \angle D$,

$\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

और $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

तो ΔABC तथा ΔDEF यह त्रिभुज समरूप होते हैं।

ΔABC तथा ΔDEF समरूप है इसे $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ के रूप में लिखा जाता है।



आओ जानें

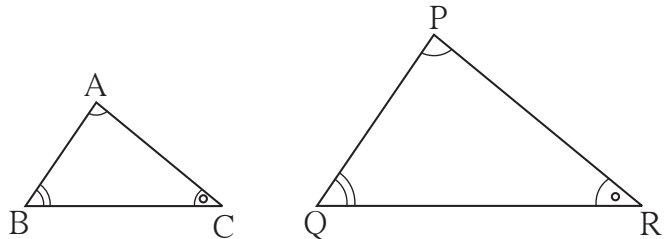
त्रिभुजों की समरूपता की कसौटियाँ (Tests for similarity of triangles)

दो त्रिभुज समरूप हों इसके लिए उनकी तीनों संगत भुजाएँ समानुपात में हों और तीनों संगत कोणों का सर्वांगसम होना अनिवार्य होता है। परंतु इन छह शर्तों में से किसी भी तीन विशिष्ट शर्तों की पूर्ति हो जाने पर शेष सभी शर्तें अपने आप पूरी हो जाती हैं। अर्थात् दो त्रिभुजों के समरूप होने लिए कोई भी तीन विशिष्ट शर्तें ही पर्याप्त होती हैं। इन तीनों शर्तों को जाँच कर यह निश्चित किया जा सकता है कि दिए गए दोनों त्रिभुज समरूप हैं। इन पर्याप्त शर्तों को 'समरूपता की कसौटी' कहते हैं। अर्थात् वे दो त्रिभुज समरूप हैं यह निश्चित करने के लिए उन विशिष्ट शर्तों को खोजना पर्याप्त होता है।

समरूपता की कोकोको कसौटी (AAA test for similarity of triangles)

दो त्रिभुजों के शीर्षबिंदुओं की दी गई एकैकी संगति के अनुसार बनने वाले तीनों संगत कोण यदि सर्वांगसम हों तो वे दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

ΔABC तथा ΔPQR में $ABC \leftrightarrow PQR$
इस संगति में यदि $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$,
 $\angle C \cong \angle R$ तो $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

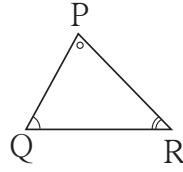
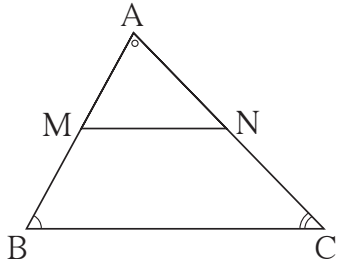


आकृति 1.46



अधिक जानकारी हेतु :

कोकोको कसौटी की उपपत्ति



दत्त : ΔABC तथा ΔPQR में,
 $\angle A \cong \angle P, \angle B \cong \angle Q,$
 $\angle C \cong \angle R.$

साध्य : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

आकृति 1.47

उपपत्ति : माना ΔABC यह ΔPQR से बड़ा है। अब AB पर बिंदु M, AC पर बिंदु N इसप्रकार लीजिए कि, $AM = PQ$ और $AN = PR$ । इस आधारपर दिखाइए कि,

$\Delta AMN \cong \Delta PQR$ । इस आधारपर $MN \parallel BC$ दिखा सकते हैं।

अब समानुपात के मूलभूत प्रमेय का उपयोग कर $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

अर्थात्, $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$ (विपर्यस्थानुपात की क्रिया से)

$\frac{MB + AM}{AM} = \frac{NC + AN}{AN}$ (योगानुपात की क्रिया से)

$$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ इसी प्रकार $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ यह दिखा सकते हैं।

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ मिलता है। $\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$

समरूप त्रिभुजों की कोको कसौटी (A A test for similarity of triangles)

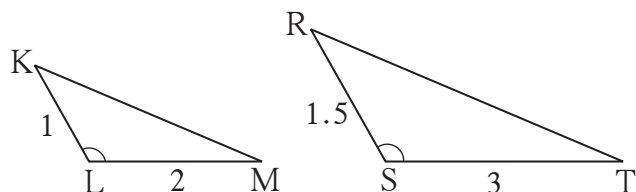
दो त्रिभुजों के शीर्ष बिंदुओं की दी गई किसी एकैकी संगति के अनुसार एक त्रिभुज के दो कोण यदि दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों के सर्वांगसम हों तो पहले त्रिभुज का तीसरा कोण दूसरे त्रिभुज के तीसरे कोण के सर्वांगसम होता है, यह हमें ज्ञात है।

इसलिए किसी एक त्रिभुज के दोनों कोण दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों के सर्वांगसम हों तो यह शर्त दो त्रिभुजों के समरूप होने के लिए पर्याप्त होती है। इस शर्त को समरूपता की कोको कसौटी कहते हैं।



समरूपता की भु को भु कसौटी (SAS test for similarity of triangles)

दो त्रिभुजों के शीर्षबिंदुओं की दी गई किसी एकैकी संगति के अनुसार यदि उनकी संगत भुजाओं की दो जोड़ियाँ समानुपात में हों और उन भुजाओं में समाविष्ट कोण सर्वांगसम हों तो वे दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। समरूपता की इस कसौटी को भुकोभु कसौटी कहते हैं।



आकृति 1.48

उदाहरणार्थ, ΔKLM तथा ΔRST में

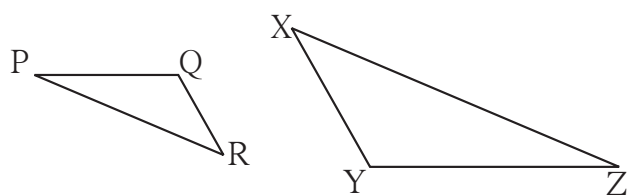
यदि $\angle KLM \cong \angle RST$

$$\frac{KL}{RS} = \frac{LM}{ST}$$

तो $\Delta KLM \sim \Delta RST$

समरूपता की भु भु भु कसौटी (SSS test for similarity of triangles)

दो त्रिभुजों के शीर्षबिंदुओं की दी गई किसी एकैकी संगति के अनुसार जब एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के समानुपात में हो तो वे त्रिभुज समरूप होते हैं। समरूपता की इस कसौटी को भु भु भु कसौटी कहते हैं।



आकृति 1.49

उदाहरणार्थ, ΔPQR तथा ΔXYZ में यदि

$$\frac{PQ}{YZ} = \frac{QR}{XY} = \frac{PR}{XZ}$$

तो $\Delta PQR \sim \Delta ZYX$

समरूप त्रिभुजों के गुणधर्म :

- (1) $\Delta ABC \sim \Delta ABC$ - परावर्तकता (Reflexivity)
- (2) यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तो $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ - सममिति (Symmetry)
- (3) यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तथा $\Delta DEF \sim \Delta GHI$ तो $\Delta ABC \sim \Delta GHI$ - संक्रामकता (Transitivity)

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) ΔXYZ में $\angle Y = 100^\circ$,

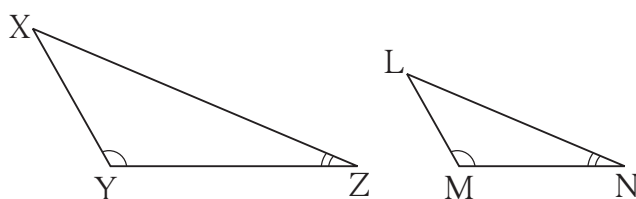
$$\angle Z = 30^\circ,$$

$$\Delta LMN \text{ में } \angle M = 100^\circ,$$

$$\angle N = 30^\circ, \text{ तो क्या } \Delta XYZ \text{ तथा}$$

$$\Delta LMN \text{ समरूप है? यदि हों तो किस}$$

$$\text{कसौटी के अनुसार?}$$



आकृति 1.50

उदा. (2) आकृति में दी गई जानकारी के आधारपर क्या यह त्रिभुज समरूप हैं? यदि है तो किस कसौटी के अनुसार?

$$\frac{PM}{UV} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}, \frac{MN}{VW} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$$

और $\angle M \cong \angle V$ (दत्त)

आकृति 1.51

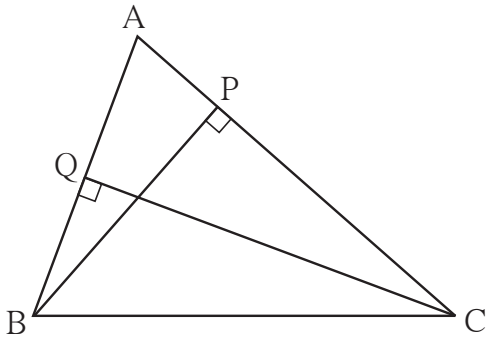
$$\frac{XY}{MN} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{YZ}{NP} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

आकृति 1.52

$\therefore \triangle XYZ$ तथा $\triangle MNP$ समरूप हैं ऐसा नहीं कह सकते ।

उदा. (4)



आकृति 1.53

संलग्न आकृति में $BP \perp AC$, $CQ \perp AB$, $A-P-C$, $A-Q-B$, तो सिद्ध कीजिए कि $\triangle APB$ तथा $\triangle AQC$ समरूप हैं।

हल : $\triangle APB$ तथा $\triangle AQC$ में

$$\angle APB = \boxed{}^\circ \quad (I)$$

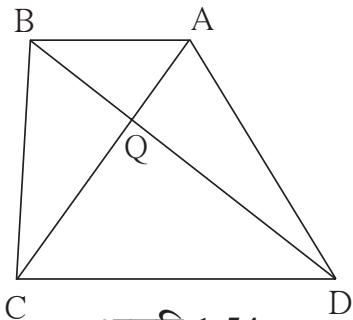
$$\angle AQC = \boxed{}^\circ \quad (II)$$

$$\therefore \angle APB \cong \angle AQC \dots (I) \text{ और } (II) \text{ से}$$

$$\angle PAB \cong \angle QAC \dots (\boxed{})$$

$$\therefore \triangle APB \sim \triangle AQC \dots \text{को को कसौटी}$$

उदा. (5) यदि चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु Q पर प्रतिच्छेदित करते हों और $2QA = QC$ तथा $2QB = QD$. तो सिद्ध कीजिए कि, $DC = 2AB$ ।



आकृति 1.54

दत्त : $2QA = QC$

$$2QB = QD$$

साध्य : $CD = 2AB$

उपपत्ति : $2QA = QC \therefore \frac{QA}{QC} = \frac{1}{2}$

$$\dots\dots\dots (I)$$

$$2QB = QD \therefore \frac{QB}{QD} = \frac{1}{2}$$

$$\dots\dots\dots (II)$$

$$\therefore \frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$$

$$\dots\dots\dots (I) \text{ तथा } (II) \text{ से}$$

$\triangle AQB$ तथा $\triangle CQD$ में

$$\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$$

$$\dots\dots\dots (\text{सिद्ध किया है।})$$

$$\angle AQB \cong \angle DQC$$

$$\dots\dots\dots (\text{शीर्षाभिमुख कोण})$$

$$\therefore \triangle AQB \sim \triangle CQD$$

$$\dots\dots\dots (\text{समरूपता की भु को भु कसौटी})$$

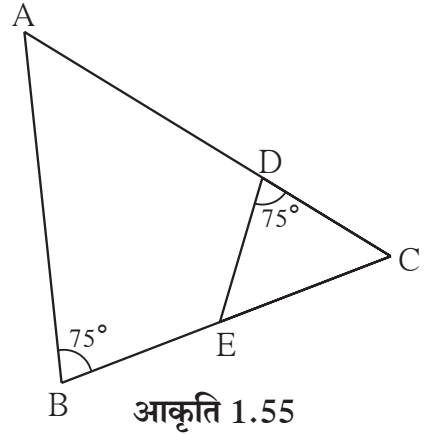
$$\text{परंतु } \frac{AQ}{CQ} = \frac{QB}{QD} = \frac{AB}{CD}$$

$$\dots\dots\dots (\text{संगत भुजाएँ समानुपात में})$$

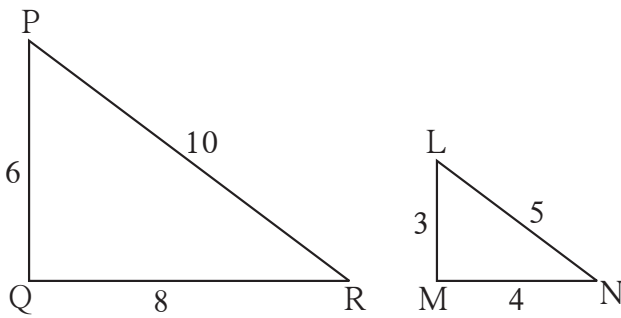
$$\therefore \frac{AQ}{CQ} = \frac{1}{2} \therefore \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 2AB = CD$$

1. आकृति 1.55 में $\angle ABC = 75^\circ$,
 $\angle EDC = 75^\circ$ तो इनमें दो त्रिभुज किस कसौटी
 के अनुसार समरूप हैं ?
 उनकी समरूपता की एकैकी संगति लिखिए ।



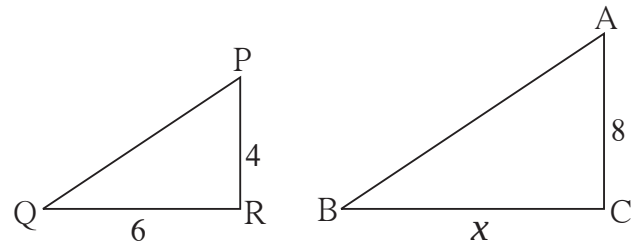
आकृति 1.55



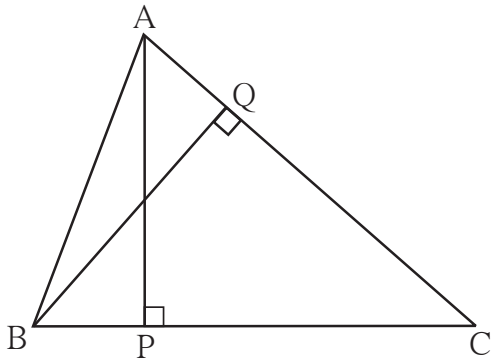
आकृति 1.56

2. संलग्न आकृति 1.56 में, दिए गए त्रिभुज क्या
 समरूप हैं ? यदि हाँ तो किस कसौटी के अनुसार ?

3. आकृति 1.57 में दर्शाए अनुसार 8 मीटर तथा 4
 मीटर ऊँचाईवाले दो खंभे समतल जमीन पर खड़े हैं ।
 सूर्य के प्रकाश से छोटे खंभे की परछाई 6 मीटर
 होती हो तो उसी समय बड़े खंभे की परछाई की
 लंबाई कितनी होगी ?



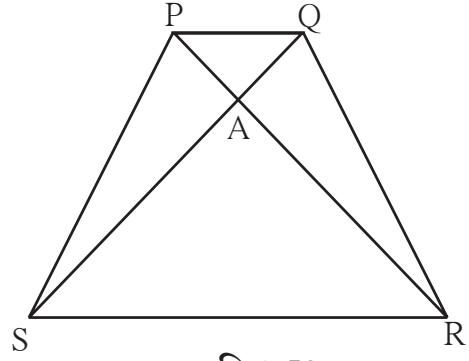
आकृति 1.57



आकृति 1.58

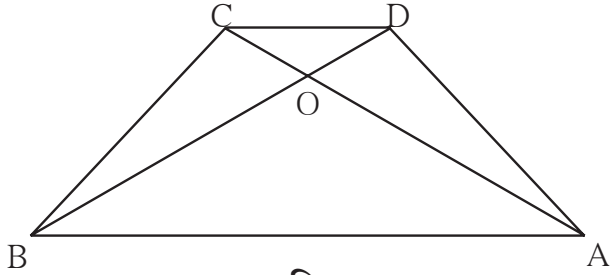
4. ΔABC में $AP \perp BC$, $BQ \perp AC$
 $B-P-C$, $A-Q-C$ तो सिद्ध कीजिए कि
 $\Delta CPA \sim \Delta CQB$ ।
 यदि $AP = 7$, $BQ = 8$, $BC = 12$
 तो AC का मान ज्ञात कीजिए ।

5. संलग्न आकृति में $\square PQRS$ एक समलंब चतुर्भुज है। जिसमें भुजा $PQ \parallel$ भुजा SR , $AR = 5AP$, $AS = 5AQ$ तो सिद्ध कीजिए कि,
 $SR = 5PQ$



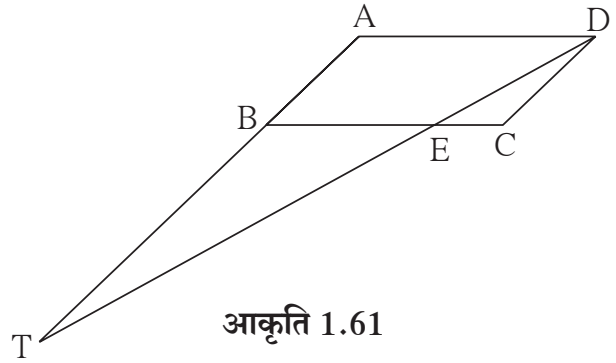
आकृति 1.59

6. समलंब चतुर्भुज ABCD में,
 भुजा $AB \parallel$ भुजा DC विकर्ण AC तथा विकर्ण BD परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं। यदि $AB = 20$, $DC = 6$, $OB = 15$ तो OD का मान ज्ञात कीजिए।



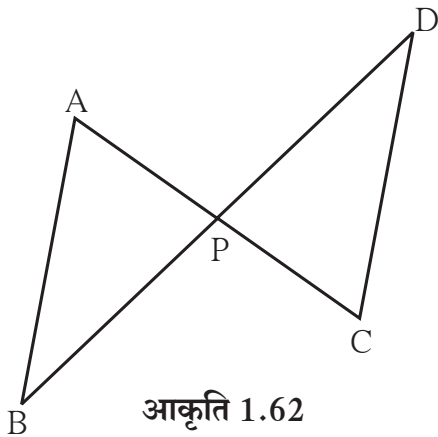
आकृति 1.60

7. $\square ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है। भुजा BC पर E कोई एक बिंदु है; रेखा DE रेखा AB को बिंदु T पर प्रतिच्छेदित करती है। तो सिद्ध कीजिए कि $DE \times BE = CE \times TE$ ।



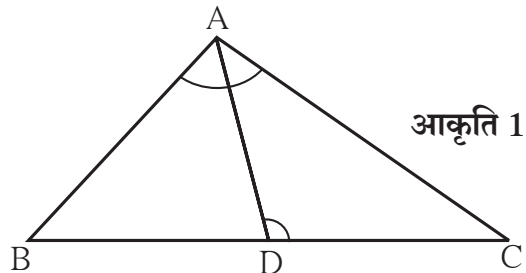
आकृति 1.61

8. संलग्न आकृति में रेखा AC तथा रेखा BD परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं और $\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$ तो सिद्ध कीजिए कि, $\triangle ABP \sim \triangle CDP$



आकृति 1.62

9. संलग्न आकृति में $\triangle ABC$ में बिंदु D यह भुजा BC पर इस प्रकार है, कि $\angle BAC = \angle ADC$ तो सिद्ध कीजिए कि, $CA^2 = CB \times CD$



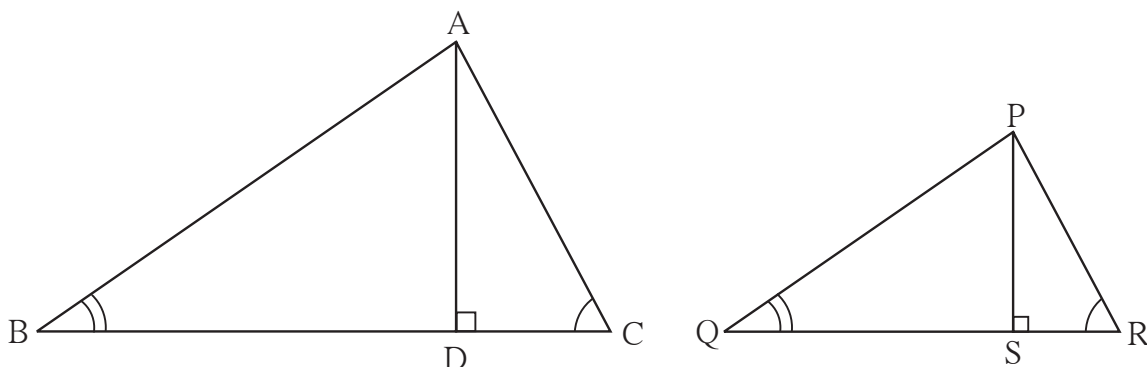
आकृति 1.63



आओ जानें

समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का प्रमेय (Theorem of areas of similar triangles)

प्रमेय : दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।



आकृति 1.64

दत्त : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $AD \perp BC$, $PS \perp QR$

साध्य : $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$

उपपत्ति : $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times AD}{QR \times PS} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AD}{PS}$ (I)

ΔABD तथा ΔPQS में

$\angle B = \angle Q$ (दत्त)

$\angle ADB = \angle PSQ = 90^\circ$

$\therefore$ को को कसौटी के अनुसार $\Delta ABD \sim \Delta PQS$

$\therefore \frac{AD}{PS} = \frac{AB}{PQ}$ (II)

परंतु $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ (III)

(II) तथा (III) से

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AB}{QR} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$



हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $A(\Delta ABC) = 16$, $A(\Delta PQR) = 25$ तो $\frac{AB}{PQ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2} \dots\dots\dots (\text{समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।})$$

$$\therefore \frac{16}{25} = \frac{AB^2}{PQ^2} \quad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{4}{5} \dots\dots\dots (\text{वर्गमूल ज्ञात करनेपर})$$

उदा. (2) दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात 2:5 है, छोटे त्रिभुज का क्षेत्रफल 64 वर्ग सेमी हो तो बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

हल : माना $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ।

माना ΔABC छोटा त्रिभुज तथा ΔPQR बड़ा त्रिभुज है।

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{(2)^2}{(5)^2} = \frac{4}{25} \dots\dots\dots (\text{समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात})$$

$$\therefore \frac{64}{A(\Delta PQR)} = \frac{4}{25}$$

$$4 \times A(\Delta PQR) = 64 \times 25$$

$$A(\Delta PQR) = \frac{64 \times 25}{4} = 400$$

$\therefore$ बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल = 400 वर्ग सेमी

उदा. (3) समलंब चतुर्भुज ABCD में भुजा $AB \parallel$ भुजा CD , विकर्ण AC तथा विकर्ण BD परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं तो सिद्ध कीजिए कि, $\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$

हल : समलंब चतुर्भुज ABCD में भुजा $AB \parallel$ भुजा CD

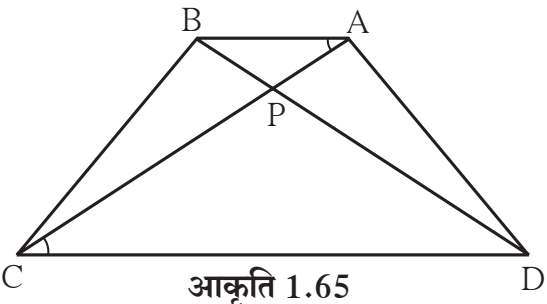
ΔAPB तथा ΔCPD में

$\angle PAB \cong \angle PCD \dots\dots$ (एकांतर कोण)

$\angle APB \cong \angle CPD \dots\dots$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore \Delta APB \sim \Delta CPD \dots\dots$ (को को कसौटी)

$$\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2} \dots\dots\dots (\text{समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का प्रमेय})$$



1. दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात 3:5 हो तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए ।
2. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ और $AB : PQ = 2 : 3$ तो निम्नलिखित रिक्त चौखटों को पूरा कीजिए ।

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{\square} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{\square}{\square}$$
3. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $A(\Delta ABC) = 80$, $A(\Delta PQR) = 125$ तो निम्नलिखित रिक्त चौखटों को पूरा कीजिए ।

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta \square)} = \frac{80}{125} = \frac{\square}{\square} \quad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\square}{\square}$$
4. $\Delta LMN \sim \Delta PQR$, $9 \times A(\Delta PQR) = 16 \times A(\Delta LMN)$, यदि $QR = 20$ तो MN का मान ज्ञात कीजिए ।
5. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल 225 वर्ग सेमी तथा 81 वर्ग सेमी है । यदि छोटे त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई 12 सेमी हो तो बड़े त्रिभुज की संगत भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए ।
6. समबाहु ΔABC तथा ΔDEF में $A(\Delta ABC) : A(\Delta DEF) = 4 : 7$ $AB = 4$ तो DE की लंबाई ज्ञात कीजिए ।
7. आकृति 1.66 में रेख $PQ \parallel$ रेख DE यदि $A(\Delta PQF) = 20$ वर्ग इकाई, $PF = 2 DP$ है, तो $A(\square DPQE)$ ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए ।

$$A(\Delta PQF) = 20 \text{ वर्ग इकाई, } PF = 2 DP, \text{ माना } DP = x \quad \therefore PF = 2x$$

$$DF = DP + \square = \square + \square = 3x$$

ΔFDE तथा ΔFPQ में ।

$$\angle FDE \cong \angle \square \text{ (संगत कोण)}$$

$$\angle FED \cong \angle \square \text{ (संगत कोण)}$$

$$\therefore \Delta FDE \sim \Delta FPQ \dots\dots\dots \text{ (को को कसौटी)}$$

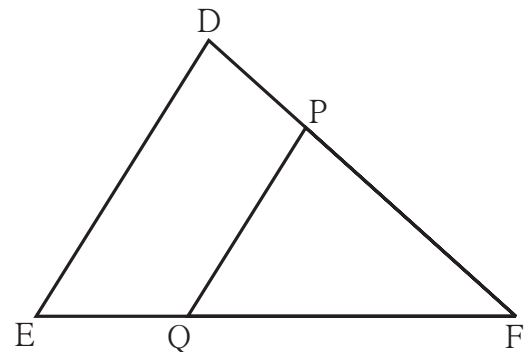
$$\therefore \frac{A(\Delta FDE)}{A(\Delta FPQ)} = \frac{\square}{\square} = \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \frac{9}{4}$$

$$A(\Delta FDE) = \frac{9}{4} A(\Delta FPQ) = \frac{9}{4} \times \square = \square$$

$$A(\square DPQE) = A(\Delta FDE) - A(\Delta FPQ)$$

$$= \square - \square$$

$$= \square$$



आकृति 1.66

1. निम्नलिखित उपप्रश्नों के पर्यायी उत्तर दिए गए हैं। इनमें से सही पर्याय चुनिए।

(1) यदि ΔABC तथा ΔPQR में किसी

एकैकी संगति से यदि $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$

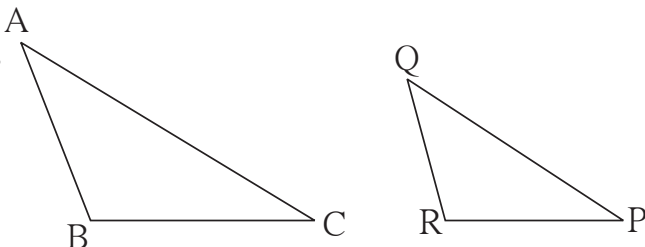
तो निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं?

(A) $\Delta PQR \sim \Delta ABC$

(B) $\Delta PQR \sim \Delta CAB$

(C) $\Delta CBA \sim \Delta PQR$

(D) $\Delta BCA \sim \Delta PQR$



आकृति 1.67

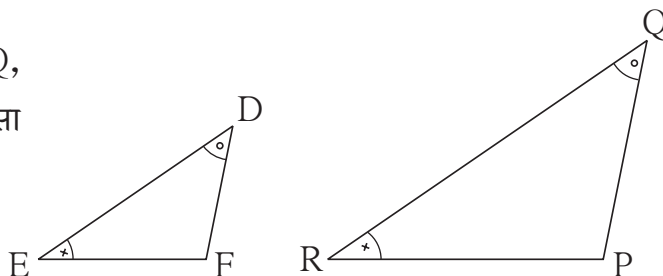
(2) यदि ΔDEF तथा ΔPQR में $\angle D \cong \angle Q$,

$\angle R \cong \angle E$ तो निम्नलिखित में से कौन-सा

कथन सत्य है ?

(A) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (B) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$

(C) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (D) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$



आकृति 1.68

(3) ΔABC तथा ΔDEF में $\angle B = \angle E$,

$\angle F = \angle C$ और $AB = 3 DE$, तो इन

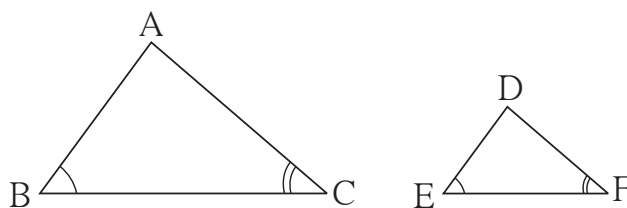
दोनों त्रिभुजों के लिए कौन-सा कथन सत्य है?

(A) दोनों त्रिभुज सर्वांगसम और समरूप नहीं हैं।

(B) दोनों त्रिभुज समरूप हैं परंतु सर्वांगसम नहीं हैं।

(C) दोनों त्रिभुज सर्वांगसम और समरूप दोनों हैं।

(D) उपर्युक्त में से कोई भी कथन सत्य नहीं है।



आकृति 1.69

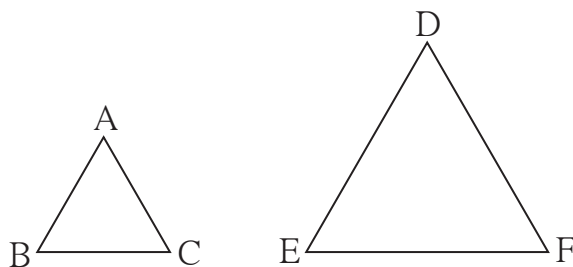
(4) समबाहु ΔABC तथा ΔDEF में,

$A(\Delta ABC) : A(\Delta DEF) = 1 : 2$

होनेपर $AB = 4$ हो तो DE की लंबाई

कितनी ?

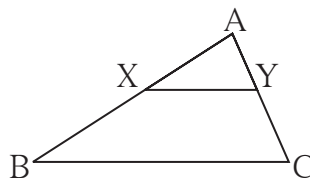
(A) $2\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 8 (D) $4\sqrt{2}$



आकृति 1.70

(5) आकृति 1.71 में रेख $XY \parallel$ रेख BC तो निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ?

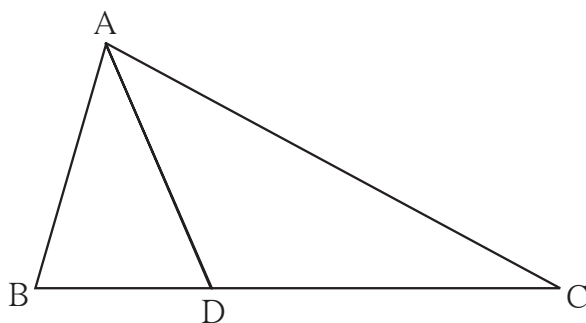
- (A) $\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AY}$ (B) $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$
 (C) $\frac{AX}{YC} = \frac{AY}{XB}$ (D) $\frac{AB}{YC} = \frac{AC}{XB}$



आकृति 1.71

2. ΔABC में $B - D - C$ और $BD = 7$, $BC = 20$ तो निम्नलिखित अनुपात ज्ञात कीजिए।

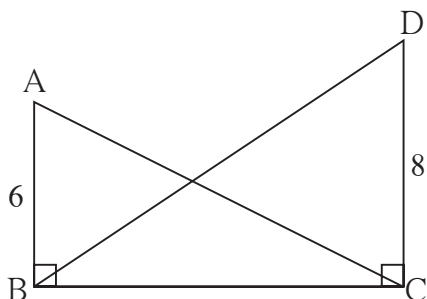
- (1) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)}$
 (2) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$
 (3) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ABC)}$



आकृति 1.72

3. समान ऊँचाईवाले दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 2 : 3 है, छोटे त्रिभुज का आधार 6 सेमी हो तो बड़े त्रिभुज का संगत आधार कितना होगा ?

4.



आकृति 1.73

आकृति 1.73 में $\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$

$AB = 6$, $DC = 8$

तो $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)} =$ कितना ?

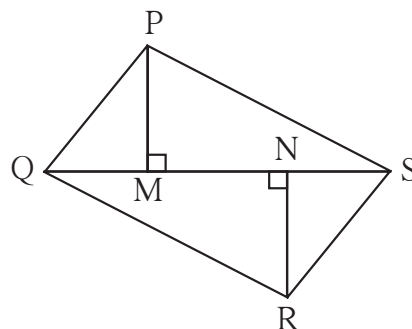
5.

आकृति 1.74 में $PM = 10$ सेमी

$A(\Delta PQS) = 100$ वर्ग सेमी

$A(\Delta QRS) = 110$ वर्ग सेमी

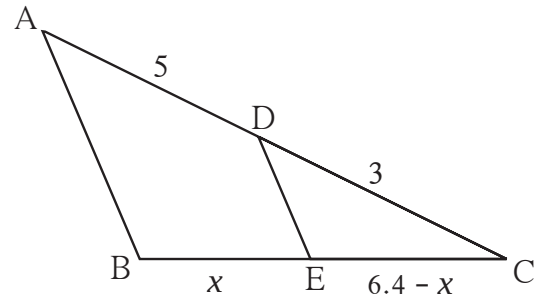
तो NR का मान ज्ञात कीजिए।



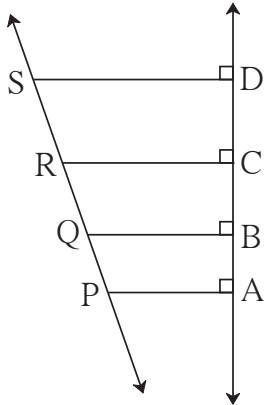
आकृति 1.74

6. $\Delta MNT \sim \Delta QRS$, बिंदु T से खींचे गए शीर्षलंब की लंबाई 5 तथा बिंदु S से खींचे गए शीर्षलंब की लंबाई 9 है, तो $\frac{A(\Delta MNT)}{A(\Delta QRS)}$ यह अनुपात ज्ञात कीजिए।

7. आकृति 1.75 में $A - D - C$ व $B - E - C$ रेख $DE \parallel$ भुजा AB यदि $AD = 5$, $DC = 3$, $BC = 6.4$ तो BE का मान ज्ञात कीजिए ।



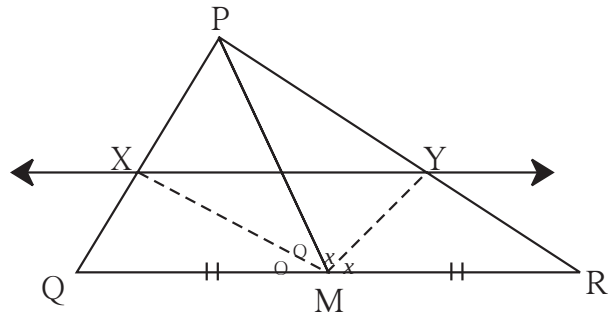
आकृति 1.75



आकृति 1.76

8. आकृति 1.76 में, रेख PA , रेख QB , रेख RC तथा रेख SD ये रेखा AD पर लंब हैं । $AB = 60$, $BC = 70$, $CD = 80$, $PS = 280$ तो PQ , QR , RS का मान ज्ञात कीजिए ।

9. ΔPQR में रेख PM माधिका है । $\angle PMQ$ तथा $\angle PMR$ के समद्विभाजक भुजा PQ तथा भुजा PR को क्रमशः बिंदु X और बिंदु Y पर प्रतिच्छेदित करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि, $XY \parallel QR$.



आकृति 1.77

दिए गए रिक्त स्थानों को भरकर उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।

ΔPMQ में किरण MX यह $\angle PMQ$ की समद्विभाजक है ।

$$\therefore \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \dots\dots\dots \text{(I) (कोण समद्विभाजक प्रमेय)}$$

ΔPMR में किरण MY यह $\angle PMR$ की समद्विभाजक है ।

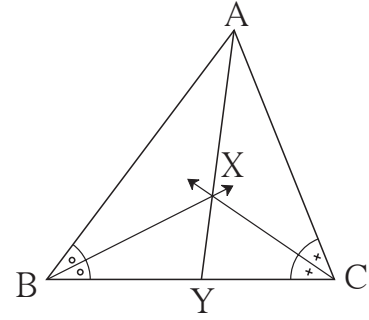
$$\therefore \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \dots\dots\dots \text{(II) (कोण समद्विभाजक प्रमेय)}$$

परंतु $\frac{MP}{MQ} = \frac{MP}{MR} \dots\dots\dots$ (बिंदु M यह QR का मध्य बिंदु है अर्थात $MQ = MR$)

$$\therefore \frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR}$$

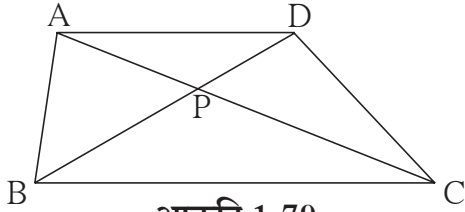
$$\therefore XY \parallel QR \dots\dots\dots \text{(समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम)}$$

10. आकृति 1.78 ΔABC में $\angle B$ तथा $\angle C$ के समद्विभाजक परस्पर एक दूसरे को बिंदु X पर प्रतिच्छेदित करते हैं। रेखा AX यह भुजा BC को बिंदु Y पर प्रतिच्छेदित करती है; यदि $AB = 5$, $AC = 4$, $BC = 6$ तो $\frac{AX}{XY}$ का मान ज्ञात कीजिए।



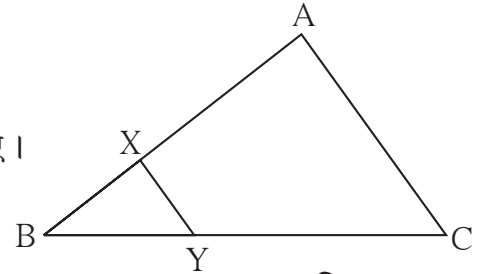
आकृति 1.78

11. $\square ABCD$ में रेखा $AD \parallel$ रेखा BC . विकर्ण AC और विकर्ण BD परस्पर एक दूसरे को बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं। तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{BP}$



आकृति 1.79

12. आकृति 1.80 में रेखा $XY \parallel$ भुजा AC. यदि $2AX = 3BX$ और $XY = 9$ तो AC का मान ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए।



आकृति 1.80

कृति : $2AX = 3BX \therefore \frac{AX}{BX} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

$\frac{AX + BX}{BX} = \frac{\boxed{} + \boxed{}}{\boxed{}} \dots\dots\dots$ (योगानुपात की क्रिया से)

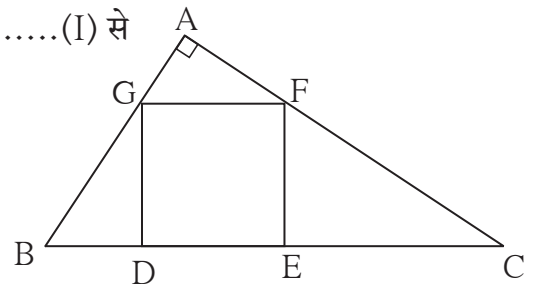
$\frac{AB}{BX} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \dots\dots\dots$ (I)

$\Delta BCA \sim \Delta BYX \dots\dots\dots$ (समरूपता की $\boxed{}$ कसौटी)

$\therefore \frac{BA}{BX} = \frac{AC}{XY} \dots\dots\dots$ (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजा)

$\therefore \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{AC}{9} \therefore AC = \boxed{} \dots\dots\dots$ (I) से

- 13*. आकृति 1.81 में $\square DEFG$ एक वर्ग है। ΔABC में $\angle A = 90^\circ$, बिंदु F भुजा AC पर स्थित है। तो सिद्ध कीजिए कि, $DE^2 = BD \times EC$ (ΔGBD तथा ΔCFE को समरूप दिखाइए और $GD = FE = DE$ का उपयोग कीजिए।)



आकृति 1.81

