1 समरूपता

आओ सीखें

- दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात
- समानुपात का मूलभूत प्रमेय
- समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम
- त्रिभुज के कोण समद्विभाजक का गुणधर्म
- तीन समांतर रेखा तथा तिर्यक रेखा द्वारा बने अंत:खंडों का गुणधर्म
- त्रिभुजों की समरूपता की कसौटी
- समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल का गुणधर्म

थोड़ा याद करें

हमने अनुपात तथा समानुपात का अध्ययन किया है । a और b इन दो संख्याओं का अनुपात $\frac{m}{n}$ है, इस कथन को a और b दोनों संख्याएँ $m{:}n$ के अनुपात में हैं, ऐसा भी लिखा जाता है ।

इस संकल्पना के लिए हम सामान्यत: धनात्मक वास्तविक संख्या का विचार करते हैं । हमें यह ज्ञात है कि रेखाखंडों की लंबाई और किसी आकृति का क्षेत्रफल धनात्मक वास्तविक संख्या होती है ।

हमें त्रिभुजों के क्षेत्रफल के सूत्र की जानकारी है ।

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई

आओ जानें

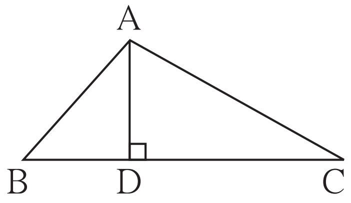
दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात (Ratio of areas of two triangles)

किन्हीं दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करेंगे ।

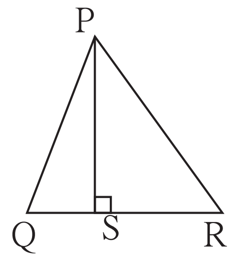
उदाहरण Δ ABC का आधार BC तथा ऊँचाई AD है ।

Δ PQR का आधार QR तथा ऊँचाई PS है ।

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AD}{\frac{1}{2} \times QR \times PS}$$



आकृति 1.1



आकृति 1.2

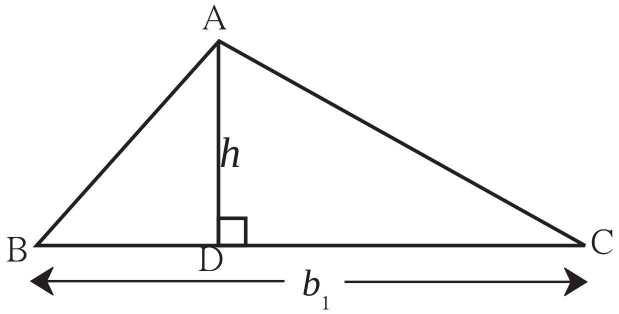
$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times AD}{QR \times PS}$$

इस आधारपर दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके आधारों और संगत ऊँचाइयों के गुणनफलों के अनुपात के बराबर होता है ।

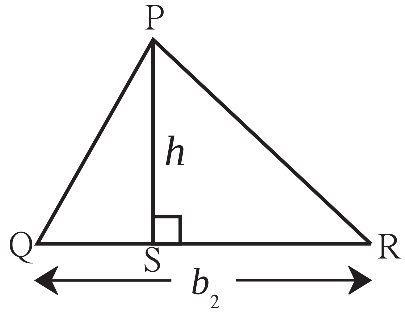
यदि एक त्रिभुज का आधार b_1 तथा ऊँचाई h_1 और दूसरे त्रिभुज का आधार b_2 तथा ऊँचाई h_2 हो तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात = $\frac{b_1 \times h_1}{b_2 \times h_2}$

इन दो त्रिभुजों के संबंध में कुछ शर्ते रखकर देखिये ।

शर्त 1 : दोनों त्रिभुजों की ऊँचाई समान होनेपर



आकृति 1.3



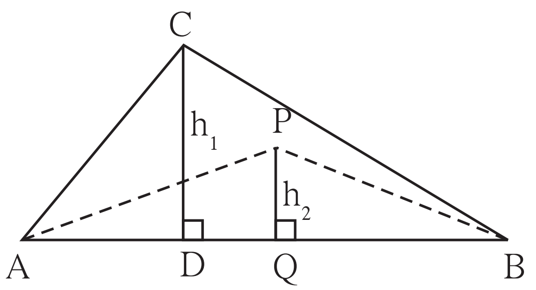
आकृति 1.4

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times h}{QR \times h} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{b_1}{b_2}$$

गुणधर्म : समान ऊँचाई वाले दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके संगत आधारों के अनुपात के बराबर होता है ।

शर्त 2 : दोनों त्रिभुजों के आधार समान होनेपर –



आकृति 1.5

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{AB \times h_1}{AB \times h_2}$$

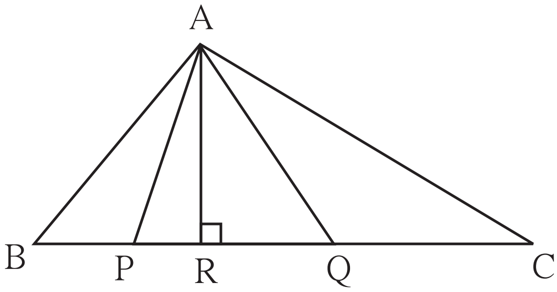
$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{h_1}{h_2}$$

गुणधर्म : समान आधारवाले दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत ऊँचाइयों के अनुपात के बराबर होता है ।

कृति :

नीचे दी गई रिक्त चौखटें भरिए ।

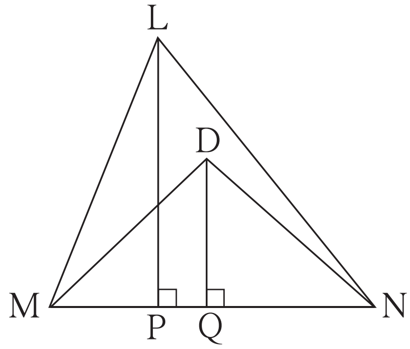
(i)



आकृति 1.6

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APQ)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$

(ii)



आकृति 1.7

$$\frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta DMN)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$

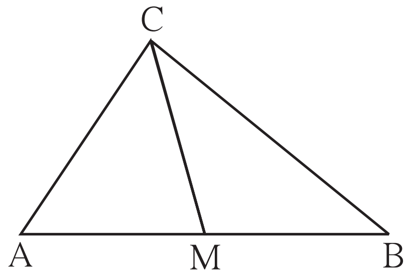
(iii) बिंदु M यह रेख AB का मध्य बिंदु है ।

रेख CM यह Δ ABC की माध्यिका है ।

$$\therefore \frac{A(\Delta AMC)}{A(\Delta BMC)} = \frac{\square}{\square}$$

$$= \frac{\square}{\square} = \square$$

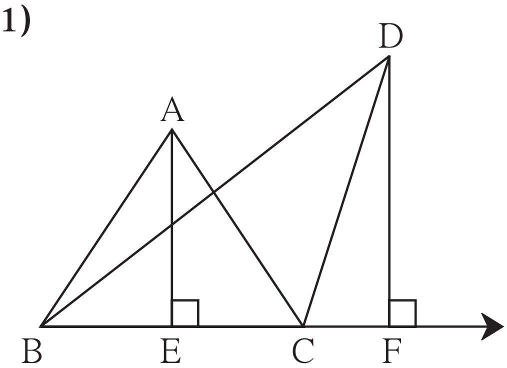
कारण लिखिए ।



आकृति 1.8

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1)



आकृति 1.9

संलग्न आकृति में,

रेख AE $\perp$ रेखा BC, रेख DF $\perp$ रेखा BC

AE = 4, DF = 6 तो $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

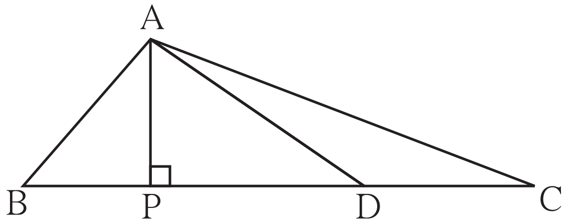
हल : $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)} = \frac{AE}{DF}$ .... समान आधारवाले त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत ऊँचाई के अनुपात के बराबर होता है ।

$= \frac{4}{6} \quad = \frac{2}{3}$

उदा. (2) Δ ABC में भुजा BC पर बिंदु D इस प्रकार है कि DC = 6, BC = 15

A(Δ ABD) : A(Δ ABC) और A(Δ ABD) : A(Δ ADC) का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : बिंदु A यह Δ ABD, Δ ADC तथा Δ ABC का सामान्य शीर्षबिंदु है । इन तीनों त्रिभुजों का आधार एक ही रेखा पर है अर्थात तीनों त्रिभुजों की ऊँचाई समान है ।



आकृति 1.10

BC = 15, DC = 6 $\therefore$ BD = BC − DC = 15 − 6 = 9

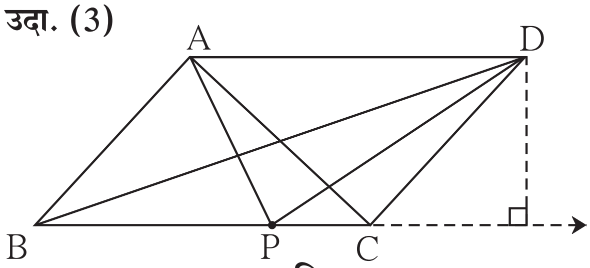
$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{BD}{BC}$$ .... ऊँचाई समान है इसलिए क्षेत्रफल आधार के अनुपात में

$$= \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)} = \frac{BD}{DC}$$ .... ऊँचाई समान है इसलिए क्षेत्रफल आधार के अनुपात में

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

उदा. (3)



आकृति 1.11

□ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है । भुजा BC पर कोई बिंदु P स्थित है, तो समान क्षेत्रफलवाले त्रिभुजों की दो जोड़ियाँ बनाइए ।

हल : □ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है ।

$\therefore$ AD || BC तथा AB || DC

Δ ABC तथा Δ BDC पर विचार कीजिए ।

यह त्रिभुज दो समांतर रेखाओं के मध्य खींचे गए हैं । इसलिए समांतर रेखाओं के बीच की दूरी ही इन दोनों त्रिभुजों की ऊँचाई होगी ।

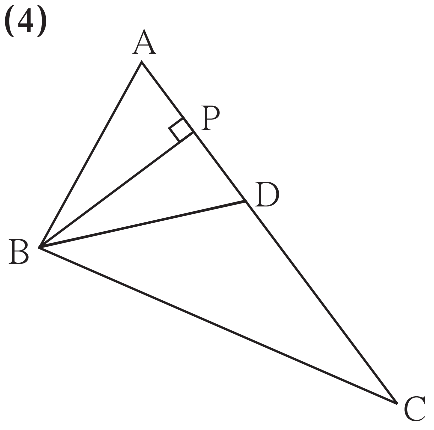
Δ ABC तथा Δ BDC में आधार BC समान है तथा ऊँचाई भी समान है ।

$\therefore$ A(Δ ABC) = A(Δ BDC)

Δ ABC तथा Δ ABD में आधार AB समान है तथा ऊँचाई भी समान है ।

$\therefore$ A(Δ ABC) = A(Δ ABD)

उदा. (4)



आकृति 1.12

संलग्न आकृति में Δ ABC की भुजा AC पर बिंदु D इस प्रकार है कि AC = 16, DC = 9, BP ⊥ AC, तो निम्नलिखित अनुपात ज्ञात कीजिए ।

(i) $\frac{A(\Delta\ ABD)}{A(\Delta\ ABC)}$ (ii) $\frac{A(\Delta\ BDC)}{A(\Delta\ ABC)}$

(iii) $\frac{A(\Delta\ ABD)}{A(\Delta\ BDC)}$

हल : Δ ABC में भुजा AC पर बिंदु P तथा बिंदु D हैं । इसलिए Δ ABD, Δ BDC, Δ ABC, Δ APB का सामान्य शीर्षबिंदु B पर विचार करें तो उनकी AD, DC, AC, AP आदि भुजाएँ एक ही रेखा पर स्थित हैं । इन सभी त्रिभुजों की ऊँचाई समान है । इसलिए इन त्रिभुजों का क्षेत्रफल उनके आधारों के अनुपात में है ।

AC = 16, DC = 9,

$\therefore$ AD = 16 − 9 = 7

$\therefore \frac{A(\Delta\ ABD)}{A(\Delta\ ABC)} = \frac{AD}{AC} = \frac{7}{16}$ . . . . (समान ऊँचाईवाले त्रिभुज)

$\frac{A(\Delta\ BDC)}{A(\Delta\ ABC)} = \frac{DC}{AC} = \frac{9}{16}$ . . . . (समान ऊँचाईवाले त्रिभुज)

$\frac{A(\Delta\ ABD)}{A(\Delta\ BDC)} = \frac{AD}{DC} = \frac{7}{9}$ . . . . (समान ऊँचाईवाले त्रिभुज)

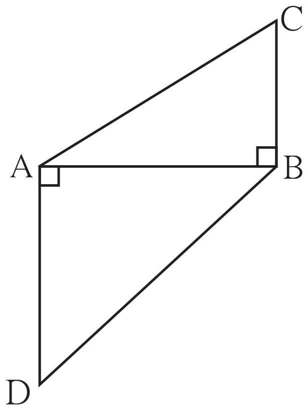
इसे ध्यान में रखें

- दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उन त्रिभुजों के संगत आधार तथा संगत ऊँचाइयों के गुणनफल के अनुपात के बराबर होता है ।
- समान ऊँचाई वाले त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके संगत आधारों के अनुपात के बराबर होता है ।
- समान आधारवाले त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत ऊँचाइयों के अनुपात के बराबर होता है ।

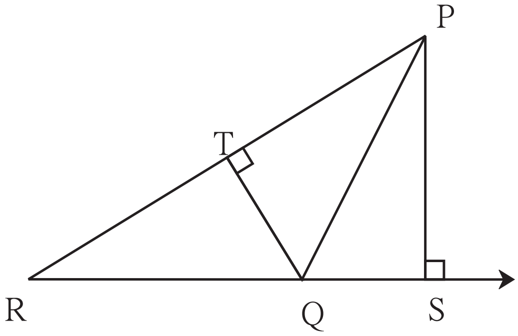
प्रश्नसंग्रह 1.1

1. यदि किसी त्रिभुज का आधार 9 और ऊँचाई 5 है । दूसरे त्रिभुज का आधार 10 और ऊँचाई 6 हो तो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए ।

2. संलग्न आकृति 1.13 में BC ⊥ AB, AD ⊥ AB, BC = 4, AD = 8 तो $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADB)}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

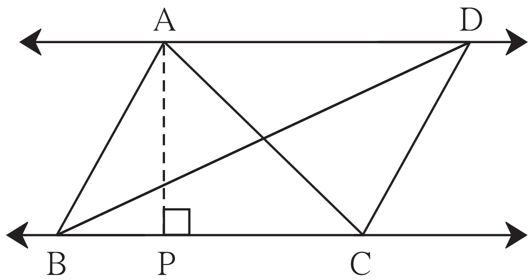


आकृति 1.13



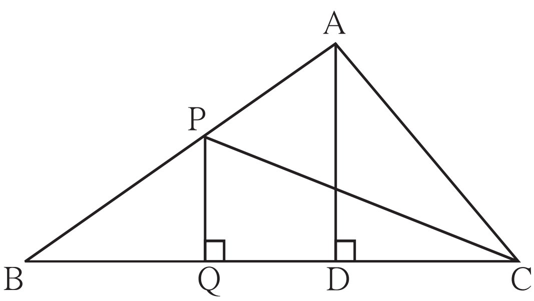
आकृति 1.14

3. संलग्न आकृति 1.14 में रेख PS ⊥ रेख RQ रेख QT ⊥ रेख PR । यदि RQ = 6, PS = 6, PR = 12, तो QT का मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 1.15

4. संलग्न आकृति 1.15 में AP ⊥ BC, AD || BC, तो A(Δ ABC) : A(Δ BCD) का मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 1.16

5. संलग्न आकृति 1.16 में, PQ ⊥ BC, AD ⊥ BC तो निम्नलिखित अनुपात ज्ञात कीजिए ।

(i) $\frac{A(\Delta PQB)}{A(\Delta PBC)}$ (ii) $\frac{A(\Delta PBC)}{A(\Delta ABC)}$

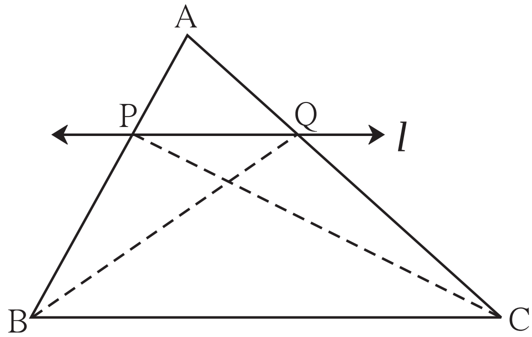
(iii) $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADC)}$ (iv) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta PQC)}$

आओ जानें

समानुपात का मूलभूत प्रमेय (Basic Proportionality Theorem)

प्रमेय : **यदि किसी त्रिभुज की किसी एक भुजा के समांतर खींची गई रेखा उसकी अन्य दो भुजाओं को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करे तो वह रेखा अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है ।**

दत्त : Δ ABC में रेखा $l \parallel$ भुजा BC और रेखा l यह भुजा AB को बिंदु P पर तथा भुजा AC को बिंदु Q पर प्रतिच्छेदित करती है ।



आकृति 1.17

साध्य : $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$

रचना : रेख PC तथा रेख BQ खींचिए ।

उपपत्ति : Δ APQ तथा Δ PQB समान ऊँचाई वाले त्रिभुज हैं ।

$\therefore \dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \dfrac{AP}{PB}$ .... (आधार के अनुपात में क्षेत्रफल) ..... (I)

इसी प्रकार $\dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)} = \dfrac{AQ}{QC}$ .... (आधार के अनुपात में क्षेत्रफल) ..... (II)

Δ PQB तथा Δ PQC में रेख PQ सामान्य आधार है । रेख PQ $\parallel$ रेख BC

इसलिए Δ PQB तथा Δ PQC की ऊँचाई समान है ।

$A(\Delta PQB) = A(\Delta PQC)$ .... (III)

$\dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)}$ .... [(I), (II) तथा (III)] से

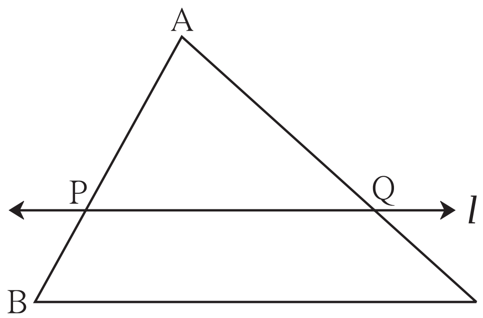
$\therefore \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$ .... [(I) तथा (II)] से

समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम (converse of B.P.T.)

प्रमेय : **यदि कोई रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है, तो वह रेखा उस त्रिभुज की तीसरी भुजा के समांतर होती है ।**

आकृति 1.18 में रेखा l यह Δ ABC की भुजा AB और भुजा AC को क्रमशः बिंदु P और Q पर प्रतिच्छेदित करती है । और $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$ तो रेखा $l \parallel$ रेख BC

इस प्रमेय की उपपत्ति अप्रत्यक्ष पद्धति से दे सकते हैं ।



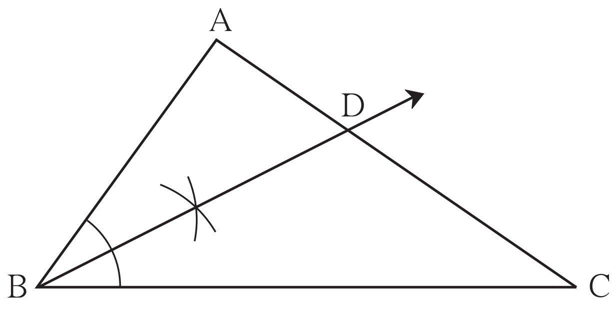
आकृति 1.18

कृति :

- किसी एक Δ ABC की रचना कीजिए ।
- त्रिभुज के $\angle$ B को समद्विभाजित कीजिए । वह AC को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है उसे D नाम दीजिए ।
- भुजा नापकर लिखिए ।

  AB = ____ सेमी   BC = ____ सेमी

  AD = ____ सेमी   DC = ____ सेमी
- $\frac{AB}{BC}$ तथा $\frac{AD}{DC}$ का अनुपात ज्ञात कीजिए ।
- दोनों अनुपात लगभग समान होते हैं, यह समझ में आता है ।
- त्रिभुज के अन्य कोणों को समद्विभाजित कीजिए तथा उपर्युक्त विधि से अनुपात ज्ञात कीजिए । यह अनुपात भी समान आते हैं इसे समझिए ।



आकृति 1.19

आओ जानें

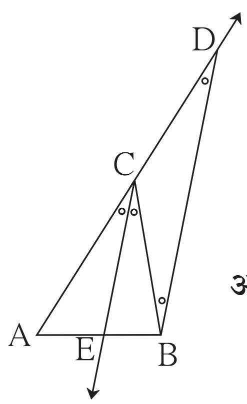
त्रिभुज के कोण समद्विभाजक का प्रमेय (Theorem of angle bisector of a triangle)

प्रमेय : **किसी त्रिभुज में कोण का समद्विभाजक, कोण की सम्मुख भुजा को अन्य भुजाओं की लंबाइयों के अनुपात में विभाजित करता है ।**

दत्त : Δ ABC में $\angle$ C का समद्विभाजक रेख AB को बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करता है ।

साध्य : $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$

रचना : बिंदु B से, किरण CE के समांतर एक रेखा खींचिए जो किरण AC को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करती हो ।



आकृति 1.20

उपपत्ति : किरण CE || किरण BD और रेख AD तिर्यक रेखा है ।

$\therefore$ $\angle$ ACE = $\angle$ CDB .... (संगत कोण) ...(I)

अब BC को तिर्यक रेखा मानकर

$\angle$ ECB = $\angle$ CBD .... (एकांतर कोण) ...(II)

परंतु $\angle$ ACE $\cong$ $\angle$ ECB .... (दत्त) ...(III)

$\therefore$ $\angle$ CBD $\cong$ $\angle$ CDB .... [कथन (I), (II) तथा (III) से]

Δ CBD में, भुजा CB $\cong$ भुजा CD .... (सर्वांगसम कोणों की सम्मुख भुजाएँ)

$\therefore$ CB = CD ...(IV)

अब, Δ ABD में रेख EC || भुजा BD .... (रचना)

$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CD}$ .... (समानुपात का मूलभूत प्रमेय) ...(V)

$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB}$ .... [कथन (IV) तथा (V) से]

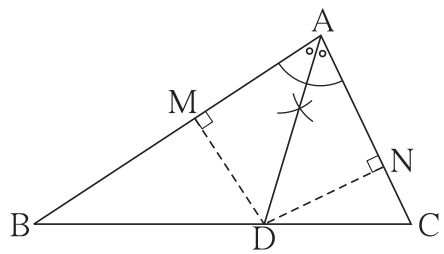
अधिक जानकारी हेतू :

उपर्युक्त प्रमेय की उपपत्ति दूसरे प्रकार से स्वयं लिखिए ।

इसके लिए आकृति 1.21 में दर्शाए अनुसार Δ ABC की रचना कीजिए और DM $\perp$ AB तथा DN $\perp$ AC खींचिए ।

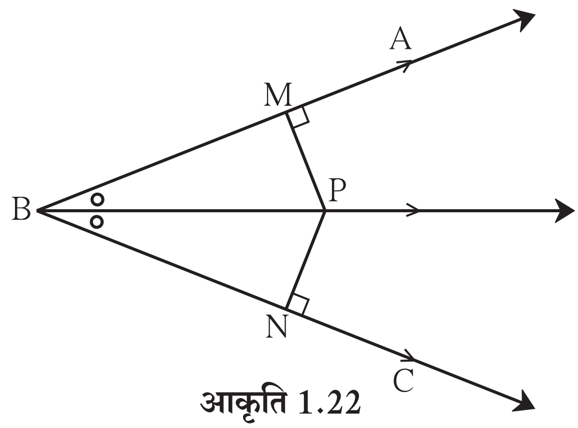
(1) समान ऊँचाई वाले त्रिभुजों के क्षेत्रफल उनके संगत आधारों के अनुपात के बराबर होते हैं इसका उपयोग कीजिए ।

और



आकृति 1.21

(2) कोण के समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु कोण के भुजाओं से समदूरस्थ होता है । इस गुणधर्म का उपयोग कीजिए ।



आकृति 1.22

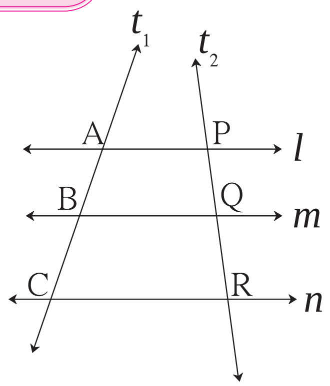
त्रिभुज के कोण समद्विभाजक के प्रमेय का विलोम (Converse of angle bisector of triangle)

Δ ABC में बिंदु D भुजा BC पर इस प्रकार है, कि $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, तो किरण AD यह $\angle$ BAC की समद्विभाजक होती है ।

तीन समांतर रेखाएँ तथा उनकी तिर्यक रेखा का गुणधर्म
(Property of three parallel lines and their transversal)

कृति :

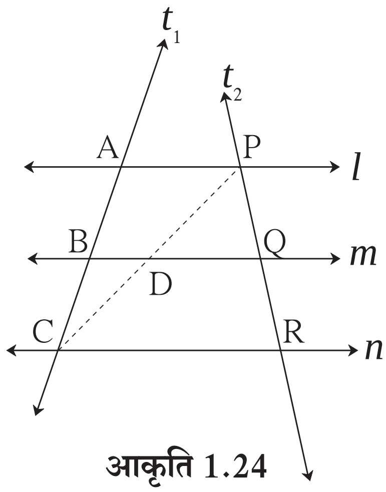
- तीन समांतर रेखाएँ खींचिए ।
- उन्हे l, m, n नाम दीजिए ।
- t_1 तथा t_2 दो तिर्यक रेखाएँ खींचिए ।
- तिर्यक रेखा t_1 पर AB तथा BC अंत:खंड हैं ।
- तिर्यक रेखा t_2 पर PQ तथा QR अंत:खंड हैं ।
- $\frac{AB}{BC}$ तथा $\frac{PQ}{QR}$ के अनुपात ज्ञात कीजिए । यह दोनों अनुपात लगभग समान होते हैं । इसे समझिए ।



आकृति 1.23

प्रमेय : किसी तिर्यक रेखा द्वारा किन्हीं तीन समांतर रेखाओं पर निर्मित अंत:खंण्डों का अनुपात किसी अन्य तिर्यक रेखा द्वारा उन्हीं तीन समांतर रेखाओं पर निर्मित अंत:खण्डों के अनुपात के बराबर होता है ।

दत्त : रेखा l || रेखा m || रेखा n
t_1 तथा t_2 उनकी तिर्यक रेखाएँ है ।
तिर्यक रेखा t_1 यह इन रेखाओं को क्रमशः बिंदु A, B तथा C पर प्रतिच्छेदित करती है । तिर्यक रेखा t_2 यह इन रेखाओं को क्रमशः बिंदु P, Q, तथा R पर प्रतिच्छेदित करती है ।



आकृति 1.24

साध्य : $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

उपपत्ति : रेख PC खींचो । यह रेखाखंड रेखा m को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करती है ।

Δ ACP में, BD || AP

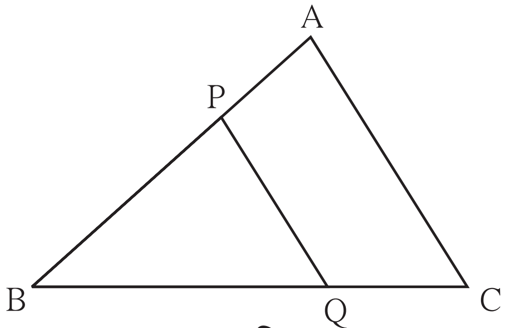
$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC}$. . . . . (I) (समानुपात का मूलभूत प्रमेय)

Δ CPR मे DQ || CR

$\therefore \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . (II) (समानुपात का मूलभूत प्रमेय)

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . . (I) तथा (II) से $\qquad \therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

इसे ध्यान में रखें



आकृति 1.25

(1) समानुपात का मूलभूत प्रमेय

Δ ABC में यदि B-P-A ; B-Q-C

रेख PQ || रेख AC हो

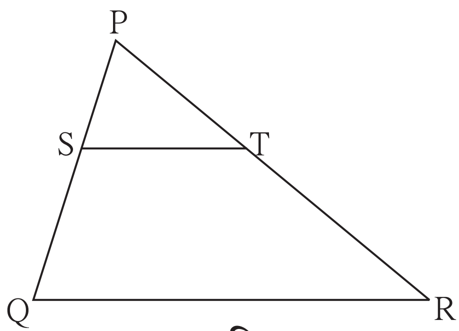
तो $\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$

(2) समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम

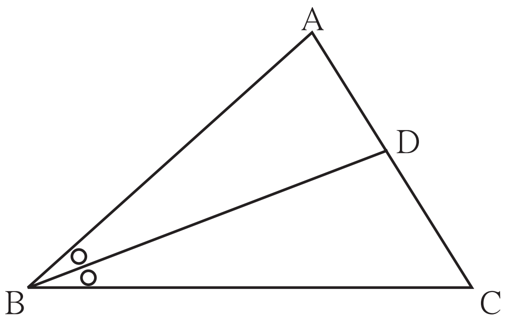
Δ PQR में यदि P-S-Q ; P-T-R

तथा $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

तो रेख ST || रेख QR.



आकृति 1.26



आकृति 1.27

(3) त्रिभुज के कोण समद्विभाजक का प्रमेय

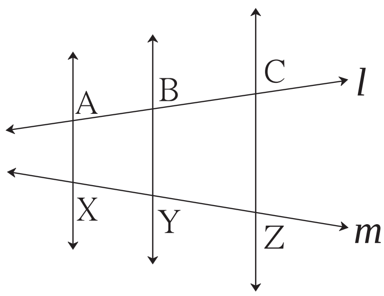
यदि Δ ABC में रेख BD यह $\angle$ ABC की समद्विभाजक हो और A-D-C हो,

तो $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

(4) तीन समांतर रेखाओं तथा उनकी तिर्यक रेखा का गुणधर्म

यदि रेखा AX || रेखा BY || रेखा CZ और तिर्यक रेखाएँ l तथा m क्रमश: A,B,C तथा X,Y,Z में प्रतिच्छेदित करती हो, तो

$\frac{AB}{BC} = \frac{XY}{YZ}$



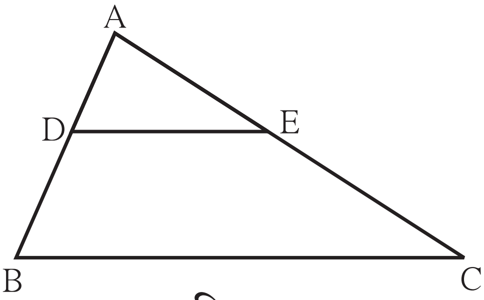
आकृति 1.28

हल किए गए उदाहरण

उदा (1) Δ ABC में DE || BC

DB = 5.4 सेमी, AD = 1.8 सेमी

EC = 7.2 सेमी तो AE का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 1.29

हल : Δ ABC में DE || BC

$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ..... (समानुपात का मूलभूत प्रमेय)

$\therefore \frac{1.8}{5.4} = \frac{AE}{7.2}$

$AE \times 5.4 = 1.8 \times 7.2$

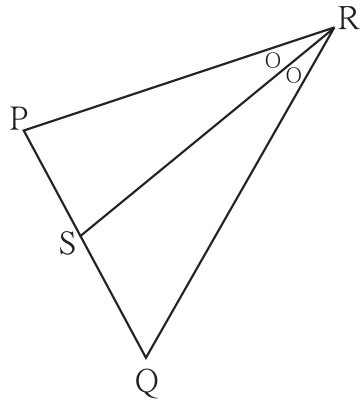
$AE = \frac{1.8 \times 7.2}{5.4} = 2.4$

AE = 2.4 सेमी

उदा. (2) Δ PQR में रेख RS यह $\angle$R की समद्विभाजक है।

PR = 15, RQ = 20, PS = 12

तो SQ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 1.30

हल : Δ PRQ में रेख RS यह $\angle$R की समद्विभाजक है।

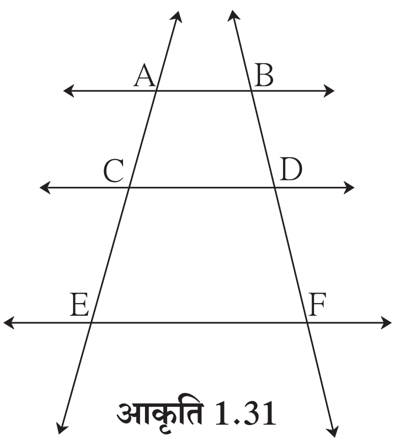
$\frac{PR}{RQ} = \frac{PS}{SQ}$ . . . . . . (कोण समद्विभाजक का प्रमेय)

$\frac{15}{20} = \frac{12}{SQ}$

$SQ = \frac{12 \times 20}{15} = 16$

$\therefore$ SQ = 16

कृति :



आकृति 1.31

संलग्न आकृति में AB || CD || EF

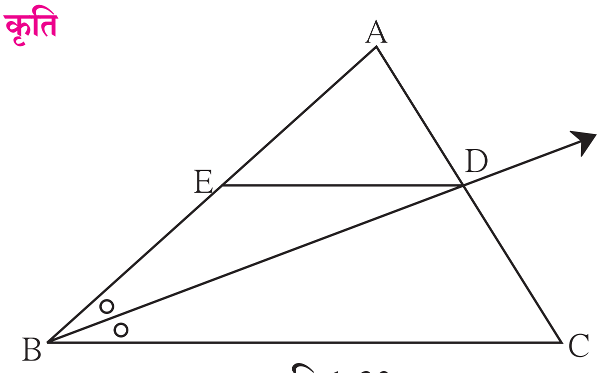
यदि AC = 5.4, CE = 9, BD = 7.5 तो चौखटों को भरकर DF का मान ज्ञात कीजिए।

हल : AB || CD || EF

$\frac{AC}{\square} = \frac{\square}{DF}$ . . . . . ($\square$)

$\frac{5.4}{9} = \frac{\square}{DF}$ $\therefore$ DF = $\square$

कृति



आकृति 1.32

Δ ABC में किरण BD यह $\angle$ ABC की समद्विभाजक है । रेख A-D-C, रेख DE $\parallel$ भुजा BC, A-E-B तो सिद्ध कीजिए कि, $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EB}$

उपपत्ति : Δ ABC में किरण BD यह $\angle$ B की समद्विभाजक है ।

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ .... (कोण समद्विभाजक प्रमेय) .... (I)

Δ ABC में DE $\parallel$ BC

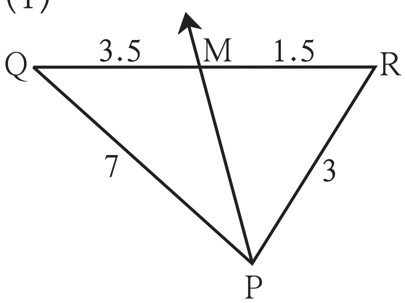
$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ .... ($\square$) .... (II)

$\frac{AB}{\square} = \frac{\square}{EB}$ .... (I) तथा (II) से

प्रश्नसंग्रह 1.2

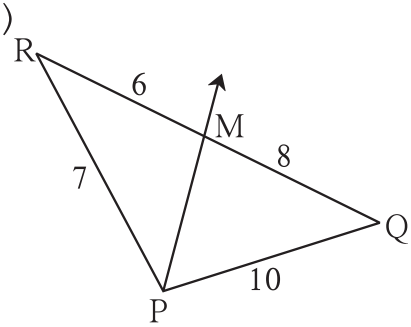
1. नीचे कुछ त्रिभुज और उनके रेखाखंडों की लंबाई दी गई है । इस आधार पर पहचानिए कि किस आकृति में किरण PM यह $\angle$ QPR की समद्विभाजक है ।

(1)



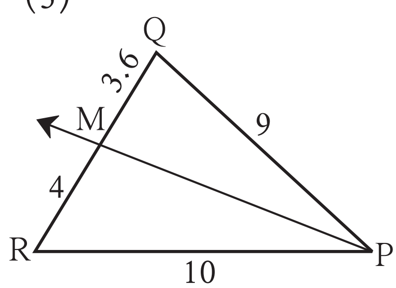
आकृति 1.33

(2)



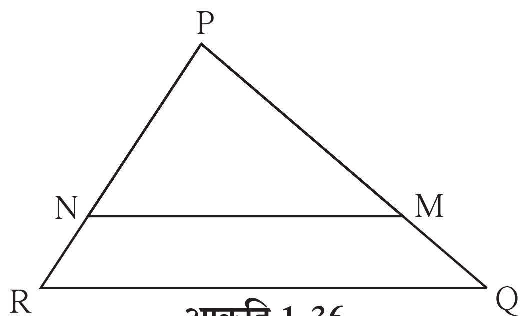
आकृति 1.34

(3)



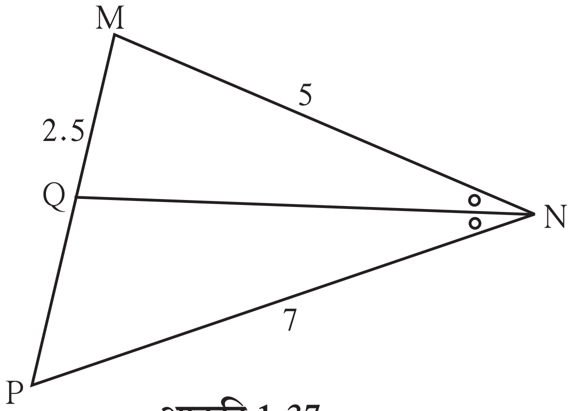
आकृति 1.35

2. Δ PQR में PM = 15, PQ = 25, PR = 20, NR = 8 तो बताइए रेख NM भुजा RQ के समांतर है क्या? कारण लिखिए ।

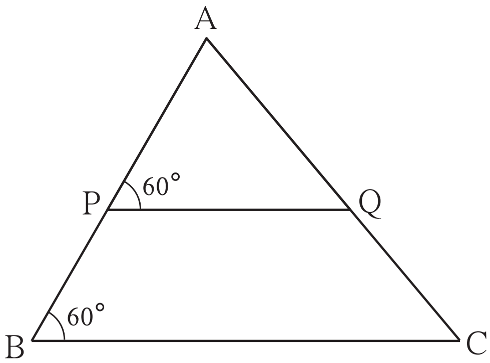


आकृति 1.36

3. Δ MNP में रेख NQ यह $\angle$ N की समद्विभाजक है । यदि MN = 5, PN = 7, MQ = 2.5 तो QP का मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 1.37

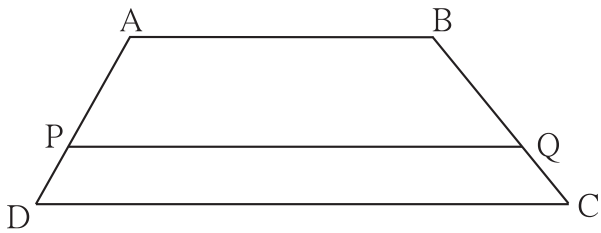


आकृति 1.38

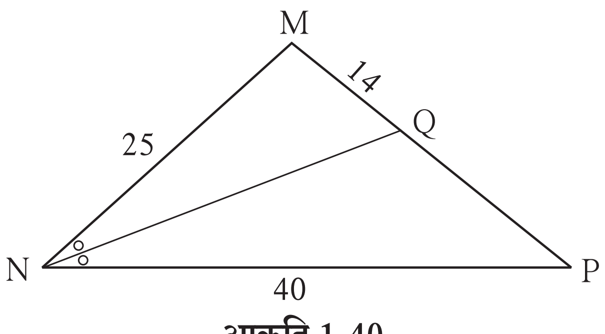
4. आकृति 1.38 में कुछ कोणों के माप दिए गए हैं । इनके आधार पर सिद्ध कीजिए कि,

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

5. समलंब चतुर्भुज ABCD में, भुजा AB || भुजा PQ || भुजा DC, यदि AP = 15, PD = 12, QC = 14 तो BQ का मान ज्ञात कीजिए ।



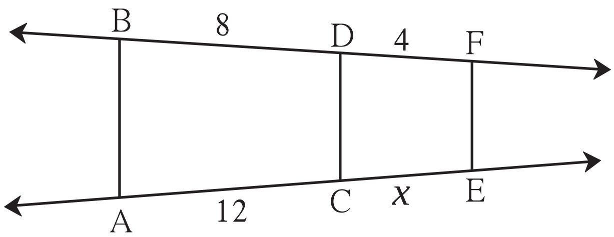
आकृति 1.39



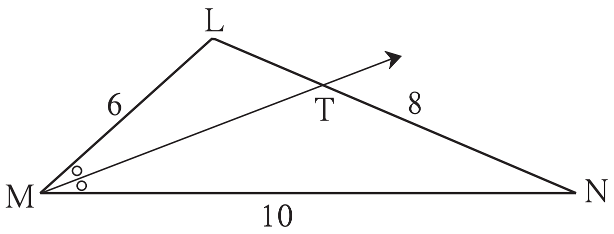
आकृति 1.40

6. आकृति 1.40 में दी गई जानकारी के आधार पर QP का मान ज्ञात कीजिए ।

7. संलग्न आकृति 1.41 में AB || CD || FE तो x तथा AE का मान ज्ञात कीजिए ।



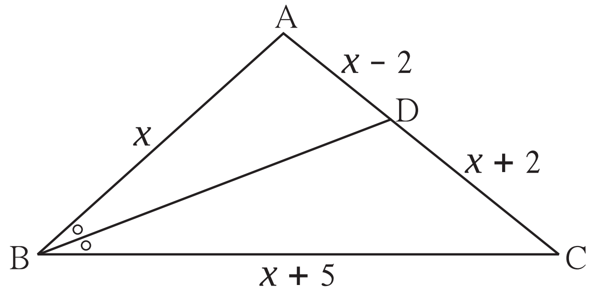
आकृति 1.41



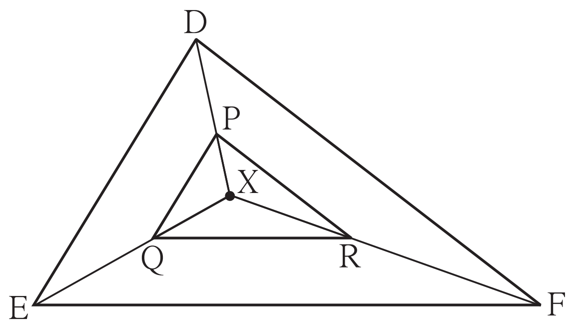
आकृति 1.42

8. Δ LMN में किरण MT यह $\angle$ LMN की समद्विभाजक है ।
LM = 6, MN = 10, TN = 8 तो LT का मान ज्ञात कीजिए ।

9. Δ ABC में रेख BD यह $\angle$ ABC की समद्विभाजक है, यदि AB = x, BC = $x + 5$
AD = $x - 2$, DC = $x + 2$
तो x का मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 1.43



आकृति 1.44

10. संलग्न आकृति 1.44 में त्रिभुज के अंत:भाग में स्थित एक बिंदु X है । बिंदु X को त्रिभुज के शीर्षबिंदुओं से जोड़ा गया है । इसी प्रकार रेख PQ || रेख DE, रेख QR || रेख EF, तो रेख PR || रेख DF को सिद्ध करने के लिए निम्नलिखित चौखटों को पूरा कीजिए ।

उपपत्ति : Δ XDE में PQ || DE .... $\square$

$\therefore \frac{XP}{\square} = \frac{\square}{QE}$ .... (I) (समानुपात का मूलभूत प्रमेय)

Δ XEF में QR || EF .... $\square$

$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ ....(II) $\square$

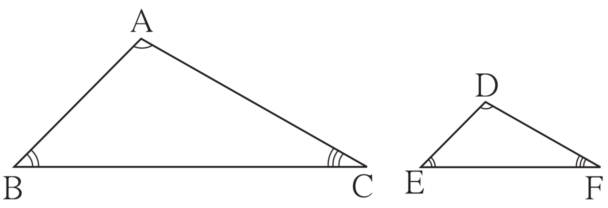
$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ .... कथन (I) तथा (II) से

$\therefore$ रेख PR || रेख DF .... (समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम)

11★. Δ ABC में AB = AC, $\angle$ B तथा $\angle$ C के समद्विभाजक भुजा AC तथा भुजा BC को क्रमश: बिंदु D तथा E पर प्रतिच्छेदित करते हैं । तो सिद्ध कीजिए कि रेख ED || रेख BC

थोड़ा याद करें

समरूप त्रिभुज (Similar triangles)



आकृति 1.45

Δ ABC तथा Δ DEF में यदि $\angle A \cong \angle D$,
$\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

और $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

तो Δ ABC तथा Δ DEF यह त्रिभुज समरूप होते हैं ।

Δ ABC तथा Δ DEF समरूप है इसे $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ के रूप में लिखा जाता है ।

आओ जानें

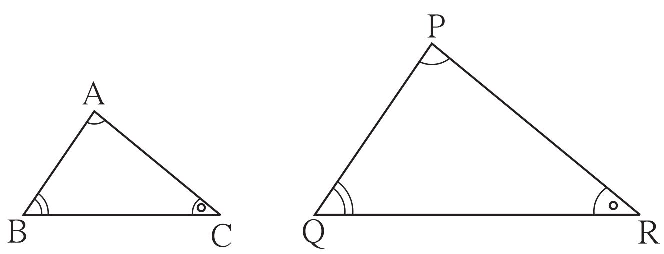
त्रिभुजों की समरूपता की कसौटियाँ (Tests for similarity of triangles)

दो त्रिभुज समरूप हों इसके लिए उनकी तीनों संगतभुजाएँ समानुपात में हों और तीनों संगत कोणों का सर्वांगसम होना अनिवार्य होता है । परंतु इन छह शर्तों में से किसी भी तीन विशिष्ट शर्तों की पूर्ति हो जाने पर शेष सभी शर्तें अपने आप पूरी हो जाती हैं । अर्थात दो त्रिभुजों के समरूप होने लिए कोई भी तीन विशिष्ट शर्तें ही पर्याप्त होती हैं । इन तीनों शर्तों को जाँच कर यह निश्चित किया जा सकता है कि दिए गए दोनों त्रिभुज समरूप हैं । इन पर्याप्त शर्तों को 'समरूपता की कसौटी' कहते हैं । अर्थात वे दो त्रिभुज समरूप हैं यह निश्चित करने के लिए उन विशिष्ट शर्तों को खोजना पर्याप्त होता है ।

समरूपता की कोकोको कसौटी (AAA test for similarity of triangles)

दो त्रिभुजों के शीर्षबिंदुओं की दी गई एकैकी संगति के अनुसार बनने वाले तीनो संगत कोण यदि सर्वांगसम हों तो वे दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं ।

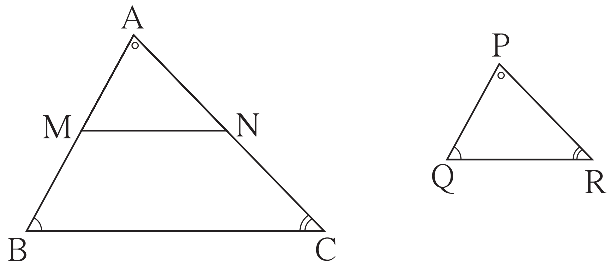
Δ ABC तथा Δ PQR में $ABC \leftrightarrow PQR$
इस संगति में यदि $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$,
$\angle C \cong \angle R$ तो $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



आकृति 1.46

अधिक जानकारी हेतू :

कोकोको कसौटी की उपपत्ति



आकृति 1.47

दत्त : Δ ABC तथा Δ PQR में,
$\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$,
$\angle C \cong \angle R$.

साध्य : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

उपपत्ति : माना Δ ABC यह Δ PQR से बड़ा है । अब AB पर बिंदु M, AC पर बिंदु N इसप्रकार लीजिए कि, AM = PQ और AN = PR । इस आधारपर दिखाइए कि,

$\Delta AMN \cong \Delta PQR$ । इस आधारपर MN || BC दिखा सकते हैं ।

अब समानुपात के मूलभूत प्रमेय का उपयोग कर $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

अर्थात, $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$ .... (विपर्यस्थानुपात की क्रिया से)

$\frac{MB + AM}{AM} = \frac{NC + AN}{AN}$ .... (योगानुपात की क्रिया से)

$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ इसी प्रकार $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ यह दिखा सकते है ।

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ मिलता है । $\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$

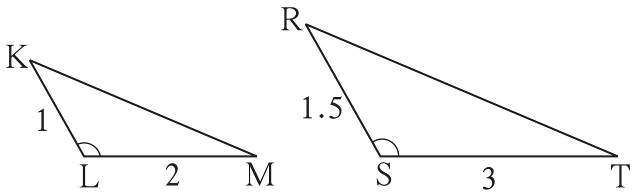
समरूप त्रिभुजों की कोको कसौटी (A A test for similarity of triangles)

दो त्रिभुजों के शीर्ष बिंदुओं की दी गई किसी एकैकी संगति के अनुसार एक त्रिभुज के दो कोण यदि दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों के सर्वांगसम हों तो पहले त्रिभुज का तीसरा कोण दूसरे त्रिभुज के तीसरे कोण के सर्वांगसम होता है, यह हमें ज्ञात है ।

इसलिए किसी एक त्रिभुज के दोनों कोण दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों के सर्वांगसम हों तो यह शर्त दो त्रिभुजों के समरूप होने के लिए पर्याप्त होती है । इस शर्त को समरूपता की कोको कसौटी कहते हैं ।

समरूपता की भु को भु कसौटी (SAS test for similarity of triangles)

दो त्रिभुजों के शीर्षबिंदुओं की दी गई किसी एकैकी संगति के अनुसार यदि उनकी संगत भुजाओं की दो जोड़ियाँ समानुपात में हों और उन भुजाओं में समाविष्ट कोण सर्वांगसम हों तो वे दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं । समरूपता की इस कसौटी को भुकोभु कसौटी कहते हैं ।



आकृति 1.48

उदाहरणार्थ, Δ KLM तथा Δ RST में

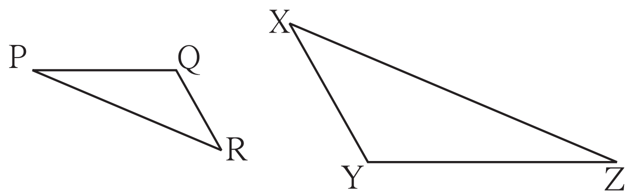
यदि $\angle KLM \cong \angle RST$

$$\frac{KL}{RS} = \frac{LM}{ST}$$

तो $\Delta KLM \sim \Delta RST$

समरूपता की भु भु भु कसौटी (SSS test for similarity of triangles)

दो त्रिभुजों के शीर्षबिंदुओं की दी गई किसी एकैकी संगति के अनुसार जब एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के समानुपात में हो तो वे त्रिभुज समरूप होते हैं । समरूपता की इस कसौटी को भु भु भु कसौटी कहते हैं ।



आकृति 1.49

उदाहरणार्थ, Δ PQR तथा Δ XYZ में यदि

$$\frac{PQ}{YZ} = \frac{QR}{XY} = \frac{PR}{XZ}$$

तो $\Delta PQR \sim \Delta ZYX$

समरूप त्रिभुजों के गुणधर्म :

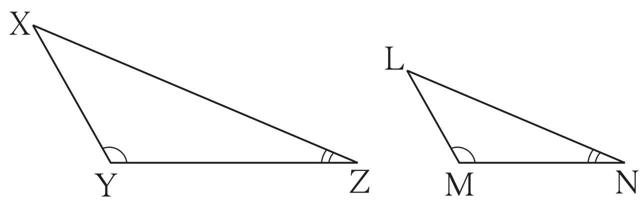
(1) $\Delta ABC \sim \Delta ABC$ – परावर्तकता (Reflexivity)

(2) यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तो $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ – सममिति (Symmetry)

(3) यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तथा $\Delta DEF \sim \Delta GHI$ तो $\Delta ABC \sim \Delta GHI$ – संक्रामकता (Transitivity)

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) Δ XYZ में $\angle Y = 100°$, $\angle Z = 30°$, Δ LMN में $\angle M = 100°$, $\angle N = 30°$, तो क्या Δ XYZ तथा Δ LMN समरूप है ? यदि हों तो किस कसौटी के अनुसार ?



आकृति 1.50

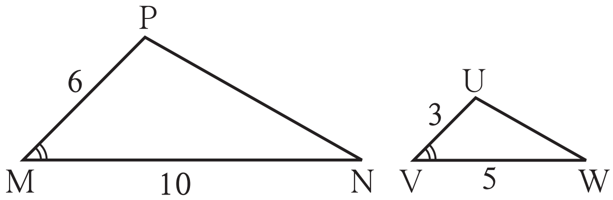
हल : Δ XYZ तथा Δ LMN में,

$\angle Y = 100^\circ, \angle M = 100^\circ \quad \therefore \angle Y \cong \angle M$

$\angle Z = 30^\circ, \angle N = 30^\circ \quad \therefore \angle Z \cong \angle N$

$\therefore \Delta XYZ \sim \Delta LMN$ .... (को को कसौटी अनुसार)

उदा. (2) आकृति में दी गई जानकारी के आधारपर क्या यह त्रिभुज समरूप हैं? यदि है तो किस कसौटी के अनुसार?



आकृति 1.51

हल : Δ PMN तथा Δ UVW में

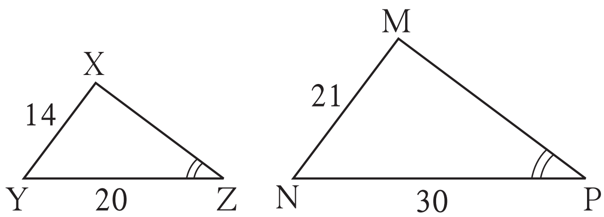
$\frac{PM}{UV} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}, \frac{MN}{VW} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$

$\therefore \frac{PM}{UV} = \frac{MN}{VW}$

और $\angle M \cong \angle V$ .... (दत्त)

$\therefore \Delta PMN \sim \Delta UVW$ .... (समरूपता की भु को भु कसौटी)

उदा. (3) आकृति में दी गई जानकारी के आधारपर क्या इन त्रिभुजों को समरूप कहा जा सकता है? यदि हाँ तो किस कसौटी के अनुसार ?



आकृति 1.52

हल : Δ XYZ तथा Δ MNP में

$\frac{XY}{MN} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3},$

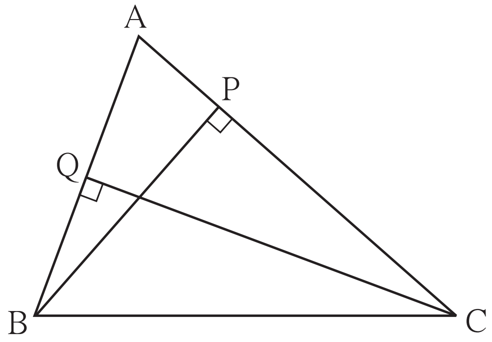
$\frac{YZ}{NP} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{XY}{MN} = \frac{YZ}{NP}$

$\angle Z \cong \angle P$ दिया गया है। परंतु $\angle Z$ तथा $\angle P$ समानुपाति भुजाओं में समाविष्ट कोण नहीं हैं।

$\therefore \Delta$ XYZ तथा Δ MNP समरूप हैं ऐसा नहीं कह सकते।

उदा. (4) संलग्न आकृति में BP ⊥ AC, CQ ⊥ AB, A–P–C, A–Q–B , तो सिद्ध कीजिए कि Δ APB तथा Δ AQC समरूप हैं।



आकृति 1.53

हल : Δ APB तथा Δ AQC में

∠ APB = [ ]° (I)

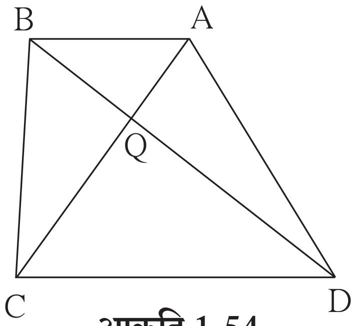
∠ AQC = [ ]° (II)

∴ ∠ APB ≅ ∠ AQC .... (I) और (II) से

∠ PAB ≅ ∠ QAC .... ([ ])

∴ Δ APB ~ Δ AQC ..... को को कसौटी

उदा. (5) यदि चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु Q पर प्रतिच्छेदित करते हों और 2QA = QC तथा 2QB = QD. तो सिद्ध कीजिए कि, DC = 2AB ।



आकृति 1.54

दत्त : 2QA = QC

2QB = QD

साध्य : CD = 2AB

उपपत्ति : 2QA = QC ∴ $\frac{QA}{QC} = \frac{1}{2}$ .... (I)

2QB = QD ∴ $\frac{QB}{QD} = \frac{1}{2}$ .... (II)

∴ $\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$ .... (I) तथा (II) से

Δ AQB तथा Δ CQD में

$\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$ .... (सिद्ध किया है ।)

∠ AQB ≅ ∠ DQC .... (शीर्षाभिमुख कोण)

∴ Δ AQB ~Δ CQD .... (समरूपता की भु को भु कसौटी)

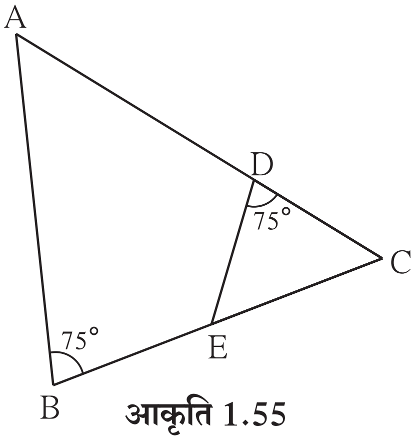
परंतु $\frac{AQ}{CQ} = \frac{QB}{QD} = \frac{AB}{CD}$ .... (संगत भुजाएँ समानुपात में)

∴ $\frac{AQ}{CQ} = \frac{1}{2}$ ∴ $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$

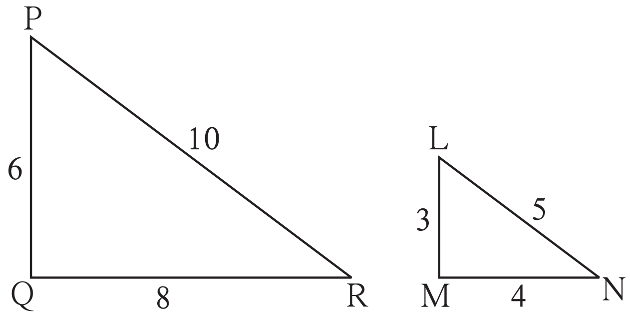
∴ 2AB = CD

प्रश्नसंग्रह 1.3

1. आकृति 1.55 में $\angle ABC = 75^\circ$, $\angle EDC = 75^\circ$ तो इनमें दो त्रिभुज किस कसौटी के अनुसार समरूप हैं ?
उनकी समरूपता की एकैकी संगति लिखिए।



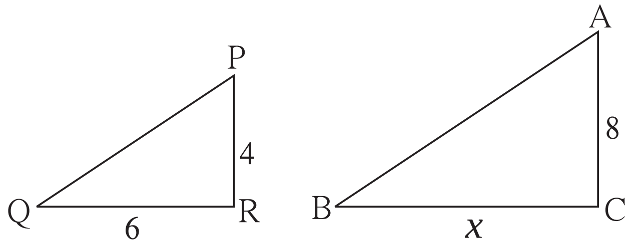
आकृति 1.55



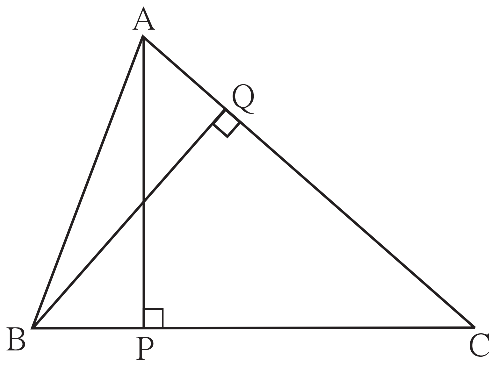
आकृति 1.56

2. संलग्न आकृति 1.56 में, दिए गए त्रिभुज क्या समरूप हैं ? यदि हाँ तो किस कसौटी के अनुसार ?

3. आकृति 1.57 में दर्शाएअनुसार 8 मीटर तथा 4 मीटर ऊँचाईवाले दो खंभे समतल जमीन पर खड़े हैं। सूर्य के प्रकाश से छोटे खंभे की परछाई 6 मीटर होती हो तो उसी समय बड़े खंभे की परछाईं की लंबाई कितनी होगी ?



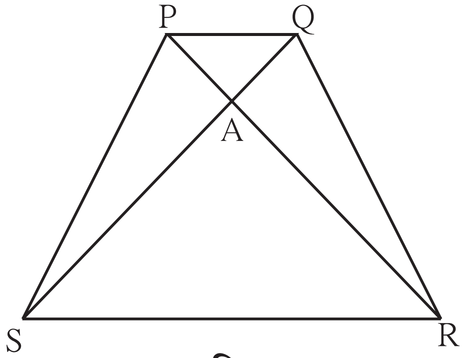
आकृति 1.57



आकृति 1.58

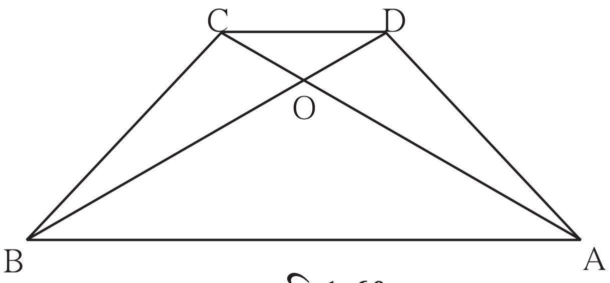
4. ΔABC में $AP \perp BC$, $BQ \perp AC$
B- P-C, A-Q - C तो सिद्‌ध कीजिए कि $\Delta CPA \sim \Delta CQB$ ।
यदि $AP = 7$, $BQ = 8$, $BC = 12$
तो AC का मान ज्ञात कीजिए।

5. संलग्न आकृति में □ PQRS एक समलंब चतुर्भुज है । जिसमें भुजा PQ || भुजा SR, AR = 5AP, AS = 5AQ तो सिद्‌ध कीजिए कि, SR = 5PQ



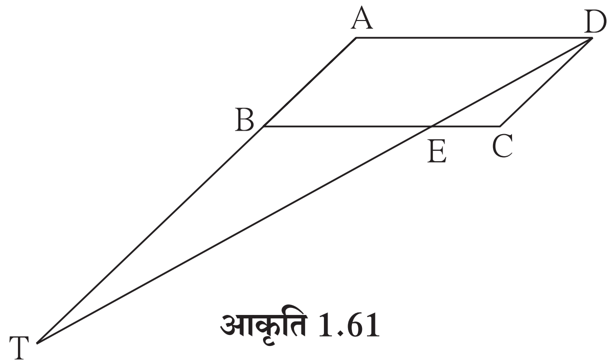
आकृति 1.59

6. समलंब चतुर्भुज ABCD में, भुजा AB || भुजा DC विकर्ण AC तथा विकर्ण BD परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं । यदि AB = 20, DC = 6, OB = 15 तो OD का मान ज्ञात कीजिए ।



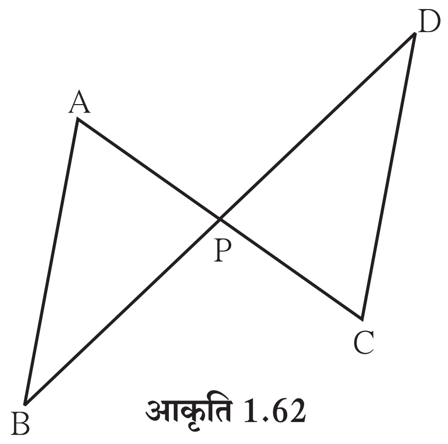
आकृति 1.60

7. □ABCD एक समांतर चतुर्भुज है । भुजा BC पर E कोई एक बिंदु है ; रेखा DE रेख AB को बिंदु T पर प्रतिच्छेदित करती है । तो सिद्‌ध कीजिए कि DE × BE = CE × TE ।



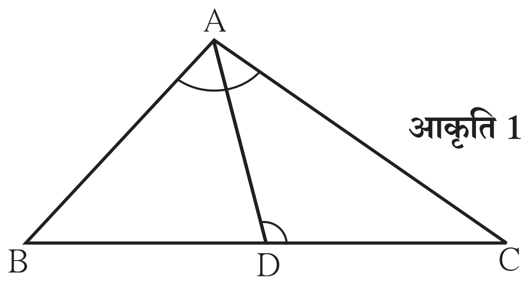
आकृति 1.61

8. संलग्न आकृति में रेख AC तथा रेख BD परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं और $\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$ तो सिद्‌ध कीजिए कि, Δ ABP ~ Δ CDP



आकृति 1.62

9. संलग्न आकृति में Δ ABC में बिंदु D यह भुजा BC पर इस प्रकार है, कि ∠ BAC = ∠ ADC तो सिद्‌ध कीजिए कि, $CA^2 = CB \times CD$

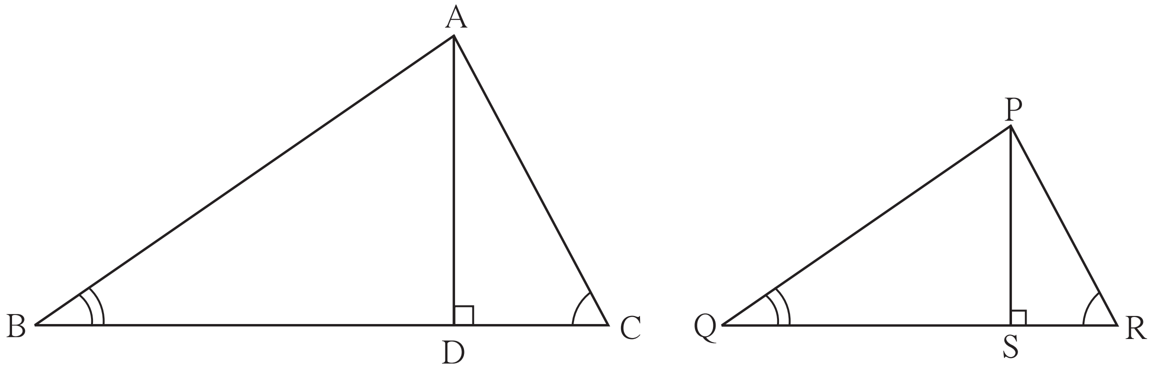


आकृति 1.63

आओ जानें

समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का प्रमेय (Theorem of areas of similar triangles)

प्रमेय : दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।



आकृति 1.64

दत्त : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $AD \perp BC$, $PS \perp QR$

साध्य : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \dfrac{AB^2}{PQ^2} = \dfrac{BC^2}{QR^2} = \dfrac{AC^2}{PR^2}$

उपपत्ति : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \dfrac{BC \times AD}{QR \times PS} = \dfrac{BC}{QR} \times \dfrac{AD}{PS}$ .... (I)

ΔABD तथा ΔPQS में

$\angle B = \angle Q$ .... (दत्त)

$\angle ADB = \angle PSQ = 90^\circ$

$\therefore$ को को कसौटी के अनुसार $\Delta ABD \sim \Delta PQS$

$\therefore \dfrac{AD}{PS} = \dfrac{AB}{PQ}$ .... (II)

परंतु $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$ .... (III)

(II) तथा (III) से

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} \times \frac{BC}{QR} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2}$$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) Δ ABC ~ Δ PQR, A(Δ ABC) = 16 , A(Δ PQR) = 25 तो $\frac{AB}{PQ}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : ΔABC ~ Δ PQR

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ .... (समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है ।)

$\therefore \frac{16}{25} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ $\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{4}{5}$ .... (वर्गमूल ज्ञात करनेपर)

उदा. (2) दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात 2:5 है, छोटे त्रिभुज का क्षेत्रफल 64 वर्ग सेमी हो तो बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

हल : माना Δ ABC ~ Δ PQR ।

माना Δ ABC छोटा त्रिभुज तथा Δ PQR बड़ा त्रिभुज है ।

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{(2)^2}{(5)^2} = \frac{4}{25}$ .... (समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात)

$\therefore \frac{64}{A(\Delta PQR)} = \frac{4}{25}$

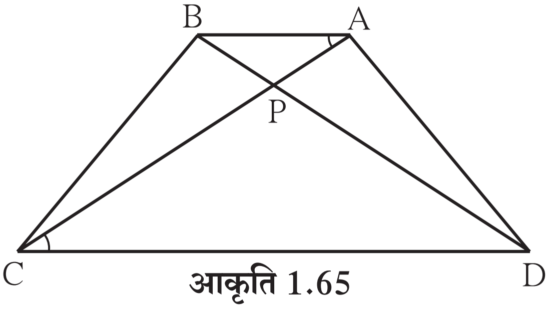
$4 \times A(\Delta PQR) = 64 \times 25$

$A(\Delta PQR) = \frac{64 \times 25}{4} = 400$

$\therefore$ बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल = 400 वर्ग सेमी

उदा. (3) समलंब चतुर्भुज ABCD में भुजा AB || भुजा CD, विकर्ण AC तथा विकर्ण BD परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं तो सिद्ध कीजिए कि, $\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$

हल : समलंब चतुर्भुज ABCD में भुजा AB || भुजा CD



आकृति 1.65

Δ APB तथा ΔCPD में

$\angle PAB \cong \angle PCD$ ...... (एकांतर कोण)

$\angle APB \cong \angle CPD$ .... (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore \Delta APB \sim \Delta CPD$ .... (को को कसौटी)

$\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$ .... (समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का प्रमेय)

प्रश्नसंग्रह 1.4

1. दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात 3:5 हो तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए ।

2. Δ ABC ~ Δ PQR और AB : PQ = 2 : 3 तो निम्नलिखित रिक्त चौखटों को पूरा कीजिए ।

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{\square} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{\square}{\square}$$

3. Δ ABC ~ Δ PQR, A(Δ ABC) = 80, A(Δ PQR) = 125 तो निम्नलिखित रिक्त चौखटों को पूरा कीजिए ।

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta \square)} = \frac{80}{125} = \frac{\square}{\square} \qquad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\square}{\square}$$

4. Δ LMN ~ Δ PQR, $9 \times$ A (ΔPQR) = $16 \times$ A (ΔLMN), यदि QR = 20 तो MN का मान ज्ञात कीजिए ।

5. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल 225 वर्ग सेमी तथा 81 वर्ग सेमी है । यदि छोटे त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई 12 सेमी हो तो बड़े त्रिभुज की संगत भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

6. समबाहु Δ ABC तथा Δ DEF में A(ΔABC) : A(Δ DEF) = 4 : 7 AB = 4 तो DE की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

7. आकृति 1.66 में रेख PQ || रेख DE यदि A(Δ PQF) = 20 वर्ग इकाई, PF = 2 DP है, तो A($\square$ DPQE) ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए ।

A(Δ PQF) = 20 वर्ग इकाई, PF = 2 DP, माना DP = x $\therefore$ PF = $2x$

DF = DP + $\square$ = $\square$ + $\square$ = $3x$

Δ FDE तथा Δ FPQ में ।

$\angle$ FDE $\cong$ $\angle$ $\square$ (संगत कोण)

$\angle$ FED $\cong$ $\angle$ $\square$ (संगत कोण)

$\therefore$ Δ FDE ~ Δ FPQ .... (को को कसौटी)

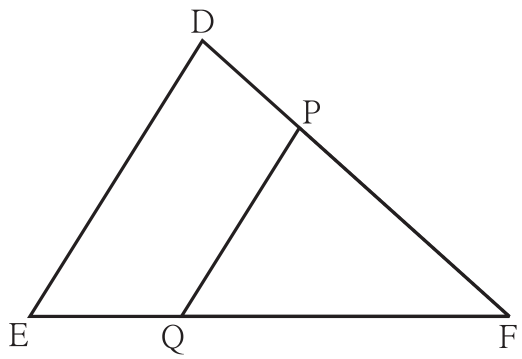
$$\therefore \frac{A(\Delta FDE)}{A(\Delta FPQ)} = \frac{\square}{\square} = \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \frac{9}{4}$$

$$A(\Delta FDE) = \frac{9}{4} A(\Delta FPQ) = \frac{9}{4} \times \square = \square$$

A($\square$ DPQE) = A(Δ FDE) − A(Δ FPQ)

$= \square - \square$

$= \square$



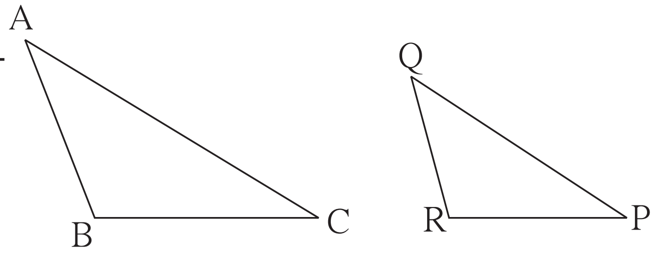
आकृति 1.66

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. निम्नलिखित उपप्रश्नों के पर्यायी उत्तर दिए गए हैं । इनमें से सही पर्याय चुनिए ।

(1) यदि Δ ABC तथा Δ PQR में किसी एकैकी संगति से यदि $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$ तो निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ?

(A) Δ PQR ~ Δ ABC
(B) Δ PQR ~ Δ CAB
(C) Δ CBA ~ Δ PQR
(D) Δ BCA ~ Δ PQR

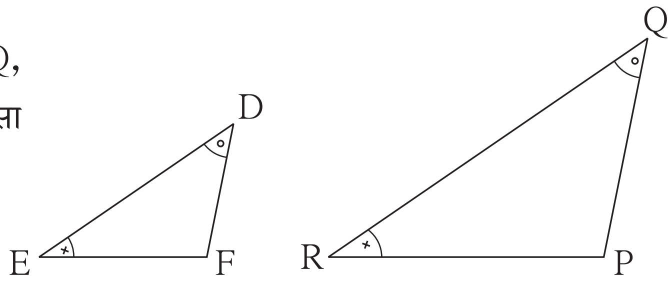


आकृति 1.67

(2) यदि Δ DEF तथा Δ PQR में $\angle D \cong \angle Q$, $\angle R \cong \angle E$ तो निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है ?

(A) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (B) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$

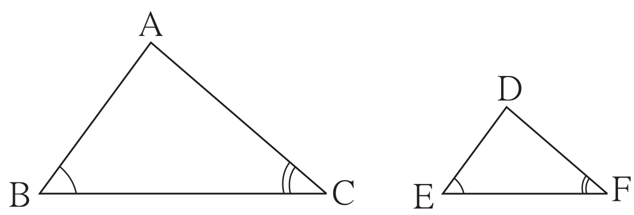
(C) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (D) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$



आकृति 1.68

(3) Δ ABC तथा Δ DEF में $\angle B = \angle E$, $\angle F = \angle C$ और AB = 3 DE, तो इन दोनों त्रिभुजों के लिए कौन-सा कथन सत्य है ?

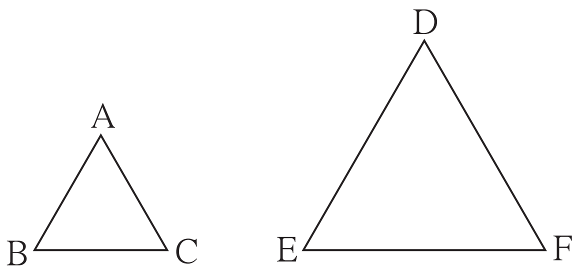
(A) दोनों त्रिभुज सर्वांगसम और समरूप नहीं हैं ।
(B) दोनों त्रिभुज समरूप हैं परंतु सर्वांगसम नहीं हैं ।
(C) दोनों त्रिभुज सर्वांगसम और समरूप दोनों हैं ।
(D) उपर्युक्त में से कोई भी कथन सत्य नहीं है ।



आकृति 1.69

(4) समबाहु Δ ABC तथा Δ DEF में, A (Δ ABC) : A (Δ DEF) = 1 : 2 होनेपर AB = 4 हो तो DE की लंबाई कितनी ?

(A) $2\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 8 (D) $4\sqrt{2}$

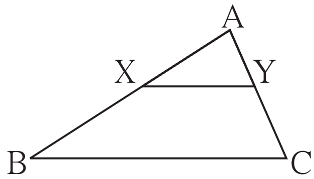


आकृति 1.70

(5) आकृति 1.71 में रेख XY || रेख BC तो निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ?

(A) $\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AY}$ (B) $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{AC}$

(C) $\frac{AX}{YC} = \frac{AY}{XB}$ (D) $\frac{AB}{YC} = \frac{AC}{XB}$



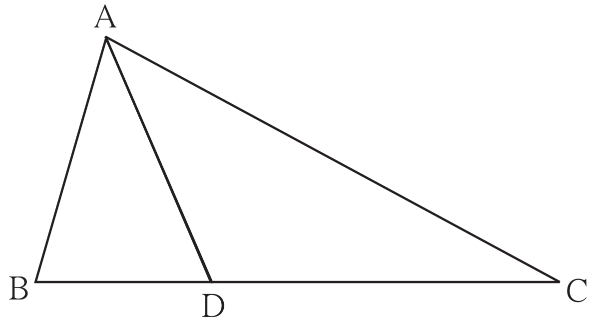
आकृति 1.71

2. Δ ABC में B - D - C और BD = 7, BC = 20 तो निम्नलिखित अनुपात ज्ञात कीजिए।

(1) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)}$

(2) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$

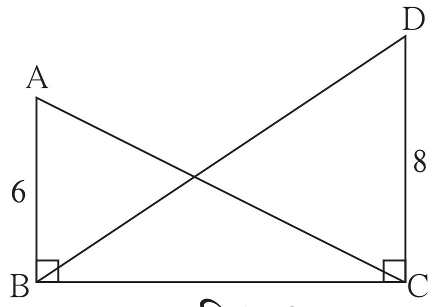
(3) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ABC)}$



आकृति 1.72

3. समान ऊँचाईवाले दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 2 : 3 है, छोटे त्रिभुज का आधार 6 सेमी हो तो बड़े त्रिभुज का संगत आधार कितना होगा ?

4.



आकृति 1.73

आकृति 1.73 में $\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$

AB = 6, DC = 8

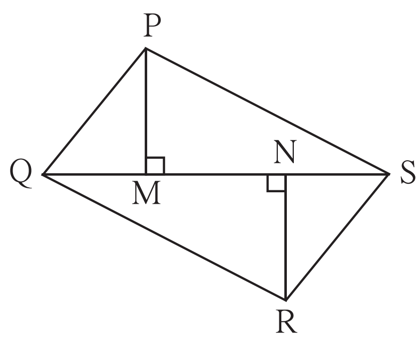
तो $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)}$ = कितना ?

5. आकृति 1.74 में PM = 10 सेमी

A(Δ PQS) = 100 वर्ग सेमी

A(ΔQRS) = 110 वर्ग सेमी

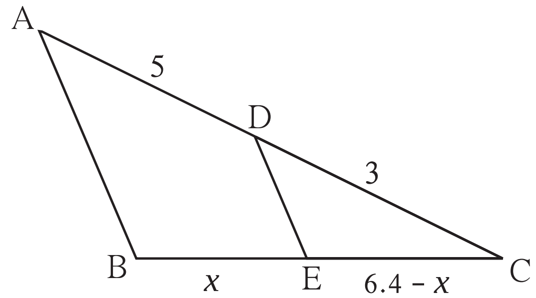
तो NR का मान ज्ञात कीजिए।



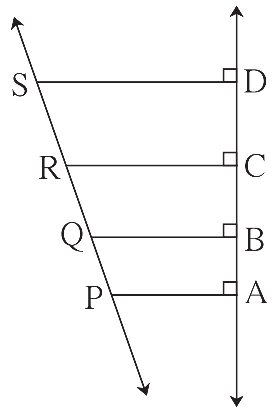
आकृति 1.74

6. Δ MNT ~ Δ QRS, बिंदु T से खींचे गए शीर्षलंब की लंबाई 5 तथा बिंदु S से खींचे गए शीर्षलंब की लंबाई 9 है, तो $\frac{A(\Delta MNT)}{A(\Delta QRS)}$ यह अनुपात ज्ञात कीजिए।

7. आकृति 1.75 में A – D – C व B – E – C रेख DE || भुजा AB यदि AD = 5, DC = 3, BC = 6.4 तो BE का मान ज्ञात कीजिए ।



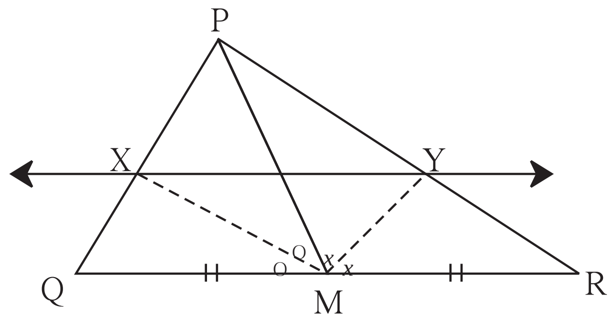
आकृति 1.75



आकृति 1.76

8. आकृति 1.76 में, रेख PA, रेख QB, रेख RC तथा रेख SD ये रेखा AD पर लंब हैं । AB = 60, BC = 70, CD = 80, PS = 280 तो PQ, QR, RS का मान ज्ञात कीजिए ।

9. Δ PQR में रेख PM माध्यिका है । ∠PMQ तथा ∠PMR के समद्विभाजक भुजा PQ तथा भुजा PR को क्रमश: बिंदु X और बिंदु Y पर प्रतिच्छेदित करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि, XY || QR.



आकृति 1.77

दिए गए रिक्त स्थानों को भरकर उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।

Δ PMQ में किरण MX यह ∠PMQ की समद्विभाजक है ।

$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ .... (I) (कोण समद्विभाजक प्रमेय)

Δ PMR में किरण MY यह ∠PMR की समद्विभाजक है ।

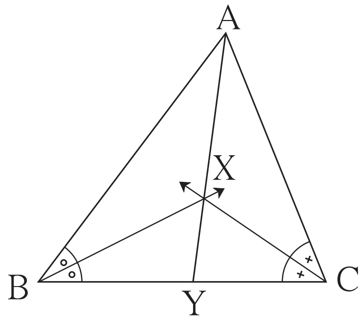
$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ .... (II) (कोण समद्विभाजक प्रमेय)

परंतु $\frac{MP}{MQ} = \frac{MP}{MR}$ .... (बिंदु M यह QR का मध्य बिंदु है अर्थात MQ = MR)

$\therefore \frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR}$

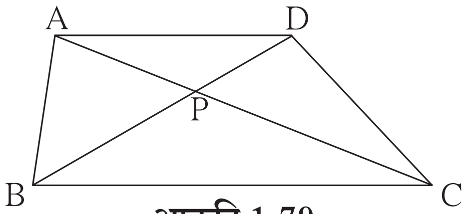
$\therefore$ XY || QR .... (समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम)

10. आकृति 1.78 Δ ABC में $\angle$ B तथा $\angle$ C के समद्विभाजक परस्पर एक दूसरे को बिंदु X पर प्रतिच्छेदित करते हैं । रेखा AX यह भुजा BC को बिंदु Y पर प्रतिच्छेदित करती है; यदि AB = 5, AC = 4, BC = 6 तो $\frac{AX}{XY}$ का मान ज्ञात कीजिए ।



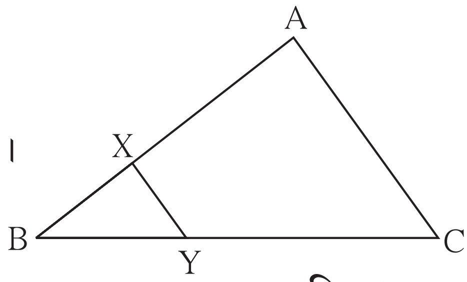
आकृति 1.78

11. $\square$ ABCD में रेख AD $\parallel$ रेख BC. विकर्ण AC और विकर्ण BD परस्पर एक दूसरे को बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं । तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{BP}$



आकृति 1.79

12. आकृति 1.80 में रेख XY $\parallel$ भुजा AC. यदि 2AX = 3BX और XY = 9 तो AC का मान ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए ।



आकृति 1.80

कृति : 2AX = 3BX $\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{AX + BX}{BX} = \frac{\square + \square}{\square}$ .... (योगानुपात की क्रिया से)

$\frac{AB}{BX} = \frac{\square}{\square}$ .... (I)

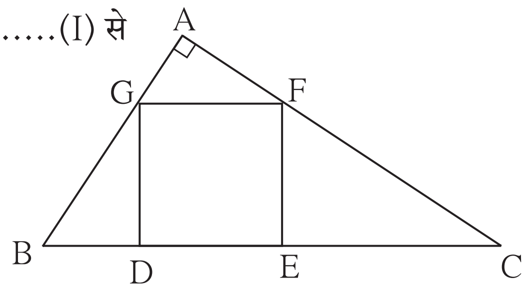
Δ BCA ~ Δ BYX .... (समरूपता की $\square$ कसौटी)

$\therefore \frac{BA}{BX} = \frac{AC}{XY}$ .... (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजा)

$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{AC}{9}$ $\therefore$ AC = $\square$ ....(I) से

13★. आकृति 1.81 में $\square$ DEFG एक वर्ग है । Δ ABC में $\angle A = 90°$, बिंदु F भुजा AC पर स्थित है । तो सिद्ध कीजिए कि, $DE^2 = BD \times EC$

(Δ GBD तथा Δ CFE को समरूप दिखाइए और GD = FE = DE का उपयोग कीजिए ।)



आकृति 1.81

PF5BJV

❑❑❑