6 सांख्यिकी

आओ सीखें

- **केंद्रीय प्रवृत्ति का मापन – वर्गीकृत बारंबारता सारिणी के लिए माध्य, माध्यिका, बहुलक।**
- **सांख्यिकीय आँकडों का आलेख द्‌वारा प्रस्तुतीकरण – स्तंभालेख, बारंबारता बहुभुज, वृत्तालेख।**

मानव जीवन में सांख्यिकी अनेक क्षेत्रों में उपयोगी होता है; जैसे कृषि, विज्ञान, अर्थशास्त्र, वाणिज्य, औषधि विज्ञान, वनस्पति, जैविक तंत्रज्ञान, भौतिक विज्ञान, रसायन विज्ञान, शिक्षा विज्ञान, समाज विज्ञान व्यवस्थापन आदि । किसी प्रयोग के पश्चात् मिलने वाले परिणामों की अनेक संभावनाएँ होती हैं – जब इन संभावनाओं की जांच करनी होती है तो बडे पैमाने पर प्रयोग कर के सभी परिणामों को दर्ज किया जाता है । इन दर्ज मुद्‌दों का उपयोग कर विभिन्न परिणामों की संभाव्यता की जाँच की जा सकती है । इसके लिए संख्याशास्त्र अर्थात सांख्यिकी में नियम बनाए गए हैं ।

फ्रान्सिस गाल्टन (1822-1911) इस ब्रिटिश गणितज्ञ ने संख्याशास्त्र में मूलभूत कार्य किए हैं । वे प्रश्नावली बनाकर अनेक व्यक्तियों में वितरित कर उसे भरकर देने का आग्रह करते थे । इस विधि से अधिकांश व्यक्तियों की जानकारी एकत्र कर उनकी पृष्ठभूमि, आर्थिक स्थिति, पसंद-नापसंद, स्वास्थ्य आदि को बड़े पैमाने पर दर्ज करते थे । भिन्न-भिन्न व्यक्तियों के अँगुलियों के निशान भिन्न होते हैं, इसकी जानकारी प्राप्त हो चुकी थी । गाल्टन ने अनेक व्यक्तियों के अँगुलियों के निशानों की जाँच कर उसके वर्गीकरण की पद्‌धति निश्चित किया है । संख्याशास्त्र का उपयोग कर उन्होंने दिखाया कि दो भिन्न व्यक्तियों की अँगुलियों के निशान समान रहने की संभावना लगभग शून्य होती है । इसलिए अँगुलियों के निशान से किसी व्यक्ति की पहचान करना संभव हुआ है । प्राणियों तथा मानव के अनुवांशिक विज्ञान में उन्होंने अधिक कार्य किया है ।

थोड़ा याद करें

सर्वेक्षण से प्राप्त सांख्यिकी आँकड़ों में सामान्यत: एक गुणधर्म प्राप्त होता है, अर्थात सभी प्राप्तांकों का किसी विशिष्ट प्राप्तांक या उसके आसपास केंद्रित होने की प्रवृत्ति । यह विशिष्ट प्राप्तांक उस समूह की प्रतिनिधि संख्या होती है । इस संख्या को 'केंद्रीय प्रवृत्ति का मान' कहते हैं ।

हमने अवर्गीकृत सारिणी के लिए माध्य (Mean), माध्यिका (Median) तथा बहुलक (Mode) का अध्ययन पहले भी किया है ।

प्रयोग 1 : अपनी कक्षा के सभी लड़कों की ऊँचाई मापकर सेमी में लिखिए । इससे यह स्पष्ट होता है कि अनेक लड़कों की ऊँचाई किसी विशिष्ट संख्या के इर्दगिर्द या उसके आसपास केंद्रित होती है ।

प्रयोग 2 : पीपल के पेड़ के नीचे गिरे पत्तों को एकत्रित कीजिए । प्रत्येक विद्‌यार्थी को एक-एक पत्ता दीजिए । अपने-अपने पत्तों की लंबाई डंठल से सिरे तक माप कर लिखने के लिए कहिए । सभी निरीक्षण (प्राप्तांक) दर्ज करने पर यह ध्यान में आता है कि सभी प्राप्तांक किसी विशेष संख्या के इर्दगिर्द ही केंद्रित हैं ।

अब हम सांख्यिकीय सामग्री (आँकड़ों) का केंद्रीय प्रवृत्ति के मापन का 'माध्य' (Mean), 'माध्यिका' (Median) तथा 'बहुलक' (Mode) का अधिक अध्ययन करने वाले हैं । इसके लिए उनकी परिभाषा और चिह्न की जानकारी प्राप्त करेंगे ।

$$\text{सांख्यिकी सामग्री का माध्य} = \frac{\text{सभी प्राप्तांकों का योगफल}}{\text{कुल प्राप्तांक}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$ (यहाँ x_i यह i वाँ प्राप्तांक है ।)

माध्य को $\overline{X}$ से दर्शाया जाता है और दी गई सामग्री (आँकड़ों) का औसत दर्शाता है ।

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

आओ जानें

वर्गीकृत बारंबारता सारिणी से माध्य (Mean from group frequency distribution)

जब प्राप्तांकों की संख्या अधिक होती है तब ऊपरोक्त सूत्र में सभी संख्याएँ लिखकर जोड़ना आसान नहीं होता है इसलिए हम कुछ अन्य विधि का उपयोग करते हैं ।

कभी-कभी बड़े पैमाने पर किए गए प्रयोग की सामग्री वर्गीकृत सारिणी में दी गई होती है । ऐसे समय सांख्यिकीय जानकारी की जाँच करने के लिए संख्याओं का सही माध्य नहीं निकाल सकते, इसलिए उसके लगभग (आसपास) की संख्या ज्ञात करने के लिए या अनुमानित माध्य ज्ञात करने की विधि का अभ्यास करेंगे ।

प्रत्यक्ष पद्‌धति (Direct Method)

अब हम वर्गीकृत सांख्यिकीय जानकारी का माध्य ज्ञात करने की विधि का अध्ययन उदाहरण के माध्यम से करेंगे ।

उदा.(1) नीचे दी गई सारिणी में एक कार्य को पूर्ण करने के लिए प्रत्येक मजदूर को लगने वाले समय का बारंबारता वितरण दिया गया है । इस आधार पर किसी मजदूर को यह कार्य पूर्ण करने में लगने वाले समय का माध्य ज्ञात कीजिए ।

प्रत्येक कार्य पूर्ण करने में लगने वाला समय (घंटों में)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
मजदूरों की संख्या	10	15	12	8	5

हल :

सोपान– (1) सारणी में दर्शाएनुसार खड़े स्तंभ लिया ।

(2) पहले स्तंभ में वर्ग लिखे हैं ।

(3) दूसरे स्तंभ में वर्ग मध्य x_i लिखा है ।

(4) तीसरे स्तंभ में उस वर्ग में मजदूरों की बारंबारता (f_i) लिखी है ।

(5) चौथे स्तंभ में प्रत्येक वर्ग के लिए $(x_i \times f_i)$ गुणनफल लिखा है ।

(6) बाद में $\sum_{i=1}^{N} x_i f_i$ लिखिए ।

(7) सूत्र का उपयोग कर माध्य ज्ञात कीजिए ।

वर्ग (समय घंटो में)	वर्ग मध्य x_i	मजदूरों की संख्या f_i	$x_i f_i$
15–19	17	10	170
20–24	22	15	330
25–29	27	12	324
30–34	32	8	256
35–39	37	5	185
कुल		$\sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 1265$

$$\text{माध्य} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{1265}{50} = 25.3 \quad \because \sum f_i = N$$

प्रत्येक मजदूर को कार्य पूर्ण करने में लगने वाले समय का माध्य = 25.3 घंटे (अनुमानित)

हल किए गए उदाहरण

उदा. (2) दी गई सारिणी में 50 विद्यार्थियों का जाँच परीक्षा में प्राप्त अंकों का प्रतिशत दिया गया है इसके आधार पर अंकों के प्रतिशत का माध्य ज्ञात कीजिए ।

अंकों का प्रतिशत	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
विद्यार्थी संख्या	3	7	15	20	5

हल : सोपान के अनुसार निम्नलिखित सारिणी बनाया ।

वर्ग अंको का प्रतिशत	वर्ग मध्य x_i	बारंबारता (विद्यार्थियों की संख्या) f_i	वर्ग मध्य × बारंबारता $x_i f_i$
0–20	10	3	30
20–40	30	7	210
40–60	50	15	750
60–80	70	20	1400
80–100	90	5	450
कुल		$N = \sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 2840$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{2840}{50}$$

$$= 56.8$$

$\therefore$ अंको का प्रतिशत माध्य = 56.8

उदा. (3) पिछले वर्ष गर्मियों में महाराष्ट्र के 30 विभिन्न शहरों के एक दिन का अधिकतम तापमान °C में सारिणी में दिया गया है, इस आधार पर अधिकतम तापमान का माध्य ज्ञात कीजिए ।

उच्चतम तापमान	24-28	28-32	32-36	36-40	40-44
शहरों की संख्या	4	5	7	8	6

हल :

वर्ग तापमान °C	वर्ग मध्य x_i	शहरों की संख्या f_i	वर्ग मध्य × बारंबारता $x_i f_i$
24-28	26	4	104
28-32	30	5	150
32-36	34	7	238
36-40	38	8	304
40-44	42	6	252
कुल		$\sum f_i = 30$	$\sum x_i f_i = 1048$

$$\text{माध्य} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{1048}{30} = 34.93\ ^\circ C$$

अनुमानित माध्य पद्धति (Assumed Mean Method)

हल किए गए ऊपरोक्त उदाहरण से हमें ध्यान आता है कि कभी-कभी $x_i\ f_i$ का गुणनफल बहुत बड़ी संख्या होती है । इससे प्रत्यक्ष पद्धति से माध्य ज्ञात करना आसान नहीं होता । इसके लिए हम एक और पद्धति 'अनुमानित माध्य पद्धति' को समझ लेंगे । इस पद्धति से माध्य ज्ञात करते समय छोटी संख्याओ का योग तथा भाग करने मे सुविधाजनक होता है ।

उदाहरण : 40, 42, 43, 45, 47, 48 यह प्राप्तांक हैं । इनका माध्य ज्ञात करना है ।

इस उदाहरण में संख्याओं का निरीक्षण करने पर हमें यह ध्यान में आता है कि इस सामग्री का माध्य 40 से अधिक है इसलिए 40 को माध्य मानेंगे । यह अनुमानित माध्य है । 40-40 = 0, 42 - 40 = 2, 43-40 = 3, 45-40 = 5, 47 - 40 = 7, 48 - 40 = 8 यह अंतर है । इसे विचलन कहते हैं । इसका माध्य ज्ञात करेंगे । माने गए अनुमानित माध्य 40 में मिलाने पर हमें सामग्री का वास्तविक माध्य प्राप्त होता है ।

अर्थात, माध्य = अनुमानित माध्य + अनुमानित माध्य से विचलन का माध्य

$$\overline{X} = 40 + \left(\frac{0+2+3+5+7+8}{6}\right) = 40 + \frac{25}{6} = 40 + 4\frac{1}{6} = 44\frac{1}{6}$$

अनुमानित माध्य के लिए A अनुमानित माध्य से विचलन के लिए d और विचलन के माध्य के लिए $\overline{d}$ चिह्न मानने पर $\overline{X} = A + \overline{d}$ सूत्र प्राप्त होता है ।

इसी उदाहरण को हम अनुमानित माध्य 43 लेकर देखें । प्रत्येक प्राप्तांक से 43 घटाने पर प्राप्त अंतर अर्थात माध्य से विचलन प्राप्त करें ।

$40 - 43 = -3,\ 42 - 43 = -1,\ 43 - 43 = 0,\ 45 - 43 = 2,\ 47 - 43 = 4,\ 48 - 43 = 5$

अनुमानित माध्य से विचलन को जोड़ने पर $= -3 -1 + 0 + 2 + 4 + 5 = 7$

अब $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 43 + \left(\frac{7}{6}\right)$ (यहाँ कुल विचलन 6 है ।)

$= 43 + 1\frac{1}{6}$

$= 44\frac{1}{6}$

हमें ध्यान में आता है कि, इस प्रकार अनुमानित माध्य का उपयोग कर उदाहरण हल करने से गणितीय संक्रियाएँ कम करनी पड़ती हैं । इसी प्रकार प्राप्तांको में से या सुविधाजनक अन्य किसी भी संख्या को माध्य मानने पर सामग्री का माध्य नहीं बदलता है ।

अब हम दी गई बारंबारता सारिणी के लिए इस पद्धति का उपयोग करने हेतु, इसके एक उदाहरण का अध्ययन करेंगे ।

उदा. 100 सब्जी विक्रेताओं की दैनिक बिक्री की बारंबारता सारिणी नीचे दी गई है । अनुमानित माध्य पद्धति से दैनिक बिक्री का माध्य ज्ञात कीजिए ।

दैनिक बिक्री रूपये	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
विक्रेताओं की संख्या	15	20	35	30

हल : अनुमानित माध्य A = 2250, $d_i = x_i - A$ यह विचलन है ।

वर्ग दैनिक बिक्री (रुपयों में)	वर्ग मध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2250$	विक्रेताओं की संख्या f_i	बारंबारता × विचलन $f_i d_i$
1000-1500	1250	-1000	15	-15000
1500-2000	1750	-500	20	-10000
2000-2500	2250→A	0	35	0
2500-3000	2750	500	30	15000
कुल			$N = \sum f_i = 100$	$\sum f_i d_i = -10000$

सोपान का उपयोग कर सारिणी बनाइए।

(1) अनुमानितमाध्य A = 2250 लिया गया। (साधारणत: सारिणी में सर्वाधिक बारंबारता वाले वर्ग मध्य को अनुमानित माध्य मानते हैं।

(2) पहले स्तंभ में बिक्री का वर्ग लिखा है।

(3) दूसरे स्तंभ में वर्ग मध्य लिखा।

(4) तीसरे स्तंभ में $d_i = x_i - A = x_i - 2250$ का मान लिखा है।

(5) चौथे स्तंभ में प्रत्येक वर्ग के विक्रेताओं की संख्या लिखीं तथा योग $\sum f_i$ लिखा है।

(6) पाँचवें स्तंभ में $(f_i \times d_i)$ का गुणा करके उसका योग $\sum f_i d_i$ किया है।

(7) सूत्र का उपयोग करके $\overline{d}$ तथा $\overline{X}$ ज्ञात किया है।

$$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = -\frac{10000}{100} = -100 \qquad \therefore \text{ माध्य } \overline{X} = A + \overline{d} = 2250 - 100 = 2150$$

दैनिक बिक्री का माध्य = 2150 रुपये है।

कृति : इस उदाहरण को प्रत्यक्ष पद्‌धति से हल कीजिए।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) निम्नलिखित सारिणीं में एक व्यापारी के पास कार्यरत 50 कर्मचारियों के दैनिक वेतन का बारंबारता बंटन दिया गया है इस आधार पर एक कर्मचारी के दैनिक वेतन का माध्य, अनुमानित माध्य पद्‌धति से ज्ञात कीजिए।

प्रत्येक कर्मचारी का दैनिक वेतन (रुपयों में)	200-240	240-280	280-320	320-360	360-400
कर्मचारियों की संख्या (बारंबारता)	5	10	15	12	8

हल : माना, अनुमानित माध्य A = 300

वर्ग (वेतन रुपयों में)	वर्ग मध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 300$	बारंबारता कर्मचारियों की संख्या f_i	बारंबारता × विचलन $f_i d_i$
200-240	220	-80	5	-400
240-280	260	-40	10	-400
280-320	300→A	0	15	0
320-360	340	40	12	480
360-400	380	80	8	640
कुल			$\sum f_i = 50$	$\sum f_i d_i = 320$

$$\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = \frac{320}{50} = 6.4$$

माध्य $\overline{X} = A + \bar{d}$

$= 300 + 6.4$

$= 306.40$

कर्मचारियों के दैनिक वेतन का माध्य = 306.40 रुपये है ।

सोपान विचलन पद्धति (Step deviation method)

हमने माध्य ज्ञात करने के लिए प्रत्यक्ष पद्धति तथा अनुमानित माध्य पद्धति का अध्ययन किया है और अधिक सरलता से माध्य ज्ञात करने के लिए एक अन्य पद्धति का अध्ययन उदाहरण के माध्यम से करेंगे ।

- सर्व प्रथम A अनुमानित माध्य को d_i से घटाकर स्तंभ बनाएँ ।
- सभी d_i का मसावि g आसानी से मिलता है तो $u_i = \frac{d_i}{g}$ का स्तंभ बनाएँ ।
- सभी u_i संख्याओं का माध्य $\bar{u}$ ज्ञात कीजिए ।
- $\overline{X} = A + \bar{u}g$ इस सूत्र की सहायता से माध्य ज्ञात कीजिए ।

नमूना उदाहरण –

100 परिवारों द्‌वारा स्वास्थ बीमा के लिए निवेश की वार्षिक राशि दी गई है । सोपान विचलन पद्‌धति से परिवारों की वार्षिक निवेश राशि का माध्य ज्ञात कीजिए ।

प्रत्येक परिवारों की बीमा राशि (रुपयों में)	800–1200	1200–1600	1600–2000	2000–2400	2400–2800	2800–3000
परिवारों की संख्या	3	15	20	25	30	7

हल : माना, A = 2200, सभी d_i को देखने पर $g = 400$ है ।

वर्ग बीमा की राशि (रुपयों में) वर्ग	वर्ग मध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2200$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	बारंबारता परिवारों की संख्या f_i	$f_i u_i$
800-1200	1000	-1200	-3	3	-9
1200-1600	1400	-800	-2	15	-30
1600-2000	1800	-400	-1	20	-20
2000-2400	2200→A	0	0	25	0
2400-2800	2600	400	1	30	30
2800-3000	3000	800	2	7	14
कुल				$\sum f_i = 100$	$\sum f_i u_i = -15$

ऊपरोक्त सारिणी दिए गई सोपान के अनुसार बनाई गई है ।

(1) सारिणी के पहले स्तंभ में बीमा की निवेश की राशि को वर्ग में लिखा है ।

(2) दूसरे स्तंभ में वर्ग मध्य x_i का मान लिखा है ।

(3) तीसरे स्तंभ में $d_i = x_i - A$ का मान लिखा है ।

(4) d_i के सभी मान का मसावि 400 है इसलिए $g = 400$ लिया गया । चौथे स्तंभ में $u_i = \frac{d_i}{g} = \frac{d_i}{400}$ का मान लिखा है ।

(5) पाँचवें स्तंभ में, प्रत्येक वर्ग की बारंबारता (परिवारों की संख्या) लिखा है ।

(6) छठे स्तंभ में $f_i \times u_i$ का गुणनफल प्रत्येक वर्ग के लिए लिखा है ।

u_i का माध्य निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात किया है ।

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{-15}{100} = -0.15$$

$\overline{X} = A + \overline{u}\, g$

$= 2200 + (-0.15)(400)$

$= 2200 + (-60.00)$

$= 2200 - 60 = 2140$

$\therefore$ परिवारों की बीमा की निवेश की राशि का माध्य 2140 रुपये है ।

कृति : प्रत्यक्ष पद्धति, अनुमानित माध्य पद्धति से ऊपरोक्त उदाहरण हल कीजिए । आपको यह अनुभव होगा कि किसी भी पद्धति से ज्ञात किए गए माध्य समान होते हैं ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) विद्यालय के 50 विद्यार्थियों द्वारा बाढ़पीड़ितों के लिए जमा की गई धन राशि बारंबारता सारिणी में दी गई है । इसके आधार पर जमा की गई धनराशि का माध्य ज्ञात कीजिए ।

निधि (रूपये में)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
विद्यार्थी	2	4	24	18	1	1

संलग्न वर्गों में बहुत कम प्राप्तांक हों तो उसको मिलाकर एक वर्ग बनाना सुविधाजनक होगा । इस उदाहरण में 0 - 500 तथा 500 - 1000 का एक वर्ग और 2000 - 2500 तथा 2500 - 3000 का एक वर्ग बनाया ।

निधि की धनराशि (रुपयों में)	0-1000	1000-1500	1500-2000	2000-3000
विद्यार्थी संख्या	6	24	18	2

हल : माना, A = 1250, सभी d_i के आधार पर g = 250 लें ।

वर्ग निधि (रुपयों में)	वर्ग मध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 1250$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	बारंबारता f_i	$f_i u_i$
0-1000	500	-750	-3	6	-18
1000-1500	1250→A	0	0	24	0
1500 - 2000	1750	500	2	18	36
2000-3000	2500	1250	5	2	10
कुल				$\sum f_i = 50$	$\sum f_i u_i = 28$

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{28}{50} = 0.56,$$

$$\bar{u}g = 0.56 \times 250 = 140$$

$$\bar{X} = A + g\bar{u} = 1250 + 140 = 1390$$

∴ जमा की गई राशियों का माध्य 1390 रूपये है ।

कृति –

1. इस उदाहरण को प्रत्यक्ष पद्धति से हल कीजिए ।
2. ऊपरोक्त उदाहरण में ज्ञात किया गया माध्य, अनुमानित माध्य पद्धति से ज्ञात करके जाँच कीजिए ।
3. A = 1750 लेकर ऊपरोक्त उदाहरण हल कीजिए ।

प्रश्नसंग्रह 6.1

(1) 10 वीं कक्षा के 50 विद्यार्थियों द्वारा दैनिक अध्ययन के लिए व्यतीत किए घंटे तथा विद्यार्थियों की संख्या की बारंबारता बंटन सारिणी दी गई है। इसके आधार विद्यार्थियों द्वारा अध्ययन के लिए दिए गए समय (घंटे) का प्रत्यक्ष पद्धति से माध्य ज्ञात कीजिए।

समय (घंटों में)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10
विद्यार्थियों की संख्या	7	18	12	10	3

(2) किसी महामार्ग के टोल नाके पर सुबह 6 बजे से शाम 6 बजे तक जमा किया गया कर रुपयों में तथा वाहनों की संख्या की बारंबारता सारिणी दी गई है। इस आधार पर जमा किए गए कर का माध्य 'अनुमानित माध्य' पद्धति से ज्ञात कीजिए।

जमा कर (रुपयों में)	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
वाहनों की संख्या	80	110	120	70	40

(3) किसी दूध बिक्री केंद्र पर 50 ग्राहकों को वितरित किए गए दूध (लीटर में) की बारंबारता बंटन सारिणी दी गई है। इस आधार पर वितरित किए गए दूध का (लीटर में) माध्य प्रत्यक्ष पद्धति से ज्ञात कीजिए।

दूध वितरण (लीटर में)	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
ग्राहक संख्या	17	13	10	7	3

(4) कुछ बागान मालिकों के संतरे के उत्पादन की बारंबारता बंटन सारिणी दी गई है। इस आधार पर उत्पादन का माध्य 'अनुमानित माध्य' पद्धति से ज्ञात कीजिए।

उत्पादन (हजार रूपयों में)	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
बाग मालिकों की संख्या	20	25	15	10	10

(5) किसी कंपनी के 120 कर्मचारियों से अकालपीड़ितों के लिए जमा की गई राशि की बारंबारता बंटन सारिणी दी गई है। कर्मचारियों की जमा राशि का माध्य 'सोपान विचलन' पद्धति से ज्ञात कीजिए।

जमा राशि (रुपयों में)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500
कर्मचारी संख्या	35	28	32	15	10

(6) किसी कारखाने के 150 कर्मचारियों के साप्ताहिक वेतन की बारंबारता बंटन सारिणी दी गई है। इसके आधार पर कर्मचारियों के साप्ताहिक वेतन का माध्य 'सोपान विचलन' पद्धति से ज्ञात कीजिए।

साप्ताहिक वेतन (रुपयों में)	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
कर्मचारियों की संख्या	25	45	50	30

थोड़ा याद करें

विज्ञान प्रदर्शनी में भाग लेने के लिए किसी विद्यालय के दो छात्र तथा दो छात्राएँ, दो दिन के लिए दूसरे शहर गए थे । उन्हें रात के भोजन का स्थान निश्चित करना था । उनके कार्यस्थल से 1 किलोमीटर की दूरी पर भोजन उपलब्ध कराने वाले दस होटल थे । उनके भोजन का दर (रुपयों में) आरोही क्रम में निम्नानुसार है :-

40, 45, 60, 65, 70, 80, 80, 90, 100 और 500

सभी होटलों में भोजन का औसत दर $\frac{1130}{10} = 113$ रु. थी ।

विद्यार्थियों ने किस होटल में भोजन करने का निश्चय किया होगा ? 500 रू. दर से भोजन देने वाले होटल को छोड़कर अन्य सभी होटलों के दर 113 रूपये से कम थे । विद्यार्थियों ने मध्यम दर वाले होटल का चुनाव करने का निश्चय किया । पहले दिन 70 रू. की दर से तथा दूसरे दिन 80 रू. की दर से भोजन लिया ।

कई बार प्राप्तांकों के औसत की अपेक्षा उसकी 'माध्यिका' उपयोग में लाई जाती है । उसका यह उदाहरण है ।

पिछली कक्षा में अवर्गीकृत सामग्री के लिए हमने 'माध्यिका' इस संकल्पना का अध्ययन किया है ।

- दी गई सामग्री में संख्याएँ आरोही या अवरोही क्रम से रखी गई हों, तो रखी हुई सामग्री के माध्य में आनेवाली संख्या को सामग्री की माध्यिका कहते हैं ।
- माध्यिका दी हुई सामग्री को दो समान भाग में विभाजित करती है । अर्थात दी हुई सामग्री के लिए माध्यिका के ऊपर और नीचे दोनों ओर समान प्राप्तांक होते हैं ।
- दिए गए प्राप्तांकों को $k_1 \le k_2 \le k_3 \ldots \ldots \le k_n$ इस प्रकार लिखते हैं ।
- सामग्री में प्राप्तांक विषम हों तो $\frac{n+1}{2}$ वीं प्राप्तांक सामग्री की माध्यिका होती है, क्योंकि $k_{\frac{n+1}{2}}$ के पहले $\frac{n-1}{2}$ इतने प्राप्तांक तथा बाद में $\frac{n-1}{2}$ इतने प्राप्तांक होते हैं । n = 2m + 1 लेकर इसकी जाँच कीजिए ।
- सामग्री में प्राप्तांक n यदि सम हो तो सामग्री का माध्य यह माध्य की दो संख्यांओं का औसत होता है । क्योंकि $k_{\frac{n}{2}}$ के पहले तथा $k_{\frac{n+2}{2}}$ के बाद प्रत्येक $\frac{n-2}{2}$ प्राप्तांक होता है । n = 2m लेकर इसकी जाँच कीजिए ।
- अर्थात् $\frac{n}{2}$ वीं संख्या तथा $\frac{n+2}{2}$ वीं संख्या का औसत लेने पर प्राप्त होने वाली संख्या उस सामग्री की माध्यिका होती है ।

उदा. (1) 32, 33, 38, 40, 43, 48, 50 इन प्राप्तांकों में से चौथी संख्या मध्य में आती है, इसलिए दी गई सामग्री की माध्यिका = 40

उदा. (2) 61, 62, 65, 66, 68, 70, 74, 75 में प्राप्तांकों की संख्या 8 अर्थात सम संख्या है, इसलिए चौथी तथा पाँचवीं दो संख्याएँ माध्य में हैं । यह 66 तथा 68 हैं इसलिए दी गई सामग्री की माध्यिका = $\frac{66+68}{2} = 67$

आओ जानें

वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी से माध्यिका (Median group frequency distribution)

प्राप्तांकों की संख्या अधिक होने पर पूर्व उल्लेखित प्रकार से रखने पर माध्यिका ज्ञात करना कठिन होता है, इसलिए अब हम उदाहरण की सहायता से वर्गीकृत बारंबारता बंटन की अनुमानित माध्यिका ज्ञात करने की विधि का अध्ययन करेंगे ।

उदा. 6, 8, 10.4, 11, 15.5, 12, 18 इन प्राप्तांकों की वर्गीकृत सारिणी आगे दी गई है ।

वर्ग	गणनचिह्न	बारंबारता
6-10	II	2
11-15	II	2
16-20	I	1

वर्ग	गणनचिह्न	बारंबारता
5.5-10.5	III	3
10.5-15.5	II	2
15.5-20.5	II	2

पहली सारिणी में 10.4 तथा 15.5 इन दोनों प्राप्तांकों को समाविष्ट नहीं किया गया है क्योंकि यह संख्या 6-10, 11-15, 16-20 इनमें से किसी भी वर्ग में समाविष्ट नहीं होती ।

हम जानते हैं कि ऐसे समय वर्ग सतत किया जाता है ।

इस सारिणी में निम्न वर्ग सीमा 0.5 से कम तथा उच्च वर्ग सीमा 0.5 से अधिक बढ़ाई जाय तो प्राप्त दूसरी बंटन सारिणी बनेगी । यहाँ प्राप्तांक 15.5 वर्ग 15.5 - 20.5 में समाविष्ट होगा ।

ऊपरोक्त सारिणी से ध्यान में आता है कि सतत करने की पद्धति बदलने पर बारंबारता बदल सकती है ।

इसे ध्यान में रखें

ऊपरोक्त सारिणी में वर्ग 6-10 का माध्य = $\frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8$;

इसी प्रकार वर्ग 5.5-10.5 इस वर्ग का माध्य = $\frac{5.5+10.5}{2} = \frac{16}{2} = 8$.

अर्थात वर्ग की रचना अलग पद्धति से की गई तब भी वर्ग मध्य नहीं बदलता, इसे ध्यान में रखें ।

उदाहरण :

कक्षा 10 वीं की अभ्यास परीक्षा में 100 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों की बारंबारता बंटन सारिणी नीचे दी गई है । विद्यार्थियों के प्राप्तांकों की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

परीक्षा में प्राप्त अंक	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
विद्यार्थियों की संख्या	4	20	30	40	6

हल : N = 100

$\frac{N}{2}$ = 50 अर्थात 50 वीं अनुमानित माध्यिका है । हमें इसकी जानकारी प्राप्त करनी है कि इसके लिए 50 वीं संख्या कौन-से वर्ग में आती है । 'उच्च वर्ग सीमा से कम' इस प्रकार की संचयी बारंबारता सारिणी से ज्ञात होगा। इसके लिए हम ऊपर्युक्त बारंबारता सारिणी के आधार पर 'से कम' संचयी बारंबारता बंटन सारिणी बनाएँ ।

वर्ग (विद्‌यार्थियों के प्राप्त गुण)	बारंबारता विद्‌यार्थी संख्या $f\,i$	संचयी बारंबारता (से कम) cf
0-20	4	4
20-40	20	24
40-60	30	54
60-80	40	94
80-100	6	100

सारिणी से -

- $\frac{N}{2}$ = 50 इस क्रमांक का प्राप्तांक 40-60 वर्ग में है । जिस वर्ग में वर्ग माध्यिका आती है, उस वर्ग को माध्यिका वर्ग कहते हैं । वर्ग 40-60 वर्ग माध्यिका है ।
- 40-60 वर्ग की निम्न वर्ग सीमा 40 है तथा बारंबारता 30 है ।
- पहले 50 प्राप्तांकों में से पहले 24 प्राप्तांक 40 से कम हैं । शेष 50-24 = 26 प्राप्तांक वर्ग (40-60) में है । इनमें 50 वें प्राप्तांक का अनुमान इसप्रकार है ।
- इस वर्ग में कुल 30 में से 26 प्राप्तांक 50 वे प्राप्तांक तक हैं तथा वर्गांतर 20 है इसलिए ऐसा माना जाता है कि 50 वाँ प्राप्तांक 40 से $\frac{26}{30} \times 20$ बड़ा है ।

  यह लगभग $40 + \frac{26}{30} \times 20 = 40 + \frac{52}{3} = 57\frac{1}{3}$ है ।

  $\therefore$ माध्यिका $= 57\frac{1}{3}$

- सूत्र के रूप में इसे हम निम्नलिखित प्रकार से लिख सकते हैं ।

$$\text{माध्यिका} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

इस सूत्र में L = माध्यिका वर्ग की निम्न वर्ग सीमा N = कुल बारंबारता

h = माध्यिका वर्ग का वर्गअंतराल, f = माध्यिका वर्ग की बारंबारता

cf = माध्यिका वर्ग के पहले वर्ग की संचयी बारंबारता

ऊपरोक्त उदाहरण में; $\frac{N}{2} = 50$, $cf = 24$, $h = 20$, $f = 30$, $L = 40$,

$$\text{माध्यिका} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{50 - 24}{30}\right) \times 20$$

$$= 40 + \frac{26 \times 20}{30}$$

$$= 40 + 17\frac{1}{3}$$

$$= 57\frac{1}{3}$$

इसे ध्यान में रखें

- माध्यिका ज्ञात करने के लिए दिए गए वर्ग सतत न हों तब उस वर्ग को सतत बनाना होता है।
- प्राप्तांकों की संख्या बहुत अधिक होने पर प्रत्येक प्राप्तांक को आरोही क्रम में लिखना कठिन होता है । इसलिए सामग्री को वर्गीकृत स्वरूप में रखते हैं । ऐसे वर्गीकृत सामग्री की सही माध्यिका ज्ञात करना संभव नहीं होता । किंतु अनुमानित माध्यिका ज्ञात करने के लिए दिए गए सूत्र का उपयोग करते हैं ।

$$\text{माध्यिका} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) सार्वजनिक परिवहन सेवा की 60 बसों द्वारा एक दिन में तय की गई दूरी बारंबारता सारिणी में दी गई है । बस द्वारा एक दिन में तय की गई दूरी की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

तय की गई दैनिक दूरी (किमी)	200-209	210-219	220-229	230-239	240-249
बसों की संख्या	4	14	26	10	6

हल : सारिणी में दिए गए वर्ग सतत नहीं हैं ।

यहाँ किसी वर्ग की उच्च वर्ग सीमा तथा अगले वर्ग की निम्न वर्ग सीमा में अंतर 1 है ।

$\therefore$ 1 ÷ 2 = 0.5 यह मान प्रत्येक वर्ग की निम्न वर्ग सीमा से घटाकर और उच्च वर्ग सीमा में जोड़कर वर्ग सीमा निश्चित करेंगे । इस प्रकार वर्ग को सतत कर नई सारिणी लिखेंगे ।

इसके पश्चात 'से कम' की संचयी बारंबारता स्तंभ बनाएँगे ।

दिया गया वर्ग	सतत किया गया वर्ग	बारंबारता	संचयी बारंबारता (से कम)
200-209	199.5-209.5	4	4
210-219	209.5-219.5	14	18 → cf
220-229	219.5-229.5	26 → f	44
230-239	229.5-239.5	10	54
240-249	239.5-249.5	6	60

कुल बारंबारता = Σf_i = N = 60 $\therefore \frac{N}{2} = 30$ $\therefore$ 30 वाँ प्राप्तांक अनुमानित माध्यिका है।

पहले 18 प्राप्तांक 219.5 से कम तथा शेष 30 - 18 = 12 प्राप्तांक 219.5 - 229.5 वाले वर्ग में हैं । इसलिए यह माध्यिका का वर्ग है ।

219.5 - 229.5 वर्ग की संचयी बारंबारता 44 है ।

सूत्र में

L = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा = 219.5, h = माध्यिका वर्ग का अंतर = 10

cf = माध्यिका वर्ग के पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता = 18

f = माध्यिका वर्ग की बारंबारता = 26

$$\text{माध्यिका} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$\therefore$ माध्यिका $= 219.5 + \left(\frac{30-18}{26}\right) \times 10$

$= 219.50 + \left(\frac{12 \times 10}{26}\right)$

$= 219.5 + 4.62$

$= 224.12$

बसों द्वारा तय की गई दैनिक दूरी की माध्यिका = 224.12 किलोमीटर

उदा.(2) निम्नलिखित सारिणी में एक दिन में एक वस्तुसंग्रहालय में आने वाले व्यक्तियों की आयु दी गई है । इस आधार पर व्यक्तियों की आयु की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

आयु (वर्ष में)	व्यक्तियों की संख्या
10 से कम	3
20 से कम	10
30 से कम	22
40 से कम	40
50 से कम	54
60 से कम	71

हल : सारिणी में 'से कम' संचयी बारंबारता बंटन दिया गया है । सर्वप्रथम इन सभी वर्गों की सही वर्ग सीमा प्राप्त करना होगा । हम जानते हैं कि 'से कम' संचयी बारंबारता वर्ग की उच्च वर्ग सीमा से संबंधित है । पहले वर्ग की उच्च वर्ग सीमा 10 है । किसी भी व्यक्ति की आयु धन संख्या होती है । इसलिए पहला वर्ग 0–10 ऐसा होगा । दूसरे वर्ग की उच्च वर्ग सीमा 20 है इसलिए दूसरा वर्ग 10–20 होगा । इसप्रकार वर्गांतर 10 लेकर क्रम से वर्ग बनाये गए । इसप्रकार अंतिम वर्ग 50–60 हुआ । अतः हमें निम्नलिखित प्रकार से वर्ग लिखने होते हैं ।

आयु (वर्ष)	वर्ग	व्यक्तियों की संख्या बारंबारता	संचयी बारंबारता (से कम)
10 से कम	0–10	3	3
20 से कम	10–20	10 – 3 = 7	10
30 से कम	20–30	22 – 10 = 12	22 $\rightarrow cf$
40 से कम	30–40	40 – 22 = 18 $\rightarrow f$	40
50 से कम	40–50	54 – 40 = 14	54
60 से कम	50–60	71 – 54 = 17	71

यहाँ N = 71 $\therefore \frac{N}{2}$ = 35.5 और h = 10

35.5 यह 30–40 वर्ग में है । इसलिए यह माध्यिका वर्ग है । इसके पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता 22 है अतः cf = 22, L = 30, f = 18

$$\text{माध्यिका} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 30 + (35.5-22)\frac{10}{18}$$

$$= 30 + (13.5)\frac{10}{18}$$

$$= 30 + 7.5$$

$$= 37.5$$

$\therefore$ वस्तुसंग्राहलय में आने वाले व्यक्तियों के आयु की माध्यिका = 37.5 वर्ष

प्रश्नसंग्रह 6.2

1. नीचे दी गई सारिणी में एक सॉफ्टवेअर कंपनी में दैनिक कार्य के घंटों तथा उतनी देर कार्य करने वाले व्यक्तियों की संख्या दी गई है । इस आधार पर कंपनी के कर्मचारियों के दैनिक कार्य के घंटों की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

दैनिक कार्य के घंटे	8–10	10–12	12–14	14–16
कर्मचारियों की संख्या	150	500	300	50

2. किसी आमराई में आम के पेड़ तथा प्रत्येक पेड़ से प्राप्त होने वाले आमों की संख्या का बारंबारता वितरण दिया गया हो तो दी गई सामग्री की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

आम की संख्या	50–100	100–150	150–200	200–250	250–300
पेड़ों की संख्या	33	30	90	80	17

3. मुंबई-पुणे द्रुतगति मार्ग का परिवहन नियंत्रित करने वाली पुलिस चौकी पर किए गए सर्वेक्षण में निम्नलिखित निरीक्षण प्राप्त हुये । दिए गए प्राप्तांकों की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

वाहनों की गति (किमी/घंटा)	60–64	65–69	70–74	75–79	80–84	85–89
वाहनों की संख्या	10	34	55	85	10	6

4. विभिन्न कारखानों में बनने वाले दीयों की संख्या (सारिणी में) दी गई है । इसके आधार पर दीयों के उत्पादन की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

दीयों की संख्या (हजार)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
कारखानों की संख्या	12	35	20	15	8	7	8

आओ जानें

वर्गीकृत बारंबारता बंटन से बहुलक (Mode from grouped frequency distribution)

हम जानते हैं कि दिए गए प्राप्तांकों में अधिक से अधिक बार आने वाला प्राप्तांक ही समूह का बहुलक होता है ।

उदा. कोई दुपहिया वाहन निर्माता कंपनी विभिन्न रंगों में दुपहिया वाहन बनाती है । किस रंग की गाड़ी की पसंद सर्वाधिक है, इसे जानने के लिए उस कंपनी को रंगों के बहुलक को जानना आवश्यक है । इसी प्रकार विभिन्न उत्पाद बनाने वाली किसी कंपनी के लिए यह जानने की आवश्यकता होती है कि किस उत्पाद की माँग सर्वाधिक है । ऐसे समय उस उत्पाद का बहुलक ज्ञात करना होगा ।

हमने देखा है कि अवर्गीकृत बारंबारता सारिणी से बहुलक कैसे ज्ञात करेंगे ।

अब हम इसका अध्ययन करेंगे वर्गीकृत बारंबारता बंटन से बहुलक कैसे ज्ञात करना है ।

इसके लिए दिए गए सूत्र का उपयोग करते हैं ।

$$\text{बहुलक} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

ऊपरोक्त सूत्र में, L = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

f_1 = बहुलक वर्ग कि बारंबारता

f_0 = बहुलक वर्ग के पूर्व वर्ग की बारंबारता

f_2 = बहुलकीय वर्ग के पश्चात वर्ग की बारंबारता

h = बहुलकीय वर्ग का वर्ग अंतराल

इस सूत्र का उपयोग करके अनुमानित बहुलक कैसे प्राप्त करते हैं इसे उदाहरण द्वारा समझेंगे ।

हल किए गए उदाहरण

उदा.(1) दी गई बारंबारता बंटन सारिणी में खेल के मैदान पर खेलने आने वाले लड़कों की संख्या तथा उनका आयु गट दिया गया है । खेल के मैदान पर खेलने वाले लड़कों की आयु का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

लड़कों का आयु गट(वर्ष में)	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
लड़कों की संख्या	43	$58 \rightarrow f_0$	$70 \rightarrow f_1$	$42 \rightarrow f_2$	27

ऊपरोक्त सारिणी से यह ध्यान आता है कि 10-12 आयु गट के लड़कों की संख्या सर्वाधिक है। अर्थात 10 -12 यह बहुलक वर्ग है ।

हल : f_1 = 70, और वर्ग 10-12 बहुलक वर्ग है ।

∴ दिए गए उदाहरण में,

L = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा = 10

h = बहुलक वर्ग का वर्ग अंतराल = 2

f_1 = बहुलक वर्ग की बारंबारता = 70

f_0 = बहुलक वर्ग के पूर्व वर्ग की बारंबारता = 58

f_2 = बहुलक वर्ग के बाद आने वाले वर्ग की बारंबारता = 42

बहुलक = $L + \left[\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$= 10 + \left[\dfrac{70-58}{2(70)-58-42}\right] \times 2$

$= 10 + \left[\dfrac{12}{140-100}\right] \times 2$

$= 10 + \left[\dfrac{12}{40}\right] \times 2$

$= 10 + \dfrac{24}{40}$

$= 10 + 0.6$

$= 10.6$

∴ खेल के मैदान पर खेलने वाले लड़कों की आयु का बहुलक = 10.6 वर्ष है ।

उदा. (2) नीचे दी गई बारंबारता बंटन सारिणी में एक पेट्रोल पंप पर पेट्रोल भरवाने वाले वाहनों की संख्या और वाहनों में भरे गए पेट्रोल की मात्रा की जानकारी दी गई है । इससे वाहनों में भरे गए पेट्रोल के आयतन का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

भरा गया पेट्रोल (लीटर में)	1-3	4-6	7-9	10-12	13-15
वाहनों की संख्या	33	40	27	18	12

हल : दिया गया वर्ग सतत नहीं है । इसलिए इसे सतत करके बारंबारता बनाते हैं ।

वर्ग	वास्तविक वर्ग सीमा	बारंबारता
1-3	0.5-3.5	33 $\rightarrow f_0$
4-6	3.5-6.5	40 $\rightarrow f_1$
7-9	6.5-9.5	27 $\rightarrow f_2$
10-12	9.5-12.5	18
13-15	12.5-15.5	12

f_1 = बहुलक वर्ग की बारंबारता = 40, बहुलक वर्ग 3.5-6.5

बहुलक = $L+\left[\dfrac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\right] \times h$

बहुलक = $3.5 + \left[\dfrac{40-33}{2(40)-33-27}\right] \times h$

$= 3.5 + \left[\dfrac{7}{80-60}\right] \times 3$

$= 3.5 + \dfrac{21}{20}$

$= 3.5 + 1.05$

$= 4.55$

$\therefore$ वाहनों में भरे गए पेट्रोल के आयतन का बहुलक = 4.55 लीटर

प्रश्नसंग्रह 6.3

1. किसी दूध संकलन केंद्र में किसानों की ओर से संकलित किए गए दूध तथा लैक्टोमीटर से मापे गए दूध में वसा (स्निग्धांश) की मात्रा दी गई है । इससे दूध में वसा की मात्रा का बहुलक ज्ञात कीजिए।

दूध में वसा (%)	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
संकलित दूध (लीटर में)	30	70	80	60	20

2. कुछ परिवारों के मासिक विद्‌युत उपभोग की वर्गीकृत बारंबारता सारणी नीचे दी गई है । इस आधार पर विद्‌युत उपभोग करने वाले परिवारों का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

विद्‌युत उपभोग (युनिट)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
परिवारों की संख्या	13	50	70	100	80	17

3. 100 होटलों में चाय बनाने के लिए आपूर्ति किया गया दूध तथा होटलों की संख्या की वर्गीकृत बारंबारताा सारिणी दी गई है, इससे आपूर्ति किए गए दूध का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

दूध (लीटर)	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
होटलों की संख्या	7	5	15	20	35	18

4. किसी सप्ताह में 200 मरीजों की आयु और उपचार लेने वाले मरीजों की संख्या निम्नलिखित बारंबारता बंटन सारिणी में दी गई है । इसके आधार पर मरीजों की आयु का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

आयु (वर्ष)	5 से कम	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29
मरीजों की संख्या	38	32	50	36	24	20

कृति :-

- अपनी कक्षा के 20 लड़कों के वजन का माध्य ज्ञात कीजिए ।
- अपनी कक्षा के लड़कों के शर्ट के माप का बहुलक ज्ञात कीजिए ।
- कक्षा का प्रत्येक विद्‌यार्थी अपनी नाड़ी का एक मिनट में होने वाला स्पंदन गिने तथा उसे कॉपी में दर्ज कीजिए । इससे सारिणी बनाइए तथा इसके आधार पर नाड़ी के स्पंदन का बहुलक ज्ञात कीजिए ।
- कक्षा के प्रत्येक विद्‌यार्थी की ऊँचाई को दर्ज कीजिए, उस ऊँचाई का वर्गीकरण कीजिए तथा उसकी माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

इसे ध्यान में रखें

हमने केंद्रीय प्रवृत्ति के माध्य, माध्यिका तथा बहुलक इन परिणामों का अध्ययन किया है । केंद्रीय प्रवृत्ति के किस परिमाण का चयन करना है, इसे निश्चित करने के लिए हमें उद्देश्य की स्पष्ट रूप से जानकारी होनी आवश्यक है ।

माना किसी विद्यालय में 10 वीं के पाँच वर्गों में से कौन-सा वर्ग अंतर्गत परीक्षा में अधिक अच्छा है, यह निश्चित करने के लिए उन पाँचों वर्गों की अंतर्गत परीक्षा के अंकों का 'माध्य' ज्ञात करना होगा ।

किसी कक्षा के विद्यार्थियों के परीक्षा में प्राप्त अंकों के दो समूह करना हो तो उस कक्षा के विद्यार्थियों के प्राप्तांकों की 'माध्यिका' इस परिमाण को चुनना होगा ।

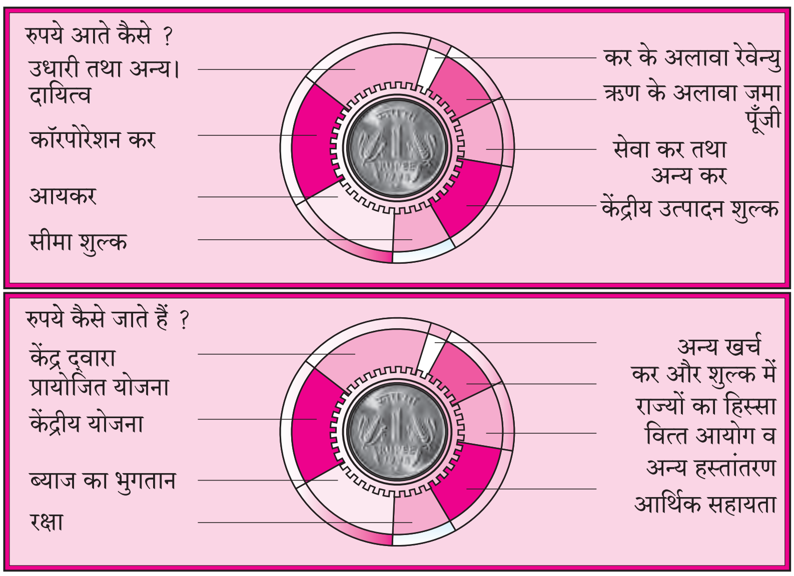
खड़िया बनानेवाले किसी बचत समूह को यदि यह ज्ञात करना हो कि किन रंगों के खड़ियों की माँग सर्वाधिक है तो केंद्रीय प्रवृत्ति 'बहुलक' परिमाण को चुनना होगा ।

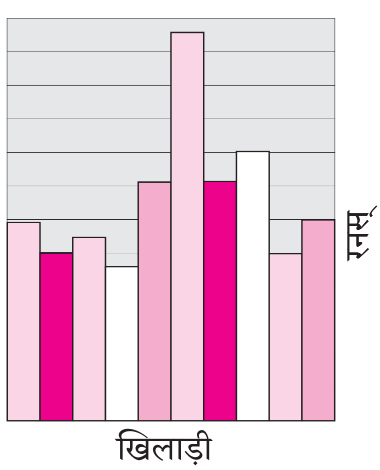
सांख्यिकीय आँकड़े का चित्ररूप प्रतिरूपण (Pictorial representation of statistical data)

सांख्यिकीय जानकारियों का माध्य, माध्यिका, बहुलक के आधार पर या जानकारियों का विश्लेषण कर उसका उपयोग कुछ विशिष्ट निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए होता है ।

हम जानते हैं, सांख्यिकीय जानकारी को संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत करने की पद्धति अर्थात सारिणी के रूप में सामग्री को रखना । किंतु सारिणी के रूप में होने के कारण कुछ मुद्दे तुरंत ध्यान में नहीं आते हैं । इसे सामान्य व्यक्तियों को समझने के लिए अर्थात सर्वसामान्य लोगों का ध्यान सामग्री के महत्वपूर्ण मुद्दों की ओर आकर्षित करने के लिए, उस जानकारी का प्रस्तुतीकरण अलग तरह से करना होगा इस पर विचार करें ।

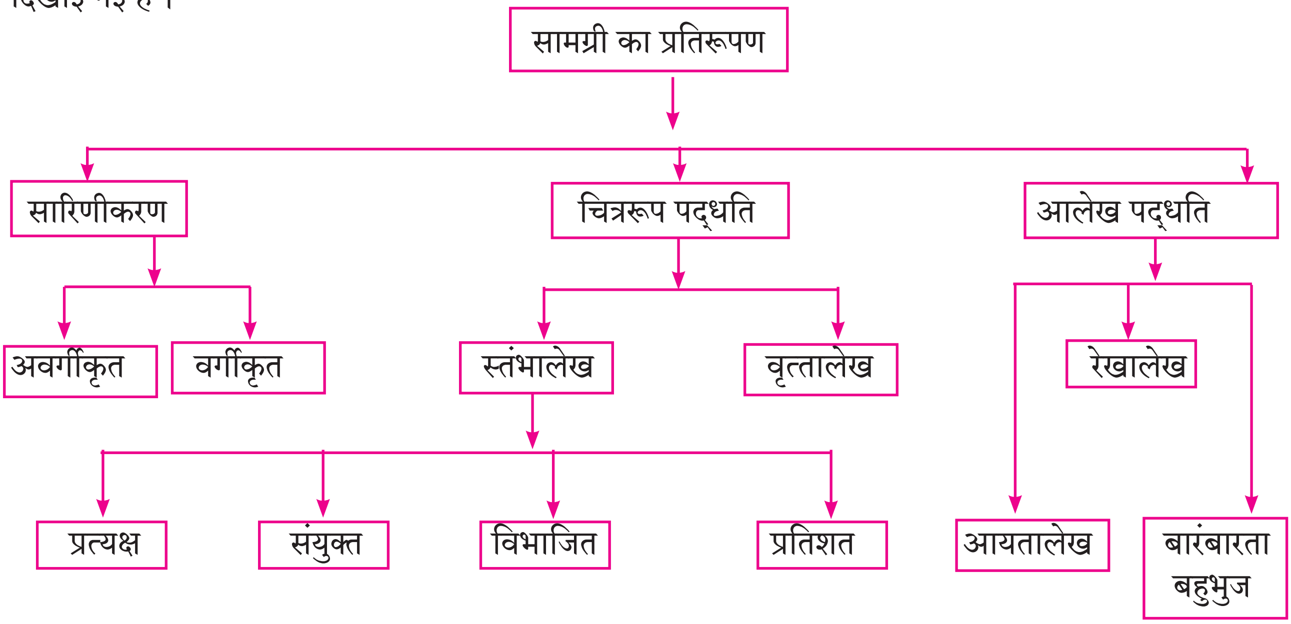
उदाहरण के लिए अर्थनियोजन के मुद्दे, खेलों की जानकारी इत्यादि ।





सामग्री का प्रतिरूपण (Presentation of Data)

चित्ररूप तथा आलेख स्वरूप में प्रतिरूपण यह सामग्री का अर्थ स्पष्ट करने और ध्यान आकर्षित करने का एक प्रकार है । सामग्री के प्रतिरूपणों का विभिन्न प्रकार के पद्धति को दर्शानेवाली शाखाकृति (Tree chart) नीचे दिखाई गई है ।



पिछली कक्षा में हमने इनमें से कुछ पद्धतियों तथा आलेखों का अध्ययन किया है । अब हम आयतालेख, बारंबारता बहुभुज तथा वृत्तालेख की सहायता से सामग्री का प्रतिरूपण कैसे करें यह देखेंगे ।

फ्लॉरेन्स नाइटिंगेल (1820-1910) इस महान महिला को उत्कृष्ट तथा ध्येयनिष्ठ परिचारिका (नर्स) के रूप में पहचाना जाता है । क्रीमियन युद्ध में जख्मी सैनिकों की सेवा कर उन्होंने अनेकों के प्राण बचाए । संख्याशास्त्र में फ्लॉरेन्स नाईटिंगेल ने अद्भुत काम किया है। अनेक सैनिकों की अवस्था, उनका उपचार तथा उनका उपयोग इन सभी को ठीक तरह से दर्ज कर उन्होंने महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकाले । सैनिकों की मृत्यु उनके जख्मों की अपेक्षा, टायफॉइड, कॉलरा जैसे रोगों (बीमारी) के कारण अधिक होती थी । आसपास की अस्वच्छता, अस्वच्छ पानी तथा मरीजों के रहन-सहन (सघन निवास) के कारण यह बीमारियाँ फैलती थीं । इन कारणों को तुरंत ध्यान में लाने के लिए उन्होंने पायचार्ट जैसे आलेख बनाए । उचित उपचार और स्वच्छता के नियम का पालन कराकर उन्होंने सैनिकों की मृत्यु दर में हुई कमी को दिखाया । शहरी स्वास्थ्य ठीक रखने के लिए उचित तरीके से मल निस्सारण करने वाली नालियाँ और सभी को स्वच्छ/शुद्ध पीने का पानी आवश्यक है, उनका यह अवलोकन (निरीक्षण) नगरपालिका को पसंद आया । उनके कार्य में अनेक निरीक्षणों का व्यवस्थित रूप में किया लेखन, सांख्यिकी के आधार पर विश्वसनीय निष्कर्ष प्राप्त करने में मदद करता है, आपके कार्यों में भी यह दिखता है ।

आओ जानें

आयतालेख : Histogram

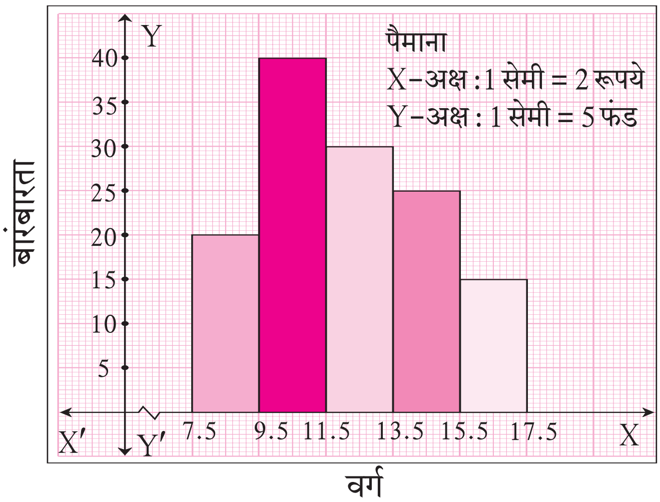
आयतालेख व इसे ज्ञात करने की पद्धति हम एक उदाहरण से समझेंगे ।

उदा : नीचे सारिणी में विभिन्न कंपनी के म्युच्यअल फंडों के एक युनिट का कुल संपत्ति का मूल्य (Net asset-value) दिया गया है । इसके आधार पर आयतालेख खींचिए ।

कुल संपत्ति का मूल्य (रूपये में) (NAV)	8-9	10-11	12-13	14-15	16-17
म्युच्युअल फंड की संख्या	20	40	30	25	15

हल : ऊपरोक्त सारिणी के लिए वर्ग सतत नहीं है । सर्वप्रथम इन्हें सतत कर लें ।

विस्तारित वर्ग (रुपयों में)	7.5-9.5	9.5-11.5	11.5-13.5	13.5-15.5	15.5-17.5
बारंबारता	20	40	30	25	15



आकृति 6.1

आयतालेख बनाने की कृति

1. वर्ग सतत न हो तो उसे सतत कीजिए । ऐसे वर्ग को विस्तारित (सतत) वर्ग (extended class intervals) कहते हैं ।
2. यह विस्तारित वर्ग X- अक्ष पर उचित पैमाना लेकर दर्शाइए ।
3. Y- अक्ष पर बारंबारता उचित पैमाना लेकर दर्शाइए ।
4. X- अक्ष पर प्रत्येक विस्तारित (सतत) वर्ग को आधार लेकर उसपर आयत खींचिए । आयत की ऊँचाई संगत बारंबारता के बराबर लीजिए ।

ध्यान रखें :

X-अक्ष पर आरंभ बिंदु और पहले वर्ग में '—⋀—' ऐसा चिह्न है । (इस चिह्न को अक्ष संकोच, krink mark, कहते हैं ।) इसका अर्थ है कि, आरंभ बिंदु से पहले वर्ग तक किसी भी तरह का निरीक्षण नहीं है । इसलिए X- अक्ष की मुड़ी हुई रेखा यह चिह्न है । आवश्यक हो तब ही Y- अक्ष पर इस चिह्न का उपयोग करते हैं । इससे उचित आकार का आलेख खींचा जा सकता है ।

प्रश्नसंग्रह 6.4

1. दी गई सामग्री (आँकड़ों) को दर्शानेवाला आयतालेख खींचिए ।

विद्यार्थियों की ऊँचाई (सेमी)	135-140	140-145	145-150	150-155
विद्यार्थियों की संख्या	4	12	16	8

2. दी गई सारिणी में ज्वार का उत्पादन प्रति एकड़ के अनुसार दिया गया है । उसे दर्शाने वाला आयतालेख खींचिए ।

प्रति एकड़ उत्पादन (क्विंटल)	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11
किसानों की संख्या	30	50	55	40	20

3. नीचे दी गई सारिणी में 210 परिवारों का वार्षिक निवेश दिया गया है । इसे दर्शाने वाला आयतालेख खींचिए ।

निवेश (हजार रुपयों में)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
परिवारों की संख्या	30	50	60	55	15

4. निम्नलिखित सारिणी में विद्यार्थियों द्वारा परीक्षा की तैयारी हेतु समय दिया गया है । इसे दर्शाने वाला आयतालेख खींचिए।

समय (मिनिटों में)	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160
विद्यार्थी संख्या	14	20	24	22	16

आओ जानें

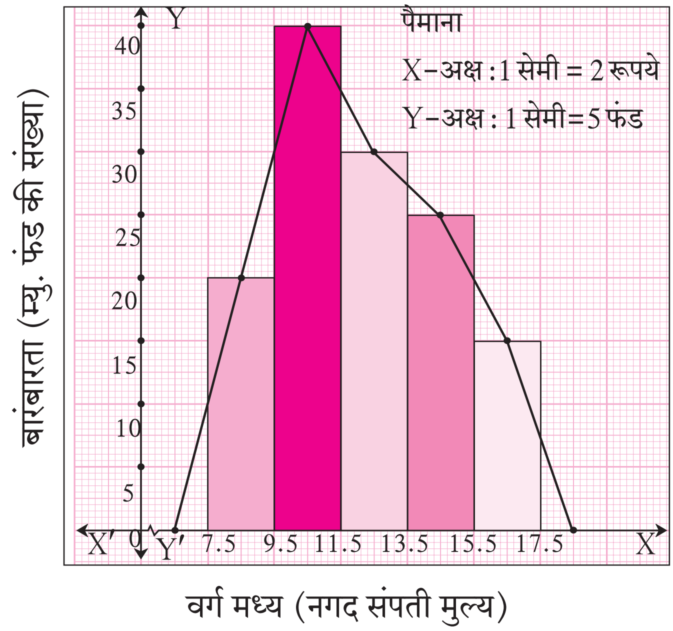
बारंबारता बहुभुज (Frequency polygon)

बारंबारता सारिणी में जानकारी को भिन्न प्रकार से दर्शाया जाता है । हमने आयतालेख का अध्ययन किया है । इसका दूसरा प्रकार 'बारंबारता बहुभुज' है ।

बारंबारता बहुभुज खींचने के लिए दो पद्धतियाँ हैं :-

(1) आयतालेख का उपयोग करके ।   (2) आयतालेख का उपयोग न करते हुए ।

(1) आयतालेख की सहायता से बारंबारता बहुभुज खींचनें की विधि समझने के लिए हम आकृति 6.1 में दिखाए अनुसार आयतालेख का ही उपयोग करेंगे ।



आकृति 6.2

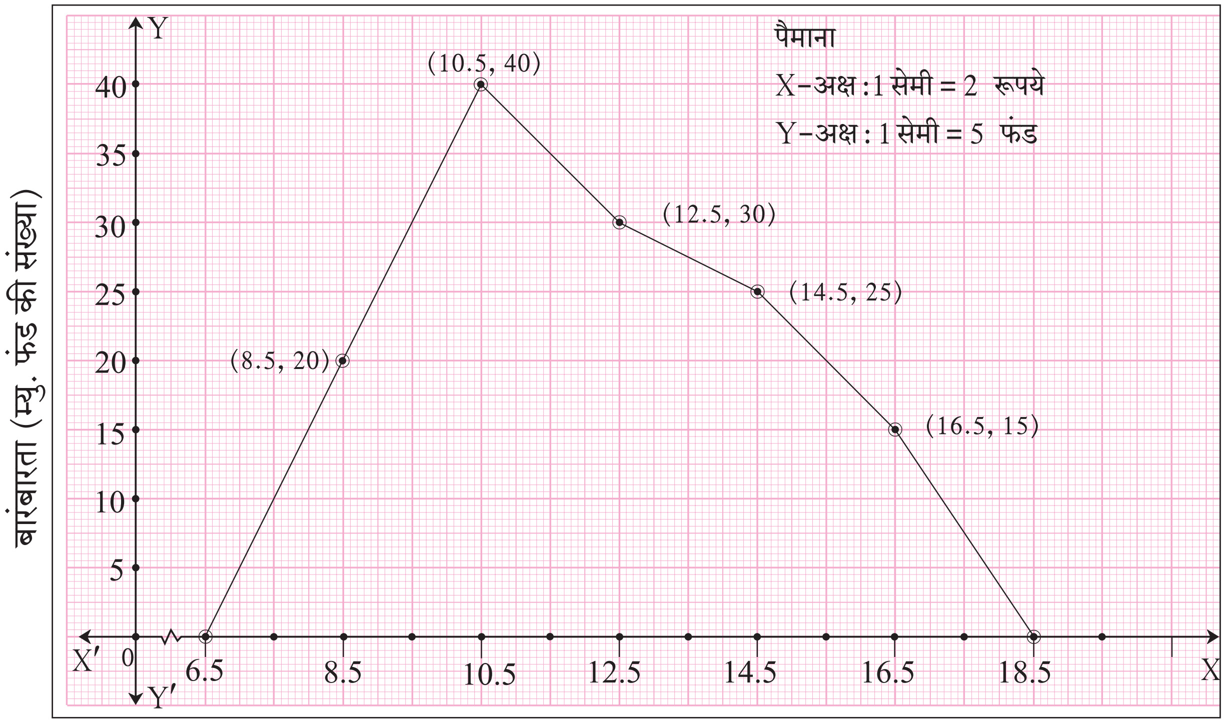
1. आयतालेख में प्रत्येक आयत के ऊपरी भुजा का मध्यबिंदु दर्शाइए ।
2. माना पहले आयत के पहले शून्य ऊँचाई का आयत है तथा उसका मध्यबिंदु दर्शाइए । इसी प्रकार अंतिम आयत के बाद एक शून्य ऊँचाई का आयत मान कर उसके भी मध्यबिंदु पर चिह्न अंकित करें । बिंदु X- अक्ष पर मिलाइए ।
3. सभी मध्यबिंदु को क्रम से सरल रेखा में मिलाइए ।

प्राप्त बंद आकृति ही बारंबारता बहुभुज होती है ।

(2) आयतालेख न बनाते हुए बारंबारता बहुभुज खींचने (बनाने) के लिए बिंदु का निर्देशांक कैसे निश्चित करते हैं इसे निम्नलिखित सारिणी से समझेंगे ।

वर्ग	सतत वर्ग	वर्ग मध्य	बारंबारता	बिंदु के निर्देशांक
6 - 7	5.5 - 7.5	6.5	0	(6.5, 0)
8 - 9	7.5 - 9.5	8.5	20	(8.5, 20)
10 - 11	9.5 - 11.5	10.5	40	(10.5, 40)
12 -13	11.5 - 13.5	12.5	30	(12.5, 30)
14 - 15	13.5 - 15.5	14.5	25	(14.5, 25)
16 - 17	15.5 - 17.5	16.5	15	(16.5, 15)
18 - 19	17.5 - 19.5	18.5	0	(18.5, 0)

सारिणी में पाचवें स्तंभ में निर्देशांक के संगत बिंदु आलेख कागज पर स्थापित करते हैं । उसे क्रम से मिलाने पर बारंबारता बहुभुज प्राप्त होता है । यह बहुभुज आकृति 6.3 में दिखाया गया है । उसका अवलोकन कीजिए ।



वर्ग मध्य (नगद संपत्ति मूल्य)

आकृति 6.3

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) संलग्न आकृति में दर्शाएनुसार बारंबारता बहुभुज के आधार पर दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

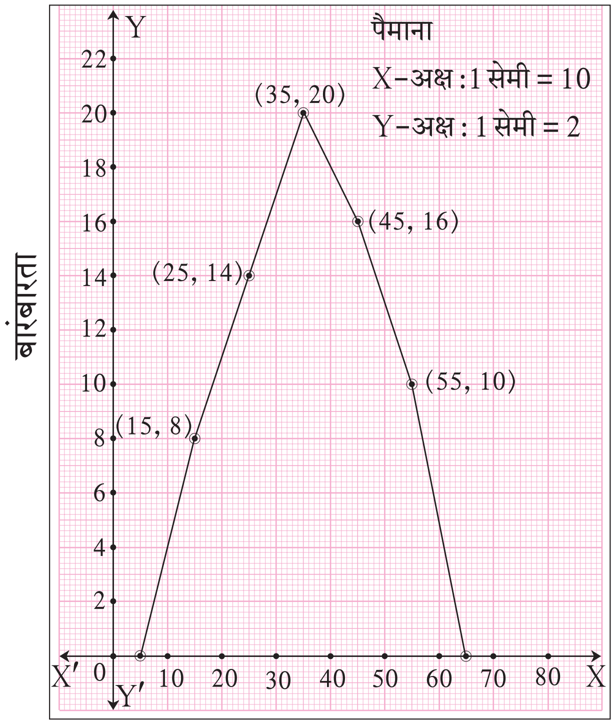
(1) 50-60 वर्ग की बारंबारता लिखिए ।

(2) जिस वर्ग की बारंबारता 14 है ऐसा वर्ग लिखिए ।

(3) ऐसा वर्ग जिसका वर्ग मध्य 55 है लिखिए ।

(4) सबसे अधिक बारंबारतावाला वर्ग लिखिए ।

(5) शून्य बारंबारतावाला वर्ग लिखिए ।



वर्ग

आकृति 6.4

हल :

(1) वर्ग मध्य X-अक्ष पर दिखाया गया है । X-निर्देशांक 55 वाले बिंदु का (50-60 का वर्ग मध्य 55 है) Y- निर्देशांक 10 है । इसलिए 50-60 इस वर्ग की बारंबारता 10 है ।

(2) Y-अक्ष पर बारंबारता दिखाया गया है । Y-निर्देशांक 14 वाले बिंदु का X-निर्देशांक 25 है । Y-अक्ष पर 14 बारंबारता वाले चिह्न को देखिए । 20-30 वर्ग का वर्ग मध्य 25 है । इसलिए बारंबारता 14 वाला वर्ग 20-30 है ।

(3) 55 यह वर्ग मध्य 55-60 वर्ग में है ।

(4) बारंबारता Y-अक्ष पर दर्शाई गई है । बहुभुज पर Y-निर्देशांक का सर्वाधिक मान 20 है । उसके संगत X-निर्देशांक 35 है । वर्ग मध्य 35 वाला वर्ग 30-40 है । इसलिए 30-40 इस वर्ग की बारंबारता सबसे अधिक है ।

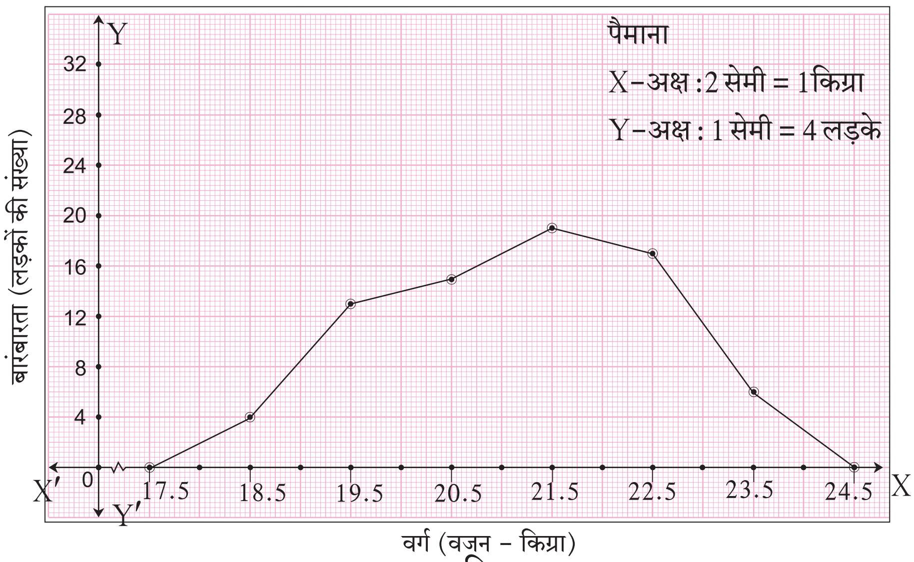
(5) शून्य बारंबारतावाला वर्ग 0-10 और 60-70 है ।

उदा. (2) नीचे सारिणी में लड़कों का वजन तथा उनकी संख्या दी गई है इसके आधारपर बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

लड़कों का वजन (किग्रा)	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
लड़कों की संख्या	4	13	15	19	17	6

बारंबारता बहुभुज खींचने के लिए आवश्यक बिंदु के साथ निम्नलिखित सारिणी बनाइए तथा बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

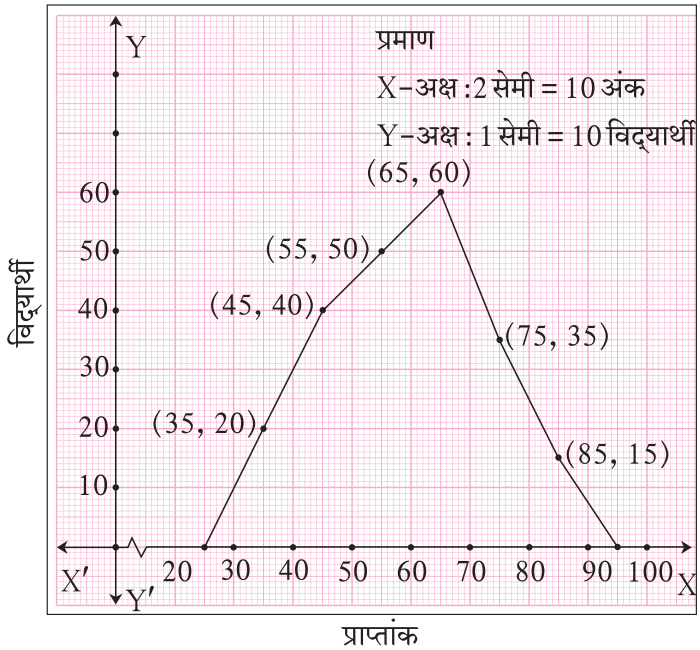
वर्ग	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
वर्ग मध्य	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5
बारंबारता	4	13	15	19	17	6
बिंदु के निर्देशांक	(18.5, 4)	(19.5,13)	(20.5,15)	(21.5,19)	(22.5,17)	(23.5,6)



आकृति 6.5

प्रश्नसंग्रह 6.5

1. निम्नलिखित आकृति में बहुभुज का निरीक्षण कर दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।



आकृति 6.6

(1) सबसे अधिक विद्यार्थी किस वर्ग में हैं ?

(2) शून्य बारंबारता वाला वर्ग लिखिए ।

(3) 50 विद्यार्थियों वाले वर्ग का वर्ग मध्य कितना है ?

(4) वर्ग मध्य 85 वाले वर्ग की निम्न वर्ग सीमा और उच्च वर्ग सीमा लिखिए ।

(5) 80-90 अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी कितने हैं ?

2. निम्नलिखित सामग्री के लिए बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

विद्युत बिल (रुपयों में)	0-200	200-400	400-600	600-800	800-1000
परिवार	240	300	450	350	160

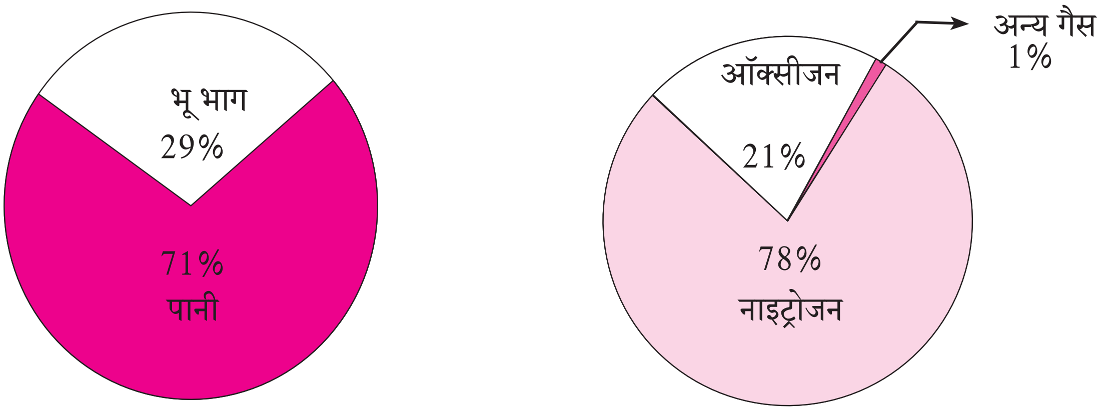
3. किसी परीक्षा के परिणाम के प्रतिशत का वर्ग और उस वर्ग वाले विद्यार्थियों की संख्या निम्नलिखित सारिणी में दी गई है । इस सारिणी के आधार पर बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

परिणाम (प्रतिशत)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
विद्यार्थियों की संख्या	7	33	45	65	47	18	5

थोड़ा याद करें

वृत्तालेख (Pie diagram)

हमने पिछली कक्षा में भूगोल तथा विज्ञान विषयों की पुस्तकों में नीचे दिए गए आलेख देखे हैं । ऐसे आलेख को वृत्तालेख कहते हैं ।



पृथ्वी पर भू भाग तथा पानी का अनुपात

हवा में विभिन्न घटकों का अनुपात

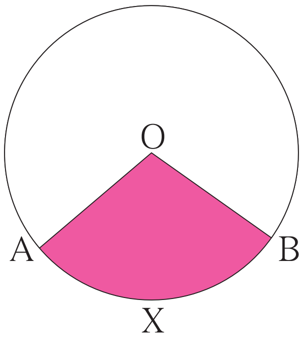
आकृति 6.7

वृत्तालेख में सांख्यिकीय सामग्री संपूर्ण वृत्त में दर्शाई जाती है। सामग्री के विभिन्न घटक निश्चित अनुपात में उस वृत्त के द्वैत्रिज्य के रूप में दर्शाए जाते हैं ।

आकृति 6.8 में O केंद्रवाले वृत्त में OA तथा OB त्रिज्या है ।

$\angle$ AOB केंद्रीय कोण हैं ।

O-AXB यह छायांकित भाग अर्थात द्वैत्रिज्य (sector of a circle) है ।



आकृति 6.8

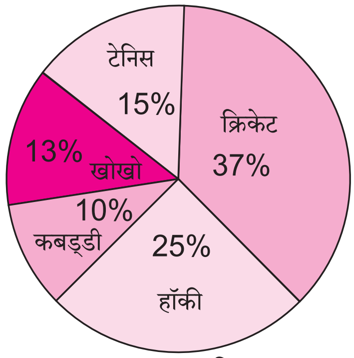
आओ जानें

वृत्तालेख का वाचन Reading of Pie diagram

वृत्तालेख को देखते ही जानकारी कैसे प्राप्त होती है यह दिए गए उदाहरण से समझें ।

कक्षा 10 वीं के 120 छात्रों से 'आपका पसंदीदा खेल' कौन-सा है ? यह प्रश्न पूछा गया ।

प्राप्त उत्तर (जानकारी) वृत्तालेख में दर्शाई गई है । सर्वाधिक पसंदीदा खेल कौन-सा है ? कितने प्रतिशत छात्रों को खो-खो पसंद है ? कबड्डी को पसंद करने वाले लड़के कितने प्रतिशत हैं ?



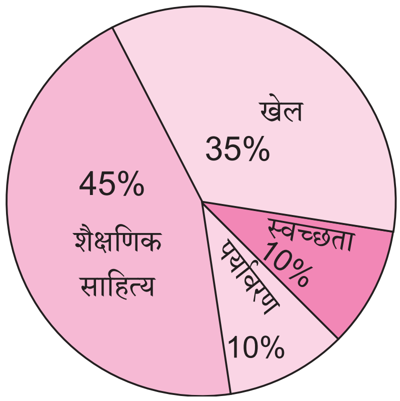
आकृति 6.9

इसप्रकार के प्रश्नों के उत्तर हमें एक दृष्टि में इस वृत्तालेख से मिल जाते हैं ।

एक और वृत्तालेख देखिए ।

संलग्न आकृति में वृत्तालेख किसी विद्यालय के वार्षिक आर्थिक नियोजन (बजट) का है । इस वृत्तालेख से हमें यह समझ में आता है कि-

- 45% राशि शैक्षणिक साहित्य के लिए सुरक्षित है ।
- खेल सामग्री के लिए 35% राशि दी गई है ।
- स्वच्छता की सामग्री के लिए 10% राशि रखी गई है ।
- पर्यावरण की सुरक्षा के लिए 10% राशि रखी गई है।



आकृति 6.10

इसप्रकार की जानकारी वृत्तालेख से हमें एक ही दृष्टि डालने पर मिलती है ।

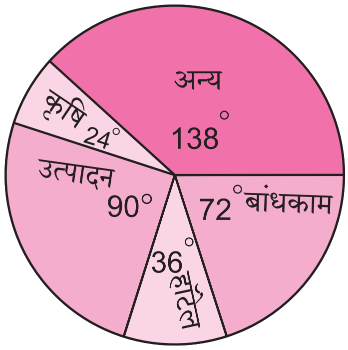
अब हम वृत्तालेख की अधिक जानकारी प्राप्त करेंगे ।

कई बार वृत्तालेख द्वारा दी गई विभिन्न जानकारी हम समाचारपत्रों में देखते हैं, जैसे वार्षिक बजट, ओलंपिक स्पर्धा में विभिन्न देशों का प्रदर्शन, देश में पैसा कैसे आता है और कैसे जाता है आदि ।

इसके लिए हमें वृत्तालेख जानकारी कैसे ज्ञात करनी है, इसे एक उदाहरण से समझेंगे ।

नमूना उदाहरण :

किसी सर्वेक्षण में प्राप्त कार्यकुशल व्यक्तियों का वर्गीकरण वृत्तालेख में दिखाया गया है । यदि उत्पादन क्षेत्र में कार्यरत व्यक्ति 4500 हों तो दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।



आकृति 6.11

(i) सभी क्षेत्रों के कुल कार्यकुशल व्यक्ति कितने हैं ?

(ii) निर्माण कार्य के क्षेत्र में कार्यकुशल व्यक्तियों की संख्या कितनी होगी ?

(iii) कृषी क्षेत्र में कार्यकुशल व्यक्तियों की संख्या कितनी है ?

(iv) उत्पादन व निर्माण कार्य क्षेत्र में कुशल व्यक्तियों की संख्या में अंतर कितना है ?

हल : (i) माना कि सभी क्षेत्रों के कार्य में कुशल कुल व्यक्तियों की संख्या x है ।

$\therefore$ x व्यक्तियों के लिए केंद्रीय कोण = 360°

उत्पादन के क्षेत्र में कार्यकुशल व्यक्तियों के लिए केंद्रीय कोण = $\dfrac{\text{उत्पादन क्षेत्रवाले व्यक्ति}}{\text{कुल व्यक्ति}} \times 360$

$$90 = \frac{4500}{x} \times 360$$

$$\therefore x = 18000$$

$\therefore$ सभी क्षेत्रों के कार्यकुशल व्यक्ति = 18000.

(ii) निर्माणकार्य के लिए केंद्रीय कोण 72° दिखाया गया है ।

$$72 = \frac{\text{निर्माण कार्य क्षेत्रवाले व्यक्ति}}{18000} \times 360$$

$\therefore$ निर्माण कार्य क्षेत्रवाले व्यक्ति $= \dfrac{72 \times 18000}{360}$

$= 3600$

(iii) कृषि क्षेत्र के लिए केंद्रीय कोण = 24° है ।

$$24 = \frac{\text{कृषि क्षेत्रवाले व्यक्ति}}{\text{कार्य में कुशल कुल व्यक्ति}} \times 360$$

$$24 = \frac{\text{कृषि क्षेत्रवाले व्यक्ति}}{18000} \times 360$$

$\therefore$ कृषि क्षेत्रवाले व्यक्ति $= \dfrac{24 \times 18000}{360}$

$= 1200$

(iv) उत्पादन तथा निर्माण कार्य क्षेत्रों के केंद्रीय कोण में अंतर = $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$ ।

$$\therefore \text{ केंद्रीय कोण में अंतर} = \frac{\text{दो क्षेत्रों के व्यक्तियों की संख्या में अंतर}}{\text{कार्य में कुशल कुल व्यक्ति}} \times 360$$

$$18 = \frac{\text{दो क्षेत्रों के व्यक्तियों की संख्या में अंतर}}{18000} \times 360$$

$$\text{उत्पादन तथा निर्माण कार्य क्षेत्रों में कुशल व्यक्तियों की संख्या में अंतर} = \frac{18 \times 18000}{360}$$

$$= 900$$

इसे ध्यान में रखें

- सामग्री के प्रत्येक घटक उससे संबंधित द्वैत्रिज्य में दिखाए जाते हैं ।
- द्वैत्रिज्य के केंद्रीय कोण का माप उस विशिष्ट घटकों की संख्या के अनुपात में होता है ।
- केंद्रीय कोण का माप $(\theta) = \dfrac{\text{संबंधित घटकों की संख्या}}{\text{कुल घटकों की संख्या}} \times 360$
- उचित त्रिज्या का वृत्त खींचिए । प्रत्येक घटक की संख्या के अनुपात में केंद्रीय कोण लेकर द्वैत्रिज्य में विभाजन किया जाता है ।

आओ जानें

वृत्तालेख बनाना (To draw Pie diagram)

हमने दिए गए वृत्तलेख से जानकारी का वाचन करना देखा है । अब वृत्तालेख कैसे बनाया जाता है, यह देखेंगे ।

1. वृत्तालेख बनाते समय संपूर्ण वृत्त को निश्चित अनुपात में विभाजित करके द्वैत्रिज्य की रचना करते हैं ।
2. प्रत्येक घटक से संबंधित द्वैत्रिज्य के केंद्रीय कोण का माप नीचे दिए गए सूत्र से ज्ञात कीजिए ।

$$\text{द्वैत्रिज्य के केंद्रीय कोण का माप } \theta = \frac{\text{उस घटक की संख्या}}{\text{सभी घटकों की कुल संख्या}} \times 360$$

उचित त्रिज्यावाला वृत्त खींचकर सामग्री में जितने घटक हैं उतने ही द्वैत्रिज्यों में वृत्त को विभाजित करते हैं ।

वृत्तालेख बनाने की कृति नीचे दिए गए उदाहरण से समझेंगे ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) किसी दुकान में दुपहिया वाहन खरीदने के लिए रंगों की पसंद दी गई है । यह जानकारी वृत्तालेख में दर्शाने के लिए प्रत्येक घटक दर्शाने वाले द्‌वैत्रिज्य के केंद्रीय कोण का माप निश्चित कीजिए ।

हल : दुपहिया वाहन की कुल माँग 36 है । इनमें से 10 वाहन सफेद रंग के हैं ।

∴ सफेद रंग वाले दुपहिया वाहन दर्शाने वाले द्‌वैत्रिज्य के केंद्रीय कोण का माप

$$= \frac{\text{सफेद रंगवाली दुपहिया वाहनों की संख्या}}{\text{दुपहिया वाहन की कुल संख्या}} \times 360$$

$$= \frac{10}{36} \times 360 = 100$$

इसप्रकार अन्य रंगोवाले दुपहिया वाहनों की संगत द्‌वैत्रिज्य के केंद्रीय कोण का माप ज्ञात कर सारिणी में दर्शाई गई है ।

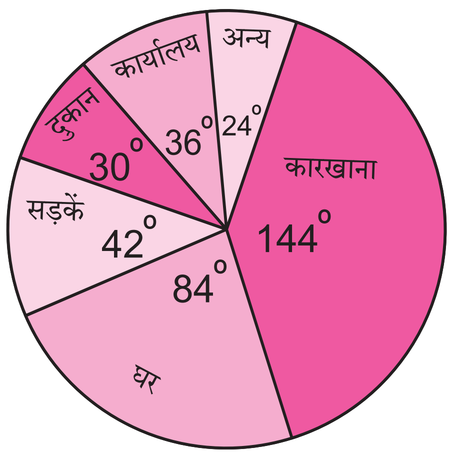
रंग	दुपहियों की माँग	द्‌वैत्रिज्य का केंद्रीय कोण
सफेद	10	$\frac{10}{36} \times 360^\circ = 100^\circ$
काला	9	$\frac{9}{36} \times 360^\circ = 90^\circ$
नीला	6	60°
भूरा	7	70°
लाल	4	40°
कुल	36	360°

उदा (2) किसी गाँव में विविध स्थानों की प्रतिदिन विद्‌युत आपूर्ति निम्नलिखित सारिणी में दर्शाई गई है । इस जानकारी के आधार पर वृत्तालेख खींचिए ।

स्थान	कारखाना	घर	सड़कें	दुकान	कार्यालय	अन्य
विद्‌युत आपूर्ति (हजार इकाई)	24	14	7	5	6	4

हल : कुल विद्‌युत आपूर्ति 60 हजार इकाई है । इससे केंद्रीय कोणों के माप ज्ञात कर सारिणी में दिखाएँगे ।

विद्‌युत आपूर्ति	यूनिटस्	केंद्रीय कोण का माप
कारखाना	24	$\frac{24}{60} \times 360 = 144^\circ$
घर	14	$\frac{14}{60} \times 360 = 84^\circ$
सड़कें	7	$\frac{7}{60} \times 360 = 42^\circ$
दुकान	5	$\frac{5}{60} \times 360 = 30^\circ$
कार्यालय	6	$\frac{6}{60} \times 360 = 36^\circ$
अन्य	4	$\frac{4}{60} \times 360 = 24^\circ$
कुल	60	360°



आकृति 6.12

वृत्तालेख बनाने के सोपान –

(1) सर्वप्रथम आकृति के अनुसार वृत्त बनाकर एक त्रिज्या खींचे । बाद में सारिणी से प्राप्त किए गए केंद्रीय कोण के माप के द्‌वैत्रिज्य, एक के बाद एक (144°, 84°, 42°, 30°, 36°, तथा 24°) घड़ी की सुई की दिशा में बनाए । (द्‌वैत्रिज्य एक ही दिशा में एक के बाद एक खींचते समय उसके क्रम में परिवर्तन का कोई असर नहीं होता ।)

(2) प्रत्येक द्‌वैत्रिज्य में संबंधित घटकों को दर्ज किया ।

कृति :

किसी परिवार में विभिन्न मदों पर होने वाला मासिक खर्च दिया गया है । इसके आधार पर केंद्रीय कोण ज्ञात कर वृत्तालेख खींचिए ।

विभिन्न मद	प्रतिशत खर्च	केंद्रीय कोण के माप
अन्न	40	$\frac{40}{100} \times 360 = \square$
कपड़ा	20	$\square \times \square = \square$
किराया	15	$\square \times \square = \square$
शिक्षा	20	$\square \times \square = \square$
अन्य खर्च	05	$\square \times \square = \square$
कुल	100	360°

प्रश्नसंग्रह 6.6

1. किसी रक्तदान शिविर में विभिन्न आयु गट के 200 व्यक्तियों द्‌वारा किया गया रक्तदान दिया गया है । इसके आधार पर वृत्तालेख खींचिए ।

आयु गट (वर्ष में)	20–25	25–30	30–35	35–40
व्यक्तियों की संख्या	80	60	35	25

2. किसी विद्‌यार्थी को विभिन्न विषयों में 100 में से प्राप्त अंक दिए गए हैं । इस जानकारी को वृत्तालेख द्‌वारा दिखाइए।

विषय	अंग्रेजी	मराठी	विज्ञान	गणित	स. शास्त्र	हिंदी
अंक	50	70	80	90	60	50

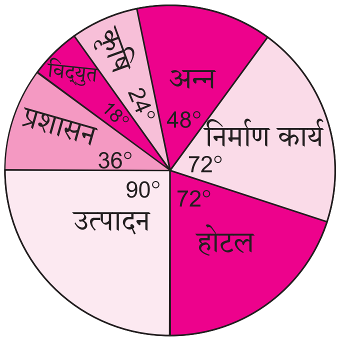
3. वृक्षारोपण कार्यक्रम के अंतर्गत विद्यालय की विभिन्न कक्षाओं के विद्यार्थियों द्‍वारा लगाये गए वृक्षों की संख्या सारिणी में दी गई है । यह जानकारी वृत्तालेख द्‍वारा दिखाइए ।

कक्षा	5 वीं	6 वीं	7 वीं	8 वीं	9 वीं	10 वीं
पेड़ों की संख्या	40	50	75	50	70	75

4. किसी फल विक्रेता के पास आए विभिन्न फलों की माँग का प्रतिशत निम्नलिखित सारिणी में दिया है । इस जानकारी के अनुसार वृत्तालेख खींचिए ।

फल	आम	मोसंबी	सेब	चीकू	संतरा
माँग (प्रतिशत में)	30	15	25	20	10

5. किसी गाँव में भिन्न-भिन्न व्यवसायों के व्यवसायियों का प्रतिशत दिखानेवाला वृत्तालेख आकृति 6.13 में दिया गया है । इसके आधार दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।



आकृति 6.13

(1) कुल व्यवसायियों की संख्या 10000 हो तो निर्माण कार्य के क्षेत्र में कितने व्यवसायी हैं ?

(2) प्रशासन के क्षेत्र में कितने व्यवसायी कार्यरत हैं ?

(3) उत्पादन के क्षेत्र में कितने प्रतिशत व्यवसायी हैं?

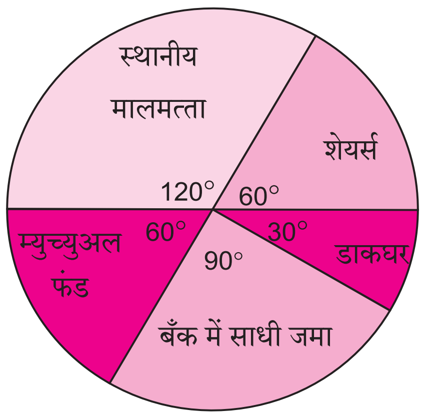
6. किसी परिवार में वार्षिक निवेश का वृत्तालेख साथ की आकृति में दिया गया है । इसके आधार पर नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(1) शेयर्स में निवेश राशि रु. 2000 हो तो कुल निवेश कितना होगा ?

(2) बैंक में जमा राशि कितनी होगी ?

(3) शेयर्स की अपेक्षा म्युच्युअल फंड में कितनी अधिक राशि निवेश की गई है ?

(4) डाकघर में निवेश कितना है ?



आकृति 6.14

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. वैकल्पिक प्रश्नों के उत्तर दिए गए विकल्पों में से चुनकर लिखिए ।

(1)विभिन्न रक्त गटों के व्यक्तियों का रक्त गट के अनुसार वर्गीकरण वृत्तालेख में दिखाना है । O- रक्त गट वाले व्यक्ति 40% हों तो O- रक्त गट वाले व्यक्तियों के लिए वृत्तालेख में केंद्रीय कोण कितना लेंगे ?

(A) 114° (B) 140° (C) 104° (D) 144°

(2) किसी इमारत के निर्माण कार्य के विभिन्न खर्च को वृत्तालेख द्वारा दिखाया गया है, सीमेंट का खर्च 75° के केंद्रीय कोण से दिखाया गया है। सीमेंट का खर्च रु. 45000 हो तो इमारत के निर्माण कार्य का कुल खर्च रु. . . . . . .

(A) 2,16,000 (B) 3,60,000 (C) 4,50,000 (D) 7,50,000

(3) वर्गीकृत बारंबारता सारिणी में संचयी बारंबारता का उपयोग . . . . . ज्ञात करने के लिए होता है।

(A) माध्य (B) माध्यिका (C) बहुलक (D) इनमें से सभी

(4) वर्गीकृत बारंबारता सारिणी में सामग्री का माध्य ज्ञात करने के लिए सूत्र $\overline{X} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times g$ में $u_i = \ldots$

(A) $\frac{x_i + A}{g}$ (B) $(x_i - A)$ (C) $\frac{x_i - A}{g}$ (D) $\frac{A - x_i}{g}$

(5)

प्रतिलीटर तय की गई दूरी (किमी)	12-14	14-16	16-18	18-20
कार की संख्या	11	12	20	7

ऊपरोक्त सामग्री के लिए कार द्वारा प्रतिलीटर तय की गई दूरी की माध्यिका . . . . . इस वर्ग में है।

(A) 12-14 (B) 14-16 (C) 16-18 (D) 18-20

(6)

प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा लगाये गए वृक्ष	1-3	4-6	7-9	10-12
विद्यार्थी संख्या	7	8	6	4

ऊपरोक्त बारंबारता सारिणी में दिए गए आँकड़ों के लिए बारंबारता बहुभुज ज्ञात करना है। 4-6 वर्ग में विद्यार्थियों की संख्या दर्शाने वाला बिंदुओं का निर्देशांक . . . . . है।

(A) (4, 8) (B) (3, 5) (C) (5, 8) (D) (8, 4)

2. अंगूर के मौसम में बागान मालिकों को प्राप्त उत्पादन की वर्गीकृत बारंबारता सारिणी नीचे दी गई है। इससे उत्पादन का माध्य ज्ञात कीजिए।

उत्पादन (हजार रूपये में)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
बागान मालिक	10	11	15	16	18	14

3. नीचे दी गई वर्गीकृत बारंबारता सारिणी में एक बैंक द्वारा तालाब के लिए उपलब्ध कराया गया कर्ज दिया गया है। बैंक द्वारा दी गई रकम का माध्य ज्ञात कीजिए।

कर्ज (हजार रुपयों में)	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
तालाबों की संख्या	13	20	24	36	7

4. किसी कारखाने में 120 मजदूरों के साप्ताहिक वेतन की वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी नीचे दी गई है, इसके आधार पर मजदूरों के वेतन का माध्य ज्ञात कीजिए ।

साप्ताहिक वेतन (रुपयों में)	0-2000	2000-4000	4000-6000	6000-8000
मजदूरों की संख्या	15	35	50	20

5. बाढ़पीड़ितों के 50 परिवारों को दी गई सहायता की राशि निम्नलिखित वर्गीकृत बारंबारता सारिणी में दी गई है । इसके आधार पर सहायता की राशि का माध्य ज्ञात कीजिए ।

सहायता की राशि (हजार रुपयों में)	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
परिवारों की संख्या	7	13	20	6	4

6. दी गई वर्गीकृत बारंबारता सारिणी में सार्वजनिक बस सेवा के 250 बसों से एक दिन में तय की गई दूरी दी गई है। इस आधार पर एक दिन में तय की गई दूरी की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

दूरी (किलोमीटर)	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
बसों की संख्या	40	60	80	50	20

7. किसी जनरल स्टोर्स में विभिन्न वस्तुओं की कीमत तथा उनकी माँग को वर्गीकृत बारंबारता सारिणी में दिखाया गया है । इसके आधार पर कीमत की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

कीमत (रुपयों में)	20 से कम	20-40	40-60	60-80	80-100
वस्तुओं की संख्या	140	100	80	60	20

8. निम्नलिखित वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी में किसी मिठाई की दुकान में भिन्न-भिन्न वजनवाली मिठाई की माँग दी गई है । इस आधार पर वजन के माँग का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

मिठाई का वजन (ग्राम)	0-250	250-500	500-750	750-1000	1000-1250
ग्राहक संख्या	10	60	25	20	15

9. दी गई बारंबारता बंटन सारिणी से आयतालेख खींचिए ।

विद्युत का उपभोग (यूनिटस्)	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170
परिवारों की संख्या	150	400	460	540	600	350

10. किसी हथकरघा कारखाने में मजदूरों को एक साड़ी बनाने में लगने वाले दिन और मजदूरों की संख्या की वर्गीकृत बारंबारता सारिणी दी गई है । इस सामग्री के लिए बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

दिन	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
मजदूरों की संख्या	5	16	30	40	35	14

11. किसी कक्षा में विद्यार्थियों को विज्ञान का प्रयोग करने के लिए लगनेवाला समय वर्गीकृत बारंबारता सारिणी में दिया गया है । इस जानकारी का आयतालेख बनाकर बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

प्रयोग में लगने वाला समय (मिनटों में)	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32
विद्यार्थियों संख्या	8	16	22	18	14	12

12. निमलिखित वर्गीकृत बारंबारता सारिणी के लिए बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

रक्तदाताओं की आयु (वर्षे)	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
रक्तदाताओं की संख्या	38	46	35	24	15	12

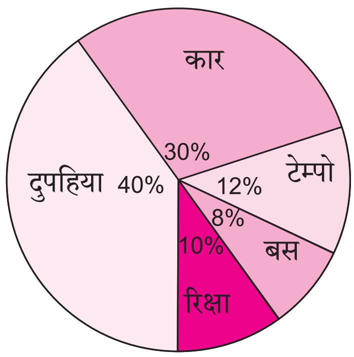
13. निम्नलिखित सारिणी में 150 गाँवों में होने वाली वर्षा का वार्षिक औसत दिया गया है । इसका बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

औसत वर्षा की मात्रा (सेंटीमीटर)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
गाँवों की संख्या	14	12	36	48	40

14. सुबह 8 से 10 बजे तक शहर के एक चौक के सिग्नल से आगे जाने वाले विविध वाहनों की संख्याओं का प्रतिशत संलग्न वृत्तालेख में दिया गया है –

(1) प्रत्येक प्रकार के वाहन के लिए केंद्रीय कोण का माप ज्ञात कीजिए ।

(2) दुपहिया वाहनों की संख्या 1200 हो तो वाहनों की कुल संख्या कितनी होगी ?



आकृति 6.15

15. दी गई सारिणी में ध्वनि प्रदूषण फैलाने वाले घटक दिए गए हैं । इसका वृत्तालेख बनाइए ।

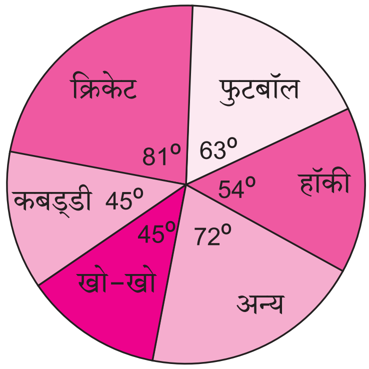
निर्माण कार्य	यातायात	हवाई जहाज की उड़ानें	उद्योग	रेल गाड़ी
10%	50%	9%	20%	11%

16. किसी सर्वेक्षण में शालेय विद्‌यार्थियों की विभिन्न खेलों में रुचि जानने के लिए किए गए सर्वेक्षण से प्राप्त जानकारी संलग्न वृत्तालेख में दिखाई गई है। कुल विद्‌यार्थियों की संख्या 1000 हो तो -

(1) क्रिकेट पसंद करने वाले विद्‌यार्थी कितने हैं ?

(2) फुटबॉल का खेल कितने विद्‌यार्थियों को पसंद है ?

(3) अन्य खेलों को पसंद करने वाले विद्‌यार्थियों की संख्या कितनी है ?



आकृति 6.16

17. किसी गाँव के स्वास्थ्य केंद्र पर 180 महिलाओं की जाँच हुई। उनमें से 50 स्त्रियों में हीमोग्लोबीन की कमी थी, 10 स्त्रियों में मोतिया बिंदु की तकलीफ थी, 25 स्त्रियों में साँस का विकार था। शेष स्त्रियाँ निरोगी (स्वस्थ) थीं यह जानकारी दर्शाने वाला वृत्तालेख खींचिए।

18. वनीकरण के प्रकल्प में किसी विद्‌यालय के विद्‌यार्थियों ने पर्यावरण दिवस के उपलक्ष्य में 120 वृक्ष लगाये। उसकी निम्नलिखित जानकारी सारिणी में दी गई है। यह जानकारी दर्शाने वाला वृत्तालेख बनाइए।

वृक्षों के नाम	आम	गुड़हल	पीपल	बबूल	नीम
वृक्षों की संख्या	20	28	24	22	26