3 अंकगणितीय शृंखला

आओ सीखें

- अनुक्रमणिका
- अंकगणितीय शृंखला
- अंकगणितीय शृंखला का n वाँ पद
- अंकगणितीय शृंखला के पहले n पदों का योग

आओ जानें

अनुक्रमणिका (Sequence)

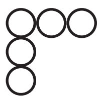
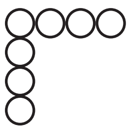
हम 1, 2, 3, 4, . . . संख्याएँ क्रम से लिखते हैं । यह संख्याओं की सूची है । इन संख्याओं में किसी भी संख्या का स्थान (क्रम) हम बता सकते हैं । जैसे 13 यह संख्या 13 वें स्थान पर है । संख्याओं की दूसरी सूची देखें । संख्याएँ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, . . . विशिष्ट क्रम से लिखी गई हैं । इसमें $16 = 4^2$ चौथे स्थान पर तथा $25 = 5^2$ पाँचवें स्थान पर है । संख्या $49 = 7^2$ सातवें स्थान पर है । अर्थात् इस सूची में भी किसी भी संख्या का स्थान बताया जा सकता है ।

प्राकृत संख्याओं जैसे विशिष्ट क्रम से लिखे गए संख्या समूह को अनुक्रमणिका कहते हैं ।

अनुक्रमणिका में विशिष्ट स्थान पर विशिष्ट संख्या लिखी जाती है । संख्याएँ $a_1, a_2, a_3, a_4 . . . a_n$ इस प्रकार लिखने पर यह स्पष्ट होता है कि a_1 पहली, a_2 दूसरी, . . . इस प्रकार a_n यह n वीं संख्या है । संख्याओं की अनुक्रमणिका $f_1, f_2, f_3, . . .$ इसी प्रकार लिखी जाती है । इससे यह ध्यान में आता है कि संख्याएँ निश्चित क्रम में लिखी गई हैं ।

किसी कक्षा के छात्र व्यायाम के लिए मैदान में कतार में खड़े होते हैं । उनका क्रम निश्चित हो तो उनकी अनुक्रमणिका बनती है । कुछ अनुक्रमणिकाओं में विशिष्ट आकृतिबंध होता है यह भी हमने अनुभव किया है ।

कृति : निम्नलिखित आकृतिबंध पूर्ण करो ।

आकृतिबंध									
वृत्तों की संख्या	1	3	5	7					

आकृतिबंध	ΔΔ Δ ΔΔ	ΔΔΔ Δ Δ ΔΔΔ	ΔΔΔΔ Δ Δ Δ ΔΔΔΔ				
त्रिभुजों की संख्या	5	8	11				

संख्याओं का आकृतिबंध देखिए । पहलेवाली संख्या पर कौन-सी क्रिया करने से बादवाली संख्या प्राप्त होती है वह नियम खोजिए। उसी नियम के आधार पर बाद वाली सभी संख्याएँ लिख सकते हैं।

साथ की संख्या सूची देखें 2, 11, −6, 0, 5, −37, 8, 2, 61

इसमें $a_1 = 2$, $a_2 = 11$, $a_3 = -6, \ldots$ यह संख्या सूची भी अनुक्रमणिका है । परंतु विशिष्ट पद (संख्या) उस स्थान पर लिखने का कारण नहीं बताया जा सकता, वैसेही इन विविध पदों में क्या संबंध है, यह भी निश्चित रूप से नहीं बताया जा सकता ।

सामान्यतः जिन अनुक्रमणिकाओं में अगला पद प्राप्त करने का निश्चित नियम हो, ऐसी अनुक्रमणिकाओं पर विचार किया जाता है ।

उदा. (1) 4, 8, 12, 16 . . .

(2) 2, 4, 8, 16, 32, . . .

(3) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20} \ldots$

अनुक्रमणिका के पद (Terms in a sequence)

अनुक्रमणिका के क्रमिक पदों को $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n \ldots$ इस प्रकार भी दर्शाया जाता है। सामान्यत: अनुक्रमणिका को $\{t_n\}$ लिखते हैं । अनुक्रमणिका अनंत हो तो प्रत्येक धन पूर्णांक n से संबंधित एक संख्या है । ऐसा माना जाता है ।

कृति I : निम्नलिखित अनुक्रमणिकाओं में पदों के क्रम को $t_1, t_2, t_3 \ldots$ से दर्शाइए ।

(1) 9, 15, 21, 27, . . . यहाँ $t_1 = 9$, $t_2 = 15$, $t_3 = 21, \ldots$

(2) 7, 7, 7, 7, . . . यहाँ $t_1 = 7$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square, \ldots$

(3) −2, −6, −10, −14, . . . यहाँ $t_1 = -2$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square, \ldots$

कृति II : निम्नलिखित अनुक्रमणिकाओं के पदों में कोई नियम प्राप्त होता है क्या देखिए, दो अनुक्रमणिकाओं में समानता खोजिए । उन अनुक्रमणिकाओं के पदों में कोई नियम प्राप्त होता है क्या यह देखने के लिए निम्नलिखित रचना देखिए और अगले पृष्ठपर दिए गए रिक्त चौखटों की पूर्ति कीजिए ।

(1) 1, 4, 7, 10, 13, . . . (2) 6, 12, 18, 24, . . .

(3) 3, 3, 3, 3, . . . (4) 4, 16, 64, . . .

(5) −1, −1.5, −2, −2.5, . . . (6) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$

निम्नलिखित अनुक्रमणिकाओं में संबंध खोजिए तथा उसके लिए किया गया विचार देखिए ।

(1) 1, 4, 7, 10, ...

1 (+3)   4 (+3)   7 (+3)   10 (+3)

(2) 6, 12, 18, 24, ...

6 + 6   12 + 6   18 + 6

(3) 3, 3, 3, 3, ...

3 + 0   3 + 0   3 + 0   3 + 0

(4) 4, 16, 64, , , , ...

4×4 16×4 64×4 $\times 4$ $\times 4$

(5) −1, −1.5, −2, −2.5, ...

(−1)+(−0.5)   −1.5 +(−0.5)   −2 + (−0.5)   −2.5 + (−0.5)

(6) 1^3, 2^3, 3^3, ...

जिसमें अनुक्रमणिका (1), (2), (3), (5) में पहलेवाली संख्या में निश्चित संख्या जोड़ने पर उसके बादवाली संख्या (पद) प्राप्त होती है । यह समानता है । इस प्रकार की अनुक्रमणिकाओं को अंकगणितीय शृंखला कहते हैं ।

ऊपरोक्त अनुक्रमणिका (4) अंकगणितीय शृंखला नहीं है । इस अनुक्रमणिका के पहलेवाले पद में निश्चित संख्या से गुणा करने पर बादवाला पद प्राप्त होता है । इस प्रकार की अनुक्रमणिका को भूमितीय शृंखला (Geometric Progression) कहते हैं ।

ऊपरोक्त अनुक्रमणिका (6) भी अंकगणितीय शृंखला नहीं है । उसीप्रकार भूमितीय शृंखला भी नहीं है ।

इस वर्ष हमें अंकगणितीय शृंखला का अध्ययन करना है ।

अंकगणितीय शृंखला (Arithmetic Progression)

निम्नलिखित अनुक्रमणिकाओं में बाद में आनेवाले तीन पद लिखिए ।

(1) 5, 8, 11, 14, . . .   (2) 100, 70, 40, 10, . . .

(3) −7, −4, −1, 2, . . .   (4) 4, 4, 4, . . .

निम्नलिखित अनुक्रमणिकाओं में बाद वाला पद ज्ञात करने के लिए क्या किया गया है देखिए ।

पहला पद   दूसरा पद   तीसरा पद

(1) 100   70   40   10   **-20**   **-50**

100+(-30)   70+(-30)   40+(-30)   10+(-30)   (-20)+(-30)

(2) -7   -4   -1   2   **5**   **8**

-7+3   -4+3   -1+3   2+3   5+3

(3) 4   4   4   4   4 . . . .

4 + 0   4 + 0   4 + 0   4 + 0

ऊपरोक्त संख्याओं की प्रत्येक सूची में प्रत्येक पद पहलेवाले पद में विशिष्ट संख्या जोड़ने पर प्राप्त होता है । दो क्रमिक पदों का अंतर स्थिर (अचर) होता है ।

उदा. (i) में अंतर ऋणात्मक (ii) में अंतर धनात्मक (iii) में अंतर '0' शून्य है ।

क्रमिक पदों में अंतर स्थिर (अचर) हो तो उस अंतर को **सामान्य अंतर** कहते हैं । यह d इस अक्षर द्वारा दर्शाते हैं ।

दी गई अनुक्रमणिका में किन्हीं दो क्रमिक पदों का अंतर $(t_{n+1} - t_n)$ अचर हो तो उस अनुक्रमणिका को अंकगणितीय शृंखला (Arithmetic Progression) कहते हैं । $t_{n+1} - t_n = d$ यह सामान्य अंतर (Common difference) होता है ।

किसी अंकगणितीय शृंखला का प्रथम पद a तथा सामान्य अंतर d हो,

तो $t_1 = a$, $t_2 = a + d$

$t_3 = (a + d) + d = a + 2d$

प्रथम पद a तथा सामान्य अंतर d हो तो बननेवाली अंकगणितीय शृंखला

$a, (a + d), (a + 2d), (a + 3d), \ldots$ होती है ।

अंकगणितीय शृंखला से संबंधित कुछ उदाहरण देखिए ।

उदा.(1) आरिफा ने प्रत्येक महीने 100 रुपयों की बचत की । एक वर्ष में प्रत्येक माह के अंत की कुल बचत निम्नानुसार है।

महीना	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
बचत ₹	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

प्रत्येक महीने की कुल बचत दर्शानेवाली संख्याएँ अंकगणितीय शृंखला हैं ।

उदा. (2) प्रणव ने मित्र से 10000 रूपये उधार लिए तथा 1000 रूपये प्रतिमाह वापस करना का तय किया तो प्रत्येक महीने वापस की जानेवाली शेष राशि निम्नलिखित प्रकार से होगी ।

महीना क्र.	1	2	3	4	5	...	...	...
वापस करने की शेष रकम	10,000	9,000	8,000	7,000	...	2,000	1,000	0

उदा. (3) 5 का पहाड़ा अर्थात 5 से विभाज्य संख्याएँ देखिए ।

5, 10, 15, 20, . . . 50, 55, 60, ... यह एक अंकगणितीय श्रृंखला है ।

ऊपरोक्त उदा. (1) तथा उदा. (2) की अंकगणितीय श्रृंखला सीमित है, तो उदा. (3) की अंकगणितीय श्रृंखला असीमित अनंत श्रृंखला है ।

इसे ध्यान में रखें

(1) यदि अनुक्रमणिका में $(t_{n+1} - t_n)$ अंतर स्थिर हो तो उस अनुक्रमणिका को अंकगणितीय श्रृंखला कहते हैं ।

(2) अंकगणितीय श्रृंखला के दो क्रमिक पदों के स्थिर अंतर को d अक्षर द्वारा दर्शाते हैं ।

(3) d का मान धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है ।

(4) अंकगणितीय श्रृंखला का प्रथम पद a, तथा सामान्य अंतर d हो तो वह श्रृंखला a, $(a + d)$, $(a + 2d)$, . . . होगी ।

कृति : सीमित तथा अनंत अंकगणितीय श्रृंखला के एक-एक उदा. लिखिए ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) निम्नलिखित में से कौन-सी अनुक्रमणिका अंकगणितीय श्रृंखला है पहचानिए । यदि हो, तो अंकगणितीय श्रृंखलाओं के बाद के दो पद ज्ञात कीजिए ।

(i) 5, 12, 19, 26, . . .   (ii) 2, −2, −6, −10, . . .

(iii) 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . .   (iv) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

हल : (i) 5, 12, 19, 26, . . . अनुक्रमणिका में ,

प्रथम पद = $t_1 = 5$, $t_2 = 12$, $t_3 = 19$, . . .

$t_2 - t_1 = 12 - 5 = 7$

$t_3 - t_2 = 19 - 12 = 7$

प्रथम पद = 5 तथा सामान्य अंतर = $d = 7$ है जो कि स्थिर है ।

$\therefore$ यह अनुक्रमणिका अंकगणितीय श्रृंखला है । इस श्रृंखला के अगले दो पद

$26 + 7 = 33$, $33 + 7 = 40$.

अत: 33 तथा 40 दी गई श्रृंखला के अगले दो पद हैं ।

(ii) 2, −2, −6, −10, . . . इस अनुक्रमणिका में,

$t_1 = 2, \quad t_2 = -2, t_3 = -6, \quad t_4 = -10 \ldots$

$t_2 - t_1 = -2 - 2 = -4$

$t_3 - t_2 = -6 - (-2) = -6 + 2 = -4$

$t_4 - t_3 = -10 - (-6) = -10 + 6 = -4$

अर्थात प्रत्येक दो क्रमिक पदों में अंतर अर्थात $t_n - t_{n-1} = -4$ है $\therefore$ $d = -4$ सामान्य अंतर है जो स्थिर है। $\therefore$ दी गई अनुक्रमणिका अंकगणितीय शृंखला है।

इस शृंखला के अगले दो पद $(-10) + (-4) = -14$ तथा $(-14) + (-4) = -18$ है ।

(iii) 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . . इस अनुक्रमणिका में

$t_1 = 1, \; t_2 = 1, \; t_3 = 2, \; t_4 = 2, \qquad t_5 = 3, \qquad t_6 = 3 \ldots$

$t_2 - t_1 = 1 - 1 = 0 \;\; t_3 - t_2 = 2 - 1 = 1$

$t_4 - t_3 = 2 - 2 = 0 \;\; t_3 - t_2 \neq t_2 - t_1$

अनुक्रमणिका में दो क्रमिक पदों का अंतर स्थिर नहीं है । $\therefore$ दी गई अनुक्रमणिका अंकगणितीय शृंखला नहीं है।

(iv) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ इस अनुक्रमणिका में

$t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = -\frac{1}{2}, \quad t_4 = -\frac{3}{2}, \quad t_5 = -\frac{5}{2}, \quad t_6 = -\frac{7}{2} \ldots$

$t_2 - t_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_3 - t_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_4 - t_3 = -\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

यहाँ सामान्य अंतर $d = -1$ स्थिर (अचर) है।

$\therefore$ दी गई अनुक्रमणिका अंकगणितीय शृंखला है। शृंखला के अन्य दो पद ज्ञात करें।

$= -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}, \frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$

$\therefore$ अगले दो पद $-\frac{5}{2}$ तथा $-\frac{7}{2}$

उदा. (2) प्रथम पद a तथा सामान्य अंतर d निम्नानुसार दिए गए हैं इस आधार पर पहले चार पद ज्ञात कर अंकगणितीय शृंखला लिखिए।

(i) $a = -3, d = 4$ (ii) $a = 200, d = 7$

(iii) $a = -1, d = -\frac{1}{2}$ (iv) $a = 8, d = -5$

हल : (i) $a = -3, d = 4$ इस आधार पर

$a = t_1 = -3$

$t_2 = t_1 + d = -3 + 4 = 1$

$t_3 = t_2 + d = 1 + 4 = 5$

$t_4 = t_3 + d = 5 + 4 = 9$

$\therefore$ अंकगणितीय शृंखला = $-3, 1, 5, 9, \ldots$

(ii) $a = 200, d = 7$

$a = t_1 = 200$

$t_2 = t_1 + d = 200 + 7 = 207$

$t_3 = t_2 + d = 207 + 7 = 214$

$t_4 = t_3 + d = 214 + 7 = 221$

$\therefore$ अंकगणितीय शृंखला $= 200, 207, 214, 221,$

(iii) $a = -1, d = -\frac{1}{2}$

$a = t_1 = -1$

$t_2 = t_1 + d = -1 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

$t_3 = t_2 + d = -\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{2} = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-\frac{1}{2})$

$= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ अंकगणितीय शृंखला $= -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}$

(iv) $a = 8, d = -5$

$a = t_1 = 8$

$t_2 = t_1 + d = 8 + (-5) = 3$

$t_3 = t_2 + d = 3 + (-5) = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-5) = -7$

$\therefore$ अंकगणितीय शृंखला $= 8, 3, -2, -7, \ldots$

प्रश्नसंग्रह 3.1

(1) निम्नलिखित अनुक्रमणिकाओं में से कौन-सी अनुक्रमणिका अंकगणितीय शृंखला है ? जो शृंखला अंकगणितीय शृंखला हो उसमें सामान्य अंतर ज्ञात कीजिए।

(1) $2, 4, 6, 8, \ldots\ldots$ (2) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{3}, \ldots$ (3) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(4) $0.3, 0.33, .0333, \ldots$ (5) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (6) $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \ldots$

(7) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ (8) $127, 132, 137, \ldots$

(2) यदि अंकगणितीय शृंखला का प्रथम पद a तथा सामान्य अंतर d हो तो अंकगणितीय शृंखला लिखिए।

(1) $a = 10, d = 5$ (2) $a = -3, d = 0$ (3) $a = -7, d = \frac{1}{2}$

(4) $a = -1.25, d = 3$ (5) $a = 6, d = -3$ (6) $a = -19, d = -4$

(3) निम्नलिखित प्रत्येक अंकगणितीय शृंखला का प्रथम पद तथा सामान्य अंतर ज्ञात कीजिए ।

(1) 5, 1, –3, –7, . . . (2) 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, . . .

(3) 127, 135, 143, 151, . . . (4) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \ldots$

थोड़ा सोचें

- 5, 8, 11, 14, . . . क्या यह अंकगणितीय शृंखला है ? यदि है तो इसका 100 वा पद क्या होगा ? क्या इस शृंखला में 92 यह संख्या होगी ? क्या संख्या 61 होगी ?

आओ जानें

अंकगणितीय शृंखला का n वाँ पद (n^{th} term of an A. P.)

5, 8, 11, 14, . . . इस अनुक्रमणिका में दो क्रमिक पदों का अंतर 3 है इसलिए यह अंकगणितीय शृंखला है । यहाँ प्रथम पद 5 है । 5 में 3 जोड़ने पर द्वितीय पद 8 प्राप्त होता है । इसी प्रकार 100 वाँ पद ज्ञात करने के लिए क्या करना होगा ?

	प्रथम पद	द्वितीय पद	तृतीय पद	. . .
संख्या	5,	5 + 3 = 8,	8 + 3 = 11	. . .

इसी प्रकार 100 वें पद तक जाने में काफी समय लगेगा । इसके लिए कोई सूत्र प्राप्त होता है क्या देखिए ।

5	8	11	14	. . .	. . .	. . .	. . .
5	$5 + 1 \times 3$	$5 + 2 \times 3$	$5 + 3 \times 3$	. . .	$5 + (n - 1) \times 3$	$5 + n \times 3$	. . .
प्रथम पद t_1	द्वितीय पद t_2	तृतीय पद t_3	चतुर्थ पद t_4	. . .	n वा पद t_n	$n + 1$ वाँ पद t_{n+1}	. . .

सामान्यत: अंकगणितीय शृंखला $t_1, t_2, t_3, \ldots$ में प्रथम पद a तथा सामान्य अंतर d हो तो ,

$$t_1 = a$$

$$t_2 = t_1 + d = a + d = a + (2 - 1)\,d$$

$$t_3 = t_2 + d = a + d + d = a + 2d = a + (3 - 1)d$$

$$t_4 = t_3 + d = a + 2d + d = a + 3d = a + (4 - 1)d$$

$t_n = a + (n - 1)\,d$ सूत्र प्राप्त होता है ।

अब इस सूत्र का उपयोग कर अंकगणितीय श्रृंखला 5, 8, 11, 14, . . . का 100 वाँ पद ज्ञात कीजिए। यहाँ a = 5 तथा d = 3 है।

$t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore \ t_{100} = 5 + (100 - 1) \times 3$

$= 5 + 99 \times 3$

$= 5 + 297$

$t_{100} = 302$

इस अंकगणितीय श्रृंखला का 100 वाँ पद 302 है।

अब संख्या 61 इस श्रृंखला में है क्या? यह जानने के लिए इसी सूत्र का उपयोग कीजिए।

$t_n = a + (n - 1)d$

$t_n = 5 + (n - 1) \times 3$

$\therefore \ 61 = 5 + 3n - 3$

$= 3n + 2$

$\therefore \ 3n = 59$

$\therefore \ n = \frac{59}{3}$

परंतु n पूर्णांक नहीं हैं।

$\therefore$ संख्या 61 इस श्रृंखला में नहीं है।

थोड़ा सोचें

कबीर की माताजी उसके हर जन्मदिन पर उसके ऊँचाई को लिखकर रखती है। वह 1 वर्ष का था तब उसकी ऊँचाई 70 सेमी थी। दो वर्ष का होने पर वह 80 सेमी ऊँचा था; 3 वर्ष का होनेपर उसकी ऊँचाई 90 सेमी हो गई। उसकी मीरा मौसी 10 वीं में पढ़ती थी। उसने कहा कबीर की ऊँचाई प्रति वर्ष अंकगणितीय श्रृंखला में बढ़ रही है ऐसा दिख रहा है। इसी बात को मानकर मौसी ने कबीर 15 वर्ष का होने पर जब 10 वी में जाएगा तब की उसकी ऊँचाई ज्ञान की। वह आश्चर्यचकित हुई। आप भी कबीर की ऊँचाई अंकगणितीय श्रृंखला में बढ़ रही है यह मानकर वह 15 वर्ष का होनेपर उसकी ऊँचाई क्या होगी ज्ञान करो।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) निम्नलिखित अंकगणितीय शृंखला के लिए t_n ज्ञात कीजिए तथा इसके अधार पर 30 वाँ पद ज्ञात कीजिए ।

3, 8, 13, 18, . . .

हल : दी गई अंकगणितीय शृंखला 3, 8, 13, 18, .. .

यहाँ $t_1 = 3,\ t_2 = 8,\ t_3 = 13,\ t_4 = 18, . .$

$d = t_2 - t_1 = 8 - 3 = 5, \quad n = 30$

हम जानते है कि $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore\ t_n = 3 + (n - 1) \times 5 \quad \because\ a = 3,\ d = 5$

$\therefore\ t_n = 3 + 5n - 5$

$\therefore\ t_n = 5n - 2$

$\therefore$ 30 वाँ पद $= t_{30} = 5 \times 30 - 2$

$= 150 - 2 \quad = 148$

उदा. (2) निम्नलिखित अंकगणितीय शृंखला का कौन-सा पद 560 है ?

2, 11, 20, 29, . . .

हल : दी गई अंकगणितीय शृंखला 2, 11, 20, 29, ..

यहाँ $a = 2,\ d = 11 - 2 = 9$

शृंखला का n वाँ पद 560 है ।

$t_n = a + (n - 1)d$

$t_n = 560$

$\therefore\ 560 = 2 + (n - 1) \times 9$

$= 2 + 9n - 9$

$\therefore\ 9n = 567$

$\therefore\ n = \frac{567}{9} = 63$

$\therefore$ दी गई अंकगणितीय शृंखला का 63 वाँ पद 560 है।

उदा. (3) दी गई अनुक्रमणिका 5, 11, 17, 23, . . . में क्या संख्या 301 है ?

हल : 5, 11, 17, 23, . . . इस शृंखला में

$t_1 = 5,\ t_2 = 11,\ t_3 = 17,\ t_4 = 23, . . .$

$t_2 - t_1 = 11 - 5 = 6$

$t_3 - t_2 = 17 - 11 = 6$

$\therefore$ यह अनुक्रमणिका अंकगणितीय शृंखला है ।

जिसका प्रथम पद $a = 5$ तथा $d = 6$

माना n वाँ पद 301 है ।

$t_n = a + (n - 1)d = 301$

$\therefore\ 301 = 5 + (n - 1) \times 6$

$= 5 + 6n - 6$

$\therefore\ 6n = 301 + 1 = 302$

$\therefore\ n = \frac{302}{6}$ यह धन पूर्णांक नहीं है ।

अत: दी गई अनुक्रमणिका में संख्या 301 नहीं हो सकती ।

उदा. (4) 4 से विभाज्य दो अंकोंवाली कितनी संख्याएँ होंगी ?

हल : 4 से विभाज्य दो अंकोंवाली संख्याओं की सूची

12, 16, 20, 24, . . . 96 है ।

ऐसी कितनी संख्याएँ होंगी ज्ञात कीजिए ।

$t_n = 96,\ a = 12,\ d = 4$

इस आधारपर n का मान ज्ञात कीजिए ।

$t_n = 96$

$\therefore$ सूत्र द्वारा,

$96 = 12 + (n - 1) \times 4$

$= 12 + 4n - 4$

$\therefore\ 4n = 88$

$\therefore\ n = 22$

$\therefore$ 4 से विभाज्य दो अंकोवाली 22 संख्याएँ है।

उदा. (5) यदि किसी अंकगणितीय शृंखला का 10 वाँ पद 25 तथा 18 वाँ पद 41 हो तो उस शृंखला का 38 वाँ पद ज्ञात कीजिए। इसी प्रकार n वाँ पद 99 हो तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई अंकगणितीय शृंखला में $t_{10} = 25$ तथा $t_{18} = 41$ है।

हमें ज्ञात है $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore \; t_{10} = a + (10 - 1)\, d$

$\therefore \; 25 = a + 9d \; . \; . \; . \; (I)$

इसी प्रकार $t_{18} = a + (18 - 1)\, d$

$\therefore \; 41 = a + 17d \; . \; . \; . \; (II)$

$25 = a + 9d \; . \; . \; . \; (I)$ से

$a = 25 - 9d.$

यह मान समीकरण (II) में रखने पर

समीकरण (II) $a + 17d = 41$ है।

$\therefore \; 25 - 9d + 17d = 41$

$8d = 41 - 25 = 16$

$\therefore \; d = 2$

$d = 2$ यह मान समीकरण (I) में रखने पर

$a + 9d = 25$

$\therefore \; a + 9 \times 2 = 25$

$\therefore \; a + 18 = 25$

$\therefore \; a = 7$

अब $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore \; t_{38} = 7 + (38 - 1) \times 2$

$= 7 + 37 \times 2$

$= 7 + 74$

$= 81$

n वाँ पद 99 हो तो n का मान ज्ञात करना है।

$t_n = a + (n - 1)d$

$99 = 7 + (n - 1) \times 2$

$99 = 7 + 2n - 2$

$99 = 5 + 2n$

$\therefore \; 2n = 94$

$\therefore \; n = 47$

$\therefore$ दी गई शृंखला का 38 वाँ पद 81 है तथा 99 यह 47 वाँ पद है।

प्रश्नसंग्रह 3.2

(1) दी गई अंकगणितीय शृंखला के आधारपर रिक्त चौखटों में उचित संख्या लिखिए ।

(1) 1, 8, 15, 22, . . .

यहाँ $a = \square$, $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$,

$t_2 - t_1 = \square - \square = \square$

$t_3 - t_2 = \square - \square = \square$ $\therefore d = \square$

(2) 3, 6, 9, 12, . . .

यहाँ $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, $t_4 = \square$,

$t_2 - t_1 = \square$, $t_3 - t_2 = \square$ $\therefore d = \square$

(3) −3, −8, −13, −18, . . .

यहाँ $t_3 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, $t_4 = \square$,

$t_2 - t_1 = \square$, $t_3 - t_2 = \square$ $\therefore a = \square$, $d = \square$

(4) 70, 60, 50, 40, . . .

यहाँ $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, . . .

$\therefore a = \square$, $d = \square$

2. निम्नलिखित अनुक्रमणिका अंकगणितीय शृंखला है या नहीं निश्चित कीजिए । यदि हो तो उस शृंखला का 20 वाँ पद ज्ञात कीजिए ।
   −12, −5, 2, 9, 16, 23, 30, . . .

3. अंकगणितीय शृंखला 12, 16, 20, 24, . . . दी गई है । इस शृंखला का 24 वाँ पद ज्ञात कीजिए ।

4. निम्नलिखित अंकगणितीय शृंखला का 19 वाँ पद ज्ञात कीजिए ।
   7, 13, 19, 25, . . .

5. निम्नलिखित अंकगणितीय शृंखला का 27 वाँ पद ज्ञात कीजिए ।
   9, 4, −1, −6, −11, . . .

6. तीन अंकोवाली प्राकृत संख्या समूह में 5 से विभाज्य संख्याएँ कितनी है ? ज्ञात कीजिए ।

7. किसी अंकगणितीय शृंखला का 11 वाँ पद 16 तथा 21 वाँ पद 29 हो तो शृंखला का 41 वाँ पद ज्ञात कीजिए ।

8. 11, 8, 5, 2, . . . इस अंकगणितीय शृंखला में संख्या −151 कौन-से क्रमांक का पद होगा ?

9. 10 से 250 तक की प्राकृत संख्याओं में कितनी संख्याएँ 4 से विभाज्य है ?

10. किसी अंकगणितीय शृंखला का 17 वाँ पद उसके 10 वें पद से अधिक हो तो सामान्य अंतर ज्ञात कीजिए ।

चतुर शिक्षिका (Wise Teacher)

एक राजा था । उसने अपने बच्चों यशवंतराजे तथा गीतादेवी को घुड़सवारी सिखाने के लिए क्रमश: तारा तथा मीरा नाम की शिक्षिकाओं की नियुक्ति की । ''1 वर्ष (साल) का वेतन कितना चाहिए ?'' ऐसा उन दोनों से पूँछा गया ।

तारा ने कहा, ''मुझे पहले महीने का वेतन 100 मोहरें दीजिए तथा बाद के प्रत्येक महीने में 100 मोहरों की वृद्धि कीजिए ।'' मीरा ने कहा, ''मुझे पहले महीने में 10 मोहरें दीजिए तथा बाद के प्रत्येक महीने में उसके पहलेवाले महीने के वेतन का दुगुना वेतन मिलना चाहिए।''

महाराज ने इसे स्वीकार कर लिया। तीन महीने के बाद यशवंतराजे ने अपनी बहन से कहा, ''मेरी शिक्षिका तेरी शिक्षिका से अधिक चतुर लगती है, उसने अधिक वेतन माँगा है ।'' गीतादेवी बोली, ''मुझे भी पहले ऐसा ही लगा। इसलिए मैंने मीरा दीदी से पूँछा भी, ''आपने कम वेतन क्यों मांगा?'', तो उन्होंने हँसकर कहा कि आपको आठ महीने बाद यह बात समझ में आयेगी, आप देखना। ''और मैंने आठवें महीने का वेतन ज्ञात किया। आप भी ज्ञात करके देखिए।''

महीने	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
तारा का वेतन	100	200	300	400	500	600	700	800	900	-	-	-
मीरा का वेतन	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	-	-	-

आप भी सारिणी (तालिका) पूर्ण कीजिए ।

तारा का वेतन 100, 200, 300, 400, . . . यह अंकगणितीय शृंखला है । ध्यान में आया?

$t_1 = 100,\quad t_2 = 200,\ t_3 = 300, . . . \qquad t_2 - t_1 = 100 = d$

यहाँ सामान्य अंतर 100 है ।

मीरा का वेतन 10, 20, 40, 80, . . .यह अंकगणितीय शृंखला नहीं है । क्योंकी 20 – 10 = 10, 40 – 20 = 20, 80 – 40 = 40 अर्थात d अंतर स्थिर नहीं है ।

परंतु इस शृंखला में प्रत्येक पद पहलेवाले पद के दुगना हो जाता है ।

यहाँ $\frac{t_2}{t_1} = \frac{20}{10} = 2,\quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{40}{20} = 2,\qquad \frac{t_4}{t_3} = \frac{80}{40} = 2$

$\therefore\ \frac{t_{n+1}}{t_n}$, अर्थात बाद का पद तथा उसके पहलेवाले पद का अनुपात समान है । इसप्रकार बढ़नेवाली शृंखला को भूमितीय शृंखला कहते हैं ।

$\frac{t_{n+1}}{t_n}$ यह अनुपात एक से अधिक हो तो भूमितीय शृंखला, अंकगणितीय शृंखला की अपेक्षा तीव्र गति से बढ़ती है । इसका अनुभव कीजिए ।

यदि यह अनुपात 1 से कम हो तब यह श्रोणी परिवर्तन क्या होगा देखे ।

हम इनमें से सिर्फ अंकगणितीय शृंखला का ही अध्ययन करने वाले हैं । अंकगणितीय शृंखला का n वाँ पद कैसे ज्ञात करना है, यह हमनें देखा है । अब प्रथम n पदों का योगफल कैसे ज्ञात करना है यह हम देखने वाले हैं ।

फटा–फट (शीघ्र) योग क्रिया

तीन सौ साल पुरानी बात है । जर्मनी में ब्यूटनेर (Buttner) नाम के गुरूजी का एक शिक्षकीय विद्यालय था । गुरूजी का जोहान मार्टिन बार्टेलस नाम का केवल एक सहायक (मददगार) था । उसका काम बालकों को वर्णमाला सिखाना तथा उन्हें लेखनी बनाकर देना था । ब्यूटनेर बहुत ही अनुशासनप्रिय थे । ब्यूटनेर गुरूजी को एक काम पूरा करना था । कक्षा के छात्र शोर न करें इसलिए उन्हें काम में लगाने के लिए उन्होंने छात्रों को जोड़–घटाने से संबंधित प्रश्न देने का निश्चय किया । उन्होंने विद्यार्थियों से 1 से 100 तक की संख्याएँ स्लेट पर लिखकर उन्हें जोड़ने के लिए कहा । गुरूजी ने अपना काम शुरु किया । छात्रों ने संख्याएँ लिखना प्रारंभ किया । पाँच ही मिनट में एक स्लेट उलटी रखने की आवाज आयी । उन्होंने कार्ल गाऊस की ओर देखा और पूँछा, ''यह क्या है? मैनें तुझे 1 से 100 तक की संख्या लिखकर उनका योग भी करने को कहा है फिर स्लेट उल्टी क्यों रख दी? तुझे कुछ भी नहीं करना है क्या?''

कार्ल गाऊस ने कहा, ''मैंने जोड़ कर लिया है ।''

गुरूजीने कहा, ''क्या? इतनी जल्दी कैसे जोड़ लिया ? संख्या भी नहीं लिखी होगी, उत्तर कितना आया?''

कार्ल गाऊस ने कहा, ''पाँच हजार पचास ।''

गुरूजी ने आश्चर्यचकित होकर पूँछा, ''उत्तर कैसे ज्ञात किया?''

कार्ल गाऊस की शीघ्र योग करने की पद्धति :

सीधे क्रम में संख्या	1	2	3	4. . . .	. . . .	.100
	+	+	+	+		+
उल्टे क्रम में संख्या	100	99	98	97	. . . .	.1
योग	101	101	101	101		101

प्रत्येक युग्म की संख्याओं का योगफल 101 आता है । यह योगफल 100 बार आया इसलिए 100×101 यह गुणा किया । उत्तर 10100 आया । यहाँ 1 से 100 तक की संख्याएँ दो बार जोड़ी गई हैं । अत: 10100 का आधा किया तो 5050 आया । इसलिए 1, 2, 3, . . . , 100 इन संख्याओं का योगफल 5050 है । गुरूजी ने उसे शाबासी दी ।

अब गाऊस की योग करने की युक्ति का उपयोग कर अंकगणितीय शृंखला के n पदों का योगफल ज्ञात करने का सूत्र ज्ञात करें ।

जोहान फ्रेडरिच कार्ल गाऊस

30 अप्रेल 1777 – 23 फरवरी 1855.

कार्ल गाऊस एक महान जर्मन गणितज्ञ थे । उनका जन्म ब्रॉडन स्वाईक में एक अशिक्षित परिवार में हुआ । ब्यूटनेर की शाला में उन्होंने अपने बुद्धि की चमक दिखाई । इसके बाद ब्यूटनेर के मददगार जोहान मार्टिन बार्टेलस की गाऊस से दोस्ती हो गई । दोनों ने मिलकर बीजगणित पर एक किताब प्रकाशित की । बार्टेलस ने गाऊस की असामान्य बुद्धि का परिचय विविध लोगों से कराया ।

आओ जानें

अंकगणितीय शृंखला के प्रथम n पदों का योगफल (sum of first n terms of an A. P.)

अंकगणितीय शृंखला $a, a + d, a + 2d, a + 3d, . . . \ a + (n - 1)d$

में प्रथम पद a तथा सामान्य अंतर d है । इस शृंखला के n पदों का योगफल S_n से दिखाइए ।

$$S_n = [a] + [a + d] + \ . . . + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]2$$

पदों का क्रम उल्टा करने पर,

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \ . . . + [a + d] + [a]$$

योग करने पर,

$$2S_n = [a+a+(n-1)d] + [a + d+a+(n-2)d]+ . . . + [a+(n-2)d+ a + d]+ [a+(n-1)d+a]$$

$$2S_n = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + . . . + [2a+(n-1)d] \ . . . n \text{ बार}$$

$$2S_n = n\,[2a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)d] \quad \text{या} \quad S_n = na+\frac{n(n-1)}{2}d$$

उदाहरणार्थ, 14, 16, 18, . . . इस अंकगणितीय शृंखला में प्रथम 100 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए ।

यहाँ $a = 14$, $d = 2$, $n = 100$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore S_n = \frac{100}{2}\,[2 \times 14+(100-1) \times 2]$$

$$= 50\,[28 + 198]$$

$$= 50 \times 226 = 11300$$

$\therefore$ दी गई शृंखला के प्रथम 100 पदों का योगफल 11,300

इसे ध्यान में रखें

दी गई अंकगणितीय शृंखला का प्रथम पद a तथा सामान्य अंतर d हो तो -

$$t_n = [a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)d] = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

अंकगणितीय शृंखला के प्रथम n पदों के योगफल का एक और सूत्र ज्ञात कीजिए ।

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots \left[a+(n-1)d\right]$ इस अंकगणितीय शृंखला में प्रथम पद = $t_1 = a$ तथा n वाँ पद $\left[a+(n-1)d\right]$ है ।

n पदों का योगफल = $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

अब $S_n = \frac{n}{2}\left[\underline{a}+\underline{a+(n-1)d}\right]$

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[t_1+t_n] = \frac{n}{2}$ [प्रथम पद + अंतिम पद]

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए ।

हल : प्रथम n प्राकृत संख्याएँ $1, 2, 3, \ldots, n$.

यहाँ $a = 1, \quad d = 1, \quad n$ वें पद = n

$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$S_n = \frac{n}{2}$ [प्रथम पद + अंतिम पद]

$= \frac{n}{2}[1+n]$

$= \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore$ प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल $\frac{n(n+1)}{2}$ होता है ।

उदा. (2) प्रथम n सम प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए ।

हल : प्रथम n सम प्राकृत संख्या $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$.

t_1 = प्रथम पद = 2 , t_n = अंतिम पद = $2n$

विधि I

$S_n = \frac{n}{2}[t_1+t_n]$

$= \frac{n}{2}[2+2n]$

$= \frac{n}{2} \times 2\,(1+n)$

$= n\,(1+n)$

$= n\,(n+1)$

विधि II

$S_n = 2 + 4 + 6 \ldots + 2n$

$= 2(1+2+3+\ldots+n)$

$= \frac{2[n(n+1)]}{2}$

$= n\,(1+n)$

$= n\,(n+1)$

विधि III

$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2\times 2+(n-1)2]$

$= \frac{n}{2}[4+2n-2]$

$= \frac{n}{2}[2+2n]$

$= \frac{n}{2} \times 2\,(1+n)$

$= n\,(1+n)$

$= n\,(n+1)$

$\therefore$ प्रथम n सम प्राकृत संख्याओं का योगफल = $n\,(n+1)$ होता है ।

उदा. (3) प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए ।

हल : प्रथम n विषम प्राकृत संख्याएँ

$1, 3, 5, 7, \ldots, (2n - 1).$

$a = t_1 = 1$ तथा $t_n = (2n - 1),$

विधि I

$S_n = \frac{n}{2} [t_1 + t_n]$

$= \frac{n}{2} [1 + (2n - 1)]$

$= \frac{n}{2} [1 + 2n - 1]$

$= \frac{n}{2} \times 2n$

$= n^2$

विधि II

$S_n = \frac{n}{2} [2a+(n-1)d]$

$= \frac{n}{2} [2 \times 1 +(n-1) \times 2]$

$= \frac{n}{2} [2 + 2n - 2]$

$= \frac{n}{2} \times 2n$

$= n^2$

विधि III

$1 + 3 + \ldots 2n-1$

$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 2n)$

$- (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n)$

$= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{2n(n+1)}{2}$

$= (2n^2 + n) - (n^2 + n)$

$= n^2$

$\therefore$ प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योगफल n^2 होता है ।

उदा.(4) 1 से 150 तक की सभी विषम संख्याओं का योग कीजिए ।

हल : 1 से 150 तक की सभी विषम संख्याएँ 1, 3, 5, 7, . . . , 149.

यह अंकगणितीय शृंखला है ।

यहाँ $a = 1$ तथा $d = 2$, सर्वप्रथम ज्ञात कीजिए कि 1 से 150 तक की विषम संख्याएँ कितनी हैं । अर्थात n का मान ज्ञात कीजिए ।

$t_n = a +(n - 1)d$

$149 = 1 +(n - 1)2 \quad \therefore 149 = 1 + 2n - 2 \quad n = 75$

अब $1 + 3 + 5 + \ldots + 149$ इन 75 संख्याओं का योग कीजिए ।

$a = 1$ तथा $d = 2, n = 75$

विधि I - $S_n = \frac{n}{2} [2a+(n-1)d]$

$S_n = \square$

$S_n = \square \times \square$

$S_n = \square$

विधि II - $S_n = \frac{n}{2} [t_1 + t_n]$

$S_n = \frac{75}{2} [1 + 149]$

$S_n = \square \times \square$

$S_n = \square$

प्रश्नसंग्रह 3.3

(1) किसी अंकगणितीय शृंखला का प्रथम पद 6 तथा सामान्य अंतर 3 हो तो S_{27} ज्ञात कीजिए ।

$a = 6,\ d = 3,\ S_{27} = ?$

$S_n = \frac{n}{2}[\square + (n-1)d]$

$S_{27} = \frac{27}{2}[12 + (27-1)\square]$

$= \frac{27}{2} \times \square$

$= 27 \times 45$

$= \square$

(2) प्रथम 123 सम प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए ।

(3) 1 और 350 के बीच की सभी संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए ।

(4) किसी अंकगणितीय शृंखला का 19 वाँ पद 52 तथा 38 वाँ पद 148 हो, तो उस शृंखला के प्रथम 56 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए ।

(5) 1 और 140 के बीच की, 4 से विभाज्य प्राकृत संख्याओं का योगफल कितना है, यह ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए ।

1 से 140 के बीच की 4 से विभाज्य संख्याएँ

↓

4, 8, ... , 136

↓

कुल कितनी संख्याएँ है? अर्थात n = कितनी $\square$

↓

$a = \square$, $d = \square$, $t_n = \square$

↓

$t_n = a+(n-1)d$

↓

$136 = \square + (n-1) \times \square$

→ $n = \square$ → $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$S_{\square} = \frac{\square}{2}[\qquad] = \square$

1 से 140 के बीच की, 4 से विभाज्य संख्याओं का योगफल = $\square$

★ (6) किसी अंकगणितीय शृंखला के प्रथम 55 पदों का योगफल 3300 हो, तो उस शृंखला का 28 वाँ पद ज्ञात कीजिए ।

(7) ✶ किसी अंकगणितीय शृंखला के तीन क्रमिक पदों का योगफल 27 तथा उनका गुणनफल 504 हो, तो वे पद ज्ञात कीजिए। (तीन क्रमिक पद $a - d$, a, $a + d$ लीजिए।)

(8) ✶ किसी अंकगणितीय शृंखला के चार क्रमिक पदों का योगफल 12 है तथा उन चार क्रमिक पदों में से तृतीय और चतुर्थ पद का योगफल 14 हो, तो वे चार पद ज्ञात कीजिए।
(चार क्रमिक पद $a - d$, a, $a + d$, $a + 2d$ लीजिए।)

(9) ✶ किसी अंकगणितीय शृंखला का 9 वाँ पद शून्य हो, तो 29 वाँ पद 19 वें पद का दुगुना होता है, सिद्ध कीजिए।

आओ जानें

अंकगणितीय शृंखला के उपयोजन (Application of A.P.)

उदा. (1) मिक्सर मशीन बनाने वाली किसी कंपनी ने तीसरे वर्ष 600 मिक्सर बनाए तथा 7 वें वर्ष 700 मिक्सर बनाए। प्रतिवर्ष बनने वाले मिक्सरों की संख्या में वृद्धि निश्चित हो तो दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए।
(i) प्रथम वर्ष का उत्पादन (ii) 10 वें वर्ष का उत्पादन (iii) प्रथम 7 वर्षों का कुल उत्पादन

हल : कंपनी द्वारा बनाए जानेवाले मिक्सरों की संख्या में प्रतिवर्ष होने वाली वृद्धि निश्चित है। अत: लगातार वर्षों में होने वाले उत्पादन की संख्या अंकगणितीय शृंखला है। कंपनी द्वारा (i) n वें वर्ष में t_n मिक्सर बनाए गए, दी गई जानकारी के आधार पर

$t_3 = 600$, $t_7 = 700$

हम जानते हैं कि, $t_n = a+(n-1)d$

$t_3 = a+(3-1)d$

$a+2d = 600. . .$ (I)

$t_7 = a+(7-1)d$

$t_7 = a+6d = 700$

$a+2d = 600 \quad \therefore \; a = 600 - 2d$ यह मान समीकरण (II) में रखने पर,

$600 - 2d + 6d = 700$

$4d = 100 \quad \therefore \; d = 25$

$a+2d = 600 \quad \therefore \; a + 2 \times 25 = 600$

$a + 50 = 600 \quad \therefore \; a = 550$

$\therefore$ प्रथम वर्ष का उत्पादन 550 मिक्सर मशीन था।

(ii) $t_n = a+(n-1)d$

$t_{10} = 550+(10-1) \times 25$

$= 550 + 225$

10 वें वर्ष का उत्पादन 775 मिक्सर मशीन था।

(iii)प्रथम 7 वर्षों का उत्पादन ज्ञात करने के लिए S_n के सूत्र का उपयोग करें ।

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = \frac{7}{2}[1100 + 150]$$

$$= \frac{7}{2}[1250] = 7 \times 625 = 4375$$

$\therefore$ प्रथम 7 वर्षों में 4375 मिक्सरों का उत्पादन हुआ ।

उदा. (2) उधार के रूप में लिए गए 3,25,000 ₹ में से अजय शर्मा पहले महीने 30500 ₹ का भुगतान करते हैं । इसके बाद उन्हें हर महीने उसके पहलेवाले महीने से 1500 ₹ कम भुगतान करना पड़ता हो तो उधार लिए गए रुपयों का भुगतान कितने महीनों में पूरा होगा ?

हल : माना उधार का भुगतान पूरा होने के लिए n महीने लगेंगे । 30,500 में से प्रति माह भुगतान की राशि 1500 रु. कम देना है भुगतान की यह राशि $\therefore$ 30,500; 30,500 – 1500; 30,500 – 2 × 1500, . . . यह राशि अंकगणितीय शृंखला में है ।

प्रथम पद = a = 30500, d = –1500

ली गई कर्ज की राशि = S_n = 3,25,000

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$3,25,000 = \frac{n}{2}[2 \times 30500+(n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[2 \times 30500 - 1500n + 1500]$$

$$3,25,000 = 30500n - 750n^2 + 750n$$

$$750n^2 - 31250n + 325000 = 0$$

$3n^2 - 125n + 1300 = 0$ .... (दोनों पक्षों में 250 से भाग देने पर)

$$3n^2 - 60n - 65n + 1300 = 0$$

$$3n(n-20) - 65(n-20) = 0$$

$$(n-20)(3n-65) = 0$$

$$n - 20 = 0,\ 3n - 65 = 0$$

$n = 20$ अथवा $n = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$

$\therefore n = 20$

n यह अंकगणितीय शृंखला के पदों का क्रमांक है अत: n एक प्राकृत संख्या है ।

$\therefore n \neq \frac{65}{3}$

(अथवा 20 महीने के बाद S_{20} = 3,25,000 ₹ अर्थात उस समय उधार ली गई पूरी राशि का भुगतान किया जाएगा । बाद के समय का विचार करने की आवश्यक्ता नहीं है ।)

$\therefore$ उधार लिए गए रुपयों का भुगतान 20 महीनों में पूरा होगा ।

उदा. (3) अनवर प्रतिमाह एक निश्चित राशि की बचत करता है। पहले महीने वह 200 ₹ की बचत करता है। दूसरे महीने 250 ₹ की बचत करता है और तीसरे महीने 300 ₹ की बचत करता हो, तो इस क्रम में 1000 ₹ की मासिक बचत कौन-से महीने में होगी उस महीने तक उसकी कुल बचत कितनी होगी?

हल: पहले महीने की बचत 200 रूपये ; दूसरे महीने की बचत 250 रूपये

200, 250, 300, . . . यह अंकगणितीय शृंखला है।

यहाँ $a = 200$, $d = 50$, t_n के सूत्र का उपयोग कर n ज्ञात कीजिए तत्पश्चात S_n ज्ञात कीजिए।

$$t_n = a+(n-1)d$$

$$= 200 + (n-1)50$$

$$= 200 + 50n - 50$$

$$1000 = 150 + 50n$$

$$150 + 50n = 1000$$

$$50n = 1000 - 150$$

$$50n = 850$$

$$\therefore\ n = 17$$

1000 ₹ की मासिक बचत 17 वें महीने में होगी।

17 महीनों में कुल बचत ज्ञात करने के लिए S_n ज्ञात करेंगे।

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$= \frac{17}{2}[2 \times 200+(17-1) \times 50]$$

$$= \frac{17}{2}[400 + 800]$$

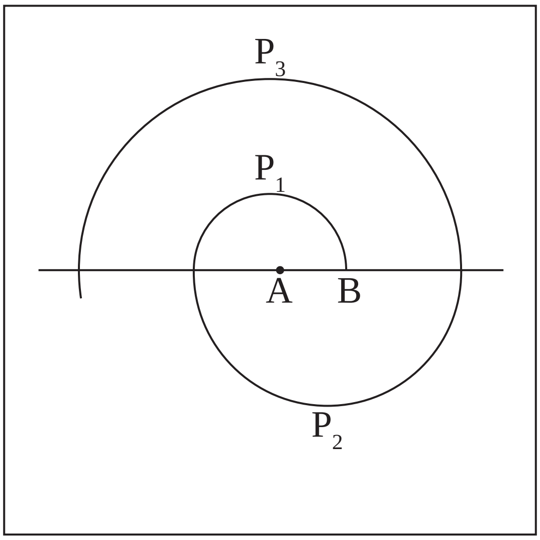
$$= \frac{17}{2}[1200]$$

$$= 17 \times 600$$

$$= 10200$$

17 महीनों की कुल बचत 10,200 ₹ है।

उदा. (4) आकृति में दर्शाएनुसार किसी रेखापर बिंदु A को केंद्रबिंदु लेकर 0.5 सेमी त्रिज्या वाला P_1 का अर्धवृत्त खींचा । यह अर्धवृत्त, उस रेखा को B बिंदु पर प्रतिच्छेदित करता है । बिंदु B को केंद्र मानकर 1 सेमी त्रिज्या वाला P_2 अर्धवृत्त रेखा के दूसरी ओर खींचा । अब पुन: बिंदु A को केंद्र मानकर 1.5 सेमी त्रिज्या वाला अर्धवृत्त P_3 खींचा। इसी प्रकार A तथा B को केंद्र मानकर क्रमश: 0.5 सेमी, 1 सेमी, 1.5 सेमी, 2 सेमी, त्रिज्याओं वाले अर्धवृत्तों की रचना करने पर एक वलयाकृति बनती है, तो इस प्रकार 13 अर्धवृत्तों से बननेवाली वलयाकृति की लंबाई कितनी होगी? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।)



हल : माना A, B, A, B, . . . इस क्रम में केंद्र मानकर खींचे गए अर्धवृत्तों की लंबाई क्रमश: $P_1, P_2, P_3, \ldots$ है । पहले अर्धवृत्त की त्रिज्या 0.5 सेमी है । दूसरे अर्धवृत्त की त्रिज्या 1.0 सेमी है, ... इसप्रकार दी गई जानकारी के आधार पर $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{13}$ ज्ञात करिए ।

पहले अर्धपरिधि की लंबाई $= P_1 = \pi r_1 = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$P_2 = \pi r_2 = \pi \times 1 = \pi$$

$$P_3 = \pi r_3 = \pi \times 1.5 = \frac{3}{2}\pi$$

$P_1, P_2, P_3, \ldots$ अर्धपरिधि अर्थात $\frac{1}{2}\pi, 1\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ संख्याएँ अंकगणितीय शृंखला में हैं ।

जिसमें $a = \frac{1}{2}\pi, d = \frac{1}{2}\pi$, इस आधारपर S_{13} ज्ञात कीजिए ।

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}\left[2 \times \frac{\pi}{2} + (13-1) \times \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{13}{2}[\pi + 6\pi]$$

$$= \frac{13}{2} \times 7\pi$$

$$= \frac{13}{2} \times 7 \times \frac{22}{7}$$

= 143 सेमी

$\therefore$ 13 अर्धवृत्तों से बनने वाली वलयाकृति की लंबाई 143 सेमी होगी ।

उदा. (5) किसी गाँव में वर्ष 2010 में 4000 लोग साक्षर थे । इस संख्या में प्रतिवर्ष 400 की वृद्धि हो रही हो तो वर्ष 2020 में कितने लोग साक्षर होंगे ?

हल :

वर्ष	2010	2011	2012	...	2020
साक्षर लोग	4000	4400	4800	...	☐

$a = 4000, \quad d = 400 \quad n = 11$

$$t_n = a+(n-1)d$$
$$= 4000 + (11-1)400$$
$$= 4000 + 4000$$
$$= 8000$$

वर्ष 2020 में 8000 लोग साक्षर होंगे ।

उदा. (6) श्रीमती शेख को वर्ष 2015 में 1,80,000 ₹ वार्षिक वेतन वाली नौकरी मिली । कार्यालय ने उन्हें प्रतिवर्ष 10,000 ₹ की वृद्धि देना तय किया हो तो कितने वर्षों बाद उनका वार्षिक वेतन 2,50,000 ₹ होगा ?

हल :

वर्ष	पहला वर्ष (2015)	दूसरा वर्ष (2016)	तीसरा वर्ष (2017)	...
वेतन रुपए	[1,80,000]	[1,80,000 + 10000]		...

$a = 1,80,000, \ d = 1000, \quad n = ? \quad t_n = 2,50,000$ रूपये ।

$t_n = a+(n-1)d$

$2,50,000 = 1,80,000 + (n-1) \times 10000$

$(n-1) \times 10000 = 70,000$

$(n-1) = 7$

$n = 8$

8 वें वर्ष में उनका वार्षिक वेतन 25,00,00 रूपये होगा ।

प्रश्नसंग्रह 3.4

(1) सानिका ने 1 जनवरी 2016 को निश्चित किया कि उस दिन 10 ₹, दूसरे दिन 11 ₹, तीसरे दिन 12 ₹ इस प्रकार बचत करते रहना है। 31 डिसेंबर 2016 तक उसकी कुल बचत कितनी हुई?

(2) किसी व्यक्ति ने 8000 ₹ कर्ज लिया तथा उसपर 1360 ₹ ब्याज देने का वादा किया। प्रत्येक किस्त के बाद 40 रू कम करते हुए कुल 12 किस्तों में उसने कर्ज का भुगतान कर दिया, तो उस व्यक्ति द्‌वारा भुगतान की गई पहली तथा अंतिम किस्त कितनी होगी ?

(3) सचिन द्‌वारा राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्र में पहले वर्ष 5000 ₹ , दूसरे वर्ष 7000 ₹, तीसरे वर्ष 9000 ₹ इस प्रकार निवेश किया गया तो सचिन ने 12 वर्षों में कुल कितना निवेश किया?

(4) किसी नाट्यगृह में कुर्सियों की कुल 27 कतारें हैं। पहली कतार में कुल 20 कुर्सियाँ हैं , दूसरी कतार में कुल 22 कुर्सियाँ तथा तीसरी कतार में कुल 24 कुर्सियाँ हों तो 15 वीं कतार में कुल कितनी कुर्सियाँ होंगी तथा नाट्यगृह में कुल कितनी कुर्सियाँ होंगी?

(5) कारगिल में किसी सप्ताह के सोमवार से शनिवार तक का तापमान दर्ज किया गया। बाद में ध्यान आया कि दर्ज जानकारी अंकगणितीय शृंखला में है। सोमवार तथा शनिवार के तापमान का योगफल मंगलवार तथा शनिवार के तापमान के योगफल से 5° अधिक है। यदि बुधवार का तापमान -30° सेल्सियस हो तो प्रत्येक दिन का तापमान ज्ञात कीजिए।

(6) अंतरराष्ट्रीय पर्यावरण दिवस के उपलक्ष्य में त्रिभुजाकार जमीन पर वृक्षारोपण कार्यक्रम आयोजित किया गया। पहली पंक्ति में 1 पौधा दूसरी पंक्ति में 2 पौधे तीसरी पंक्ति में तीन इस प्रकार 25 पंक्तियों में पौधे लगाए गए, तो कुल कितने पौधे लगाए गए ?

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. निम्नलिखित उपप्रश्नों में चार विकल्प दिए गए हैं। उसमें से उचित विकल्प चुनिए।

(1) $-10, -6, -2, 2, \dots$ यह अनुक्रमणिका ....

(A) अंकगणितीय शृंखला है क्योंकि $d = -16$ (B) अंकगणितीय शृंखला है क्योंकि $d = 4$

(C) अंकगणितीय शृंखला है क्योंकि $d = -4$ (D) अंकगणितीय शृंखला नहीं है।

(2) जिस अंकगणितीय शृंखला में प्रथम पद -2 तथा सामान्य अंतर -2 हो ऐसे अंकगणितीय शृंखला के प्रथम 4 पद ..... हैं

(A) $-2, 0, 2, 4$ (B) $-2, 4, -8, 16$

(C) $-2, -4, -6, -8$ (D) $-2, -4, -8, -16$

(3) प्रथम 30 प्राकृत संख्याओं का योगफल निम्नलिखित में से कौन-सा है ? . . .

(A) 464 (B) 465 (C) 462 (D) 461

(4) दी गई अंकगणितीय शृंखला में $t_7 = 4$, $n = 7$, $d = -4$ तो $a = . . .$

(A) 6 (B) 7 (C) 20 (D) 28

(5) एक अंकगणितीय शृंखला के लिए $a = 3.5$, $d = 0$, तो $t_n = . . .$

(A) 0 (B) 3.5 (C) 103.5 (D) 104.5

(6) एक अंकगणितीय शृंखला में प्रथम दो पद −3, 4 हों तो 21 वाँ पद . . . है।

(A) −143 (B) 143 (C) 137 (D) 17

(7) यदि एक अंकगणितीय शृंखला के लिए $d = 5$ हो तो $t_{18} - t_{13} = . . .$

(A) 5 (B) 20 (C) 25 (D) 30

(8) 3 की पहली 5 गुणज संख्याओं का योगफल . . . है।

(A) 45 (B) 55 (C) 15 (D) 75

(9) 15, 10, 5, . . . इस अंकगणितीय शृंखला के प्रथम 10 पदों का योगफल . . . है।

(A) −75 (B) −125 (C) 75 (D) 125

(10) किसी अंकगणितीय शृंखला का प्रथम पद 1 हो तो n वाँ पद 20 होता है। यदि $S_n = 399$ हो तो $n = . . .$

(A) 42 (B) 38 (C) 21 (D) 19

2. −11, −8, −5, . . . , 49 इस अंकगणितीय शृंखला का अंत से चौथा पद ज्ञात कीजिए।

3. एक अंकगणितीय शृंखला का 10 वाँ पद 46 है 5 वें तथा 7 वें पदों का योगफल 52 हो तो वह शृंखला ज्ञात कीजिए।

4. किसी अंकगणितीय शृंखला का 4 था पद −15 और 9 वाँ पद −30 है तो पहले 10 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

5. दो अंकगणितीय शृंखला 9, 7, 5, . . . और 24, 21, 18, ... दी गई हैं यदि इन दोनों शृंखलाओं के n वें पद समान हों तो n का मान ज्ञात कीजिए और n वाँ पद भी ज्ञात कीजिए।

6. यदि किसी अंकगणितीय शृंखला के तीसरे तथा 8 वें पदों का योगफल 7 हो और 7 वें तथा 14 वें पदों का योगफल −3 हो तो 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

7. एक अंकगणितीय शृंखला का पहला पद −5 और अंतिम पद 45 है। यदि उन सभी पदों का योगफल 120 हो तो वे कितने पद होंगे ? और उनका सामान्य अंतर कितना होगा ?

8. 1 से n तक की प्राकृत संख्याओं का योगफल 36 हो तो n का मान ज्ञात कीजिए ।

9. 207 इस संख्या के 3 भाग इस प्रकार कीजिए कि वे संख्याएँ अंकगणितीय शृंखला में हो तथा उनमें से दो छोटी संख्याओं का गुणनफल 4623 हो ।

10. एक अंकगणितीय शृंखला में 37 पद हैं । सबसे मध्य के तीन पदों का योगफल 225 है और अंतिम तीन पदों का योगफल 429 हो तो अंकगणितीय शृंखला लिखिए ।

★11. जिस अंकगणितीय शृंखला का प्रथम पद a, दूसरा पद b और अंतिम पद c हो तो उस शृंखला के सभी पदों का योगफल $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ है सिद्‌ध कीजिए ।

★12. यदि किसी अंकगणितीय शृंखला के पहले p पदों का योग पहले q पदों के योगफल के बराबर हो दिखाइए कि उसके पहले (p + q) पदों का योगफल शून्य है । $(p \neq q)$

★13. अंकगणितीय शृंखला को m वें पद का m गुना यह n वें पद के n गुने के बराबर हो तो दिखाइए कि उसका $(m + n)$ वाँ पद शून्य होता है ।

14. 1000 रू का 10% साधारण ब्याज की दर से निवेश किया तो प्रत्येक वर्ष के अंत में मिलनेवाली ब्याज की रकम अंकगणितीय शृंखला होगी क्या ? जाँच कीजिए । यदि अंकगणितीय शृंखला में हो तो 20 वर्ष के पश्चात प्राप्त होने वाली ब्याज की रकम ज्ञात कीजिए । इसके लिए नीचे दी गई कृति पूर्ण कीजिए ।

साधारण ब्याज = $\frac{P \times R \times N}{100}$

1 वर्ष के पश्चात प्राप्त होने वाला साधारण ब्याज = $\frac{1000 \times 10 \times 1}{100}$ = $\square$

2 वर्ष के पश्चात प्राप्त होने वाला साधारण ब्याज = $\frac{1000 \times 10 \times 2}{100}$ = $\square$

3 वर्ष के पश्चात प्राप्त होने वाला साधारण ब्याज = $\frac{\square \times \square \times \square}{100}$ = 300

इस प्रकार 4, 5, 6 वर्षों के पश्चात प्राप्त होने वाला ब्याज क्रमशः 400, $\square$, $\square$ होगा ।

इस संख्या के आधारपर d = $\square$, और a = $\square$

20 वर्ष के पश्चात प्राप्त होने वाला ब्याज

$t_n = a+(n-1)d$

$t_{20} = \square + (20-1)\square$

$t_{20} = \square$

20 वर्ष के पश्चात प्राप्त कुल ब्याज = $\square$