2 वर्गसमीकरण

आओ जानें

- वर्गसमीकरण : परिचय
- वर्गसमीकरण के मूल का स्वरूप
- वर्गसमीकरण हल करने की विधि
- मूल तथा गुणांको में संबंध
- वर्गसमीकरण का उपयोजन

थोड़ा याद करें

विद्यार्थी मित्रों, कक्षा नौंवी में हमने बहुपद का अध्ययन किया है। इसमें बहुपद के कोटी के अनुसार होने वाले प्रकार का अध्ययन किया है। एक चरांक वाले जिस बहुपद की कोटि एक होती है, उसे रेखीय बहुपद और जिसकी कोटि दो होती है, उसे वर्ग (द्‍विघात) बहुपद कहते हैं।

कृति : निम्न बहुपदों का रेखीय बहुपद और वर्ग बहुपद में वर्गीकरण करें।

$5x + 9$, $x^2 + 3x - 5$, $3x - 7$, $3x^2 - 5x$, $5x^2$

रेखीय बहुपद	वर्ग बहुपद

अब हम वर्ग बहुपद का मान 0 रखने पर जो समीकरण मिलेगा उसका अध्ययन करेंगे। ऐसे समीकरण को वर्ग समीकरण कहते है। हम दैनिक जीवन में अनेक बार इस वर्ग समीकरण का उपयोग करते है।

उदा. संकेत ने 200 वर्ग मी. क्षेत्रफलवाला एक आयताकार भूखंड खरीदा। भूखंड की लंबाई, चौड़ाई से 10 मीटर से अधिक हो तो उस भूखंड की लबांई तथा चौड़ाई कितनी होगी ?

माना भूखंड की लंबाई x मीटर है।

$\therefore$ लंबाई $= (x + 10)$ मीटर।

आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई

$\therefore\ 200 = (x + 10) \times x$

$\therefore\ 200 = x^2 + 10x$

अर्थात $x^2 + 10x = 200$

$\therefore\ x^2 + 10x - 200 = 0$

अब $x^2 + 10x - 200 = 0$ यह वर्गसमीकरण हल कर भूखंड की चौड़ाई तथा लंबाई निश्चित कर सकते हैं। वर्गसमीकरण कैसे हल करना है इसका अभ्यास करेंगे।

थोड़ा याद करें

कृति : $x^2 + 3x - 5$, $3x^2 - 5x$, $5x^2$; इन बहुपदों को घातांक स्वरूप में लिखकर उनके पदों के गुणांकों का निरीक्षण कर रिक्त स्थान भरो।

$x^2 + 3x - 5$, $3x^2 - 5x + 0$, $5x^2 + 0x + 0$

- ✦ x^2 का गुणांक क्रमश : [1], [3] , [+5] है। अर्थात 0 नहीं।
- ✦ x का गुणांक क्रमश : 3, [ ] तथा [ ] है।
- ✦ अचरांक क्रमश : [ ], [ ] तथा [ ] है।

यहाँ दूसरे तथा तीसरे बहुपद में अचरांक पद 0 है।

आओ जानें

वर्गसमीकरण का मानक रुप (Standard form of quadratic equation)

जिस एक चरांक वाले समीकरण में सभी घातांक पूर्ण संख्या हो तथा चर का अधिकतम घात 2 हो तो वह वर्ग समीकरण होता है ।

उसे मानक रूप में $ax^2 + bx + c = 0$ लिखते है।

$ax^2 + bx + c = 0$ में a, b तथा c वास्तविक संख्याए होने से a यह शून्येतर संख्या होती है।

$ax^2 + bx + c = 0$ इस स्वरूप वाले समीकरण को वर्ग समीकरण का मानक रूप कहते है।

निम्नलिखित सारिणी पूर्ण करो।

वर्गसमीकरण	मानक रूप	a	b	c
$x^2 - 4 = 0$	. . . .	1	0	4
$y^2 = 2y - 7$	. . . .	. . .	. . .	. . .
$x^2 + 2x = 0$	. . . .	. . .	. . .	. . .

हल किए गए उदाहरण

उदा. निम्नलिखित में से कौन-से समीकरण वर्ग समीकरण है निश्चित करें।

(1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ (2) $9y^2 + 5 = 0$

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ (4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

हल : (1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ इसमें एक ही चरांक है। चरांक का सबसे बड़ा घात 2 है।

$\therefore$ यह समीकरण वर्गसमीकरण है।

(2) $9y^2 + 5 = 0$ में चरांक का सबसे बड़ा घात 2 है ।

$\therefore$ यह समीकरण वर्ग समीकरण है ।

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ में चरांक का सबसे बड़ा घात 2 नहीं है ।

$\therefore$ यह समीकरण वर्गसमीकरण नहीं ।

(4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

$\therefore l(l - 5) + 2(l - 5) = 0$

$\therefore l^2 - 5l + 2l - 10 = 0$

$\therefore l^2 - 3l - 10 = 0$ में चरांक का सबसे बड़ा घात 2 है ।

$\therefore$ दिया गया समीकरण वर्गसमीकरण है ।

आओ जानें

वर्ग समीकरण के हल (Roots of a quadratic equations)

हम ने पिछली कक्षा में देखा है कि x का मान a रखने पर बहुपद का मान शून्य प्राप्त होता हो तो $(x-a)$ यह उस बहुपद का गुणनखंड होता है। अर्थात $p(x)$ यह बहुपद है और $p(a) = 0$ हो तो $(x-a)$ यह $p(x)$ का गुणनखंड होता है। इस स्थिति में a यह $p(x) = 0$ का एक हल है अथवा $p(x) = 0$ का मूल है ऐसा कहा जाता है ।

उदाहरणार्थ,

$x^2 + 5x - 6$ इस बहुपद में $x = -6$ रखने पर

$x^2 + 5x - 6 = (-6)^2 + 5 \times (-6) - 6$

$= 36 - 30 - 6 \quad = 0$

$\therefore x = -6$ यह इस वर्ग समीकरण का हल है

अर्थात -6 यह संख्या $x^2 + 5x - 6 = 0$ इस समीकरण का एक मूल (हल) है ।

$x^2 + 5x - 6$ इस बहुपद में $x = 2$ रखने पर

$x^2 + 5x - 6 = 2^2 + 5 \times 2 - 6$

$= 4 + 10 - 6$

$= 8 \neq 0$

$\therefore x = 2$ यह संख्या $x^2 + 5x - 6 = 0$ इस समीकरण का हल नहीं है ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. $2x^2 - 7x + 6 = 0$ इस समीकरण का (i) $x = \frac{3}{2}$ और (ii) $x = -2$ हल है क्या यह निश्चित करो ।

हल: (i) $2x^2 - 7x + 6$ इस बहुपद में $x = \frac{3}{2}$ मान रखने पर बहुपद का मान ज्ञात करेंगे ।

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{3}{2}\right) + 6$$

$$= 2 \times \frac{9}{4} - \frac{21}{2} + 6$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{21}{2} + \frac{12}{2} = 0$$

$\therefore$ इस समीकरण का $x = \frac{3}{2}$ एक हल है ।

(ii) $2x^2 - 7x + 6$ इस बहुपद में $x = -2$ यह मान रखकर बहुपद का मान ज्ञात करेंगे ।

$$2x^2 - 7x + 6 = 2(-2)^2 - 7(-2) + 6$$

$$= 2 \times 4 + 14 + 6$$

$$= 28 \neq 0$$

$\therefore$ $x = -2$ यह समीकरण का हल नही है ।

कृति : यदि $x = 5$ यह $kx^2 - 14x - 5 = 0$ इस समीकरण का एक मूल हो तो k का मान ज्ञात करने लिए निम्न कृति पूर्ण करें ।

हल : $kx^2 - 14x - 5 = 0$ इस वर्गसमीकरण का एक मूल $\square$ है ।

$\therefore$ $x = \square$ यह मान वर्गसमीकरण में रखने पर

$k\square^2 - 14\square - 5 = 0$

$\therefore$ $25k - 70 - 5 = 0$

$25k - \square = 0$

$25k = \square$

$\therefore$ $k = \frac{\square}{\square} = 3$

इसे ध्यान में रखें

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ यह वर्गसमीकरण का मानक रूप है । इसमें a, b तथा c वास्तविक संख्या होने पर a यह शून्येतर संख्या होती है ।

(2) चरांकों के जिस मान के लिए वर्गसमीकरण के दोनों पक्ष समान होते हैं (अर्थात वर्गसमीकरण का समाधान करते हैं) उस मान को वर्गसमीकरण का हल या वर्गसमीकरण का मूल कहते हैं ।

प्रश्नसंग्रह 2.1

(1) कोई भी दो वर्गसमीकरण लिखिए ।

(2) निम्नलिखित समीकरणों में से कौन–से वर्गसमीकरण हैं ?

(1) $x^2 + 5x - 2 = 0$ (2) $y^2 = 5y - 10$ (3) $y^2 + \frac{1}{y} = 2$

(4) $x + \frac{1}{x} = -2$ (5) $(m + 2)(m - 5) = 0$ (6) $m^3 + 3m^2 - 2 = 3m^3$

(3) निम्नलिखित समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ इस स्वरूप में लिखिए, तथा प्रत्येक के लिए a, b, c का मान ज्ञात करें ।

(1) $2y = 10 - y^2$ (2) $(x - 1)^2 = 2x + 3$ (3) $x^2 + 5x = -(3 - x)$

(4) $3m^2 = 2m^2 - 9$ (5) $p(3 + 6p) = -5$ (6) $x^2 - 9 = 13$

(4) वर्गसमीकरण के साथ दिए गए चर का मान, इन समीकरणों का मूल है क्या ? निश्चित करें ।

(1) $x^2 + 4x - 5 = 0$, $x = 1, -1$ (2) $2m^2 - 5m = 0$, $m = 2, 5/2$

(5) यदि $x = 3$ यह $kx^2 - 10x + 3 = 0$ इस वर्गसमीकरण का एक मूल है, तो k का मान कितना होगा ?

(6) $5m^2 + 2m + k = 0$ इस वर्गसमीकरण का एक मूल $\frac{-7}{5}$ हो तो k का मान ज्ञात करने के लिए निम्न कृति पूरी करें ।

हल : $5m^2 + 2m + k = 0$ इस वर्गसमीकरण का एक मूल $\square$ है ।

$\therefore\ m = \square$ ऊपरोक्त वर्गसमीकरण में रखने पर

$5 \times \square^2 + 2 \times \square + k = 0$

$\square + \square + k = 0$

$\square + k = 0$

$k = \square$

थोड़ा याद करें

हमने पिछले वर्ष बहुपद प्रकरण में $x^2 - 4x - 5$, $2m^2 - 5m$, $a^2 - 25$ ऐसे गुणनखंड ज्ञात करने की विधि का अध्ययन किया है । निम्नलिखित कृति कर उसका पुनरावृती करेंगे ।

कृति : नीचे दिए गए बहुपदों के गुणनखंड ज्ञात करेंगे ।

(1) $x^2 - 4x - 5$

$= \underline{x^2 - 5x} + \underline{1x - 5}$ (-5 → -5, $+1$)

$= x(\ldots\ldots) + 1(\ldots\ldots)$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

(2) $2m^2 - 5m$

$= \ldots\ldots\ldots$

(3) $a^2 - 25$

$= a^2 - 5^2$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

आओ जानें

गुणनखंड विधि से वर्गसमीकरण हल करना

(Solution of a quadratic equation by factorisation)

हमनें चर का भिन्न- भिन्न मान रखकर वर्गसमीकरण का हल निश्चित किया है । किंतु यह अधिक समय लगानेवाली विधि है । इसलिए हम इस भाग में वर्गसमीकरण का मूल गुणनखंड विधि से ज्ञात करने का अध्ययन करेंगे ।

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$$

यहाँ $(x - 5)$ तथा $(x + 1)$ यह वर्ग (द्विघात) बहुपद $x^2 - 4x - 5$ के दो रेखीय गुणनखंड है । इसलिए $x^2 - 4x - 5$ इस बहुपद से मिलने वाले $x^2 - 4x - 5 = 0$ को निम्नालिखित प्रकार से लिख सकते हैं ।

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

यदि दो संख्याओं का गुणनफल शून्य हो तो उन दोनों संख्याओं में से कम से कम एक संख्या शून्य होती है ।

$\therefore\ x - 5 = 0$ या $x + 1 = 0$

$\therefore\ x = 5$ या $x = -1$

$\therefore$ दिए गए वर्गसमीकरण के मूल 5 और −1 है ।

यह उदहरण हल करते हुए हमने बहुपद के दो रेखीय गुणनखंड प्राप्त किए । इस विधि से वर्गसमीकरण को हल करने की विधि को गुणनखंड विधि कहते हैं ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. निम्न वर्गसमीकरणों को गुणनखंड विधि से हल करो ।

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$ (2) $3x^2 - x - 10 = 0$

(3) $3y^2 = 15y$ (4) $x^2 = 3$ (5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

(13 → −13, −1)

$\therefore\ m^2 - 13m - 1m + 13 = 0$

$\therefore\ m(m - 13) - 1(m - 13) = 0$

$\therefore\ (m - 13)(m - 1) = 0$

$\therefore\ m - 13 = 0$ या $m - 1 = 0$

$\therefore\ m = 13$ या $m = 1$

$\therefore$ दिए गए वर्गसमीकरण के मूल 13 और 1 हैं ।

(2) $3x^2 - x - 10 = 0$

($3 \times (-10) = -30$ → −6, +5)

$\therefore\ 3x^2 - 6x + 5x - 10 = 0$

$\therefore\ 3x(x - 2) + 5(x - 2) = 0$

$\therefore\ (3x + 5)(x - 2) = 0$

$\therefore\ (3x + 5) = 0$ या $(x - 2) = 0$

$\therefore\ x = -\frac{5}{3}$ या $x = 2$

$\therefore$ दिए गए वर्गसमीकरण के मूल $-\frac{5}{3}$ और 2 हैं ।

(3) $3y^2 = 15y$

$\therefore\ 3y^2 - 15y = 0$

$\therefore\ 3y(y - 5) = 0$

$\therefore\ 3y = 0$ या $(y - 5) = 0$

$\therefore\ y = 0$ या $y = 5$

$\therefore$ दिए गए वर्गसमीकरण के मूल 0 और 5 हैं ।

(4) $x^2 = 3$

$\therefore\ x^2 - 3 = 0$

$\therefore\ x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

$\therefore\ (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ (x + \sqrt{3}) = 0$ या $(x - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ x = -\sqrt{3}$ या $x = \sqrt{3}$

$\therefore$ दिए गए वर्गसमीकरण के मूल $-\sqrt{3}$ और $\sqrt{3}$ हैं ।

(5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

$\therefore\ 6\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ 6\sqrt{3}x^2 + 9x - 2x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ 3\sqrt{3}x(2x + \sqrt{3}) - 1(2x + \sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ (2x + \sqrt{3})(3\sqrt{3}x - 1) = 0$

$\therefore\ 2x + \sqrt{3} = 0$ या $3\sqrt{3}x - 1 = 0$

$\therefore\ 2x = -\sqrt{3}$ या $3\sqrt{3}x = 1$

$\therefore\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ या $x = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ और $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ हैं ।

$6\sqrt{3} \times -\sqrt{3} = -18$

-18

$9 \quad -2$

$9 = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

प्रश्नसंग्रह 2.2

निम्न वर्गसमीकरणों को गुणनखंड विधि से हल करें ।

(1) $x^2 - 15x + 54 = 0$ (2) $x^2 + x - 20 = 0$ (3) $2y^2 + 27y + 13 = 0$

(4) $5m^2 = 22m + 15$ (5) $2x^2 - 2x + \dfrac{1}{2} = 0$ (6) $6x - \dfrac{2}{x} = 1$

(7) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ इस वर्गसमीकरण को गुणनखंड विधि से हल करने के लिए निम्न कृति पूरी करें।

हल : $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$\sqrt{2}x^2 + \boxed{} + \boxed{} + 5\sqrt{2} = 0$

$x(\,.\,.\,.\,.\,.\,) + \sqrt{2}(\,.\,.\,.\,.\,.\,) = 0$

$(\ldots\ldots)(x + \sqrt{2}) = 0$

$(\ldots\ldots) = 0$ या $(x + \sqrt{2}) = 0$

$\therefore\ x = \square$ या $x = -\sqrt{2}$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल $\square$ और $-\sqrt{2}$ है ।

(8*) $3x^2 - 2\sqrt{6}\ x + 2 = 0$ (9) $2m\,(m - 24) = 50$

(10) $25m^2 = 9$ (11) $7m^2 = 21m$ (12) $m^2 - 11 = 0$

आओ जानें

पूर्ण वर्ग विधि से वर्गसमीकरण हल करना
(Solution of a quadratic equation by completing the square)

शिक्षक : $x^2 + 10\,x + 2 = 0$ यह वर्गसमीकरण है या नहीं ?

योगेश : जी श्रीमान, क्योंकि $ax^2 + bx + c = 0$ इस स्वरूप में है यहाँ x इस चरांक का अधिक-से-अधिक घात 2 है । a का मान शून्य नहीं हैं ।

शिक्षक : क्या इस समीकरण को आप हल कर सकते हो ?

वर्षा : नहीं श्रीमान, क्योंकि 2 इस संख्या का गुणनखंड नहीं बता सकते जिनका योगफल 10 होगा ।

शिक्षक : इसीलिए ऐसे उदाहरणों को हल करने के लिए भिन्न विधि का उपयोग करना होगा । इस विधि को समझेंगे ।

$x^2 + 10\,x$ इस राशि में योग्य पद जोड़ने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त होगा ।

यदि $x^2 + 10\,x + k = (x + a)^2$

तो $x^2 + 10\,x + k = x^2 + 2ax + a^2$

$\therefore\ 10 = 2a$ या $a = 5$ और $k = a^2 = 25$

$\therefore\ a = 5$ और इसलिए $k = a^2 = (5)^2 = 25$

अब $x^2 + 10\,x + 2 = (x + 5)^2 - 25 + 2 = (x + 5)^2 - 23$

$x^2 + 10\,x + 2 = 0$ यह समीकरण क्या अब आप हल कर सकते हो ?

रेहाना : जी श्रीमान, समीकरण के बाँए पक्ष में दो वर्गों के घटाने के रूप में आने से इसके गुणनखंड ज्ञात कर सकते हैं ।

$(x + 5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$

$\therefore\ (x + 5 + \sqrt{23})(x + 5 - \sqrt{23}) = 0$

$\therefore\ x + 5 + \sqrt{23} = 0$ या $x + 5 - \sqrt{23} = 0$

$\therefore\ x = -5 - \sqrt{23}$ या $x = -5 + \sqrt{23}$

हमीद : श्रीमान, हल करने की एक भिन्न विधि मुझे ध्यान में आयी है ।

$(x + 5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$

$\therefore (x + 5)^2 = (\sqrt{23})^2$

$\therefore x + 5 = \sqrt{23}$ या $x + 5 = -\sqrt{23}$

$\therefore x = -5 + \sqrt{23}$ या $x = -5 - \sqrt{23}$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) हल करो : $5x^2 - 4x - 3 = 0$

हल : समीकरण में वर्ग राशि का रूपांतरण, दो वर्गों के जोड़- घटाना के रूप में लाने के लिए x^2 का गुणांक 1 सहजता से होगा । इसलिए दिए गए समीकरण को 5 से भाग देने पर

$x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$

अब यदि $x^2 - \frac{4}{5}x + k = (x - a)^2$ तब $x^2 - \frac{4}{5}x + k = x^2 - 2ax + a^2$.

$x^2 - \frac{4}{5}x$ की तुलना $x^2 - 2ax$ से करने पर

$-2ax = -\frac{4}{5}x \quad \therefore a = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$

$\therefore k = a^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

अब $x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$

$\therefore x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{4}{25} - \frac{3}{5} = 0$

$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{5}\right) = 0$

$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{19}{25}\right) = 0$

$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{19}{25}\right)$

$\therefore x - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{19}}{5}$ या $x - \frac{2}{5} = -\frac{\sqrt{19}}{5}$

$\therefore x = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5}$ या $x = \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$

$\therefore x = \frac{2+\sqrt{19}}{5}$ या $x = \frac{2-\sqrt{19}}{5}$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल $\frac{2+\sqrt{19}}{5}$ और $\frac{2-\sqrt{19}}{5}$

> समीकरण $x^2 + bx + c = 0$ इस स्वरूप में हों तो
> $x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$
> इस स्वरूप में
> अर्थात $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ इस रूप में लिख सकते हैं ।

उदा. (2) हल करो : $x^2 + 8x - 48 = 0$

विधि I : पूर्ण वर्ग विधि

$x^2 + 8x - 48 = 0$

$\therefore\ x^2 + 8x + 16 - 16 - 48 = 0$

$\therefore\ (x + 4)^2 - 64 = 0$

$\therefore\ (x + 4)^2 = 64$

$\therefore\ x + 4 = 8$ या $x + 4 = -8$

$\therefore\ x = 4$ या $x = -12$

विधि II : गुणनखंड विधि

$x^2 + 8x - 48 = 0$

$\therefore\ x^2 + 12x - 4x - 48 = 0$

$\therefore\ x(x + 12) - 4(x + 12) = 0$

$\therefore\ (x + 12)(x - 4) = 0$

$\therefore\ x + 12 = 0$ या $x - 4 = 0$

$\therefore\ x = -12$ या $x = 4$

प्रश्नसंग्रह 2.3

निम्न वर्गसमीकरण पूर्ण वर्ग विधि से हल करें ।

(1) $x^2 + x - 20 = 0$ (2) $x^2 + 2x - 5 = 0$ (3) $m^2 - 5m = -3$

(4) $9y^2 - 12y + 2 = 0$ (5) $2y^2 + 9y + 10 = 0$ (6) $5x^2 = 4x + 7$

आओ जानें

वर्ग समीकरण हल करने का सूत्र (Formula for solving a quadratic equations)

$ax^2 + bx + c$, इस राशि को a से भाग देनेपर ($\because\ a \neq 0$) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ यह राशि मिलेगी ।

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ इस राशि को दो वर्गों के घटाने के रूप में रख कर $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ इस समीकरण का अर्थात $ax^2 + bx + c = 0$ इस समीकरण का सामान्य हल या मूल ज्ञात करते हैं ।

$$ax^2 + bx + c = 0 \ldots \text{(I)}$$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ . . . . . दोनों पक्षों में a से भाग देनेपर

$$\therefore\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0 \qquad \therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\therefore\ x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ या } x+\frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore\ x = -\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ या } x = -\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ या } x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

इस हल को संक्षेप में $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ऐसा लिखते है और उसे α (अल्फा), β (बीटा) इन अक्षरों से दिखाते हैं। $\therefore\ \alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ और $\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ . . . . (I)

$ax^2 + bx + c = 0$ इस समीकरण में a, b, c का मान $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ इस राशि में रखकर, सरल रुप देनेपर समीकरण के हल प्राप्त होते हैं। इसलिए $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ वर्ग समीकरण हल करने का सूत्र कहते हैं। (वर्गसमीकरण के दो हलों में से किसी भी एक हल को किसी भी चिह्न द्वारा दर्शा सकते हैं।)

कथन (I) के बजाय $\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ और $\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ . . . . (II)

ऐसा माना जाता है।

हल किए गए उदाहरण

सूत्रों का उपयोग कर निम्न वर्गसमीकरण हल करें।

उदा.(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

हल : $m^2 - 14m + 13 = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$ तुलना करने पर

$a = 1,\ b = -14,\ c = 13,$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 13$

$= 196 - 52$

$= 144$

$$m = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-14)\pm\sqrt{144}}{2\times 1}$$

$$= \frac{14\pm 12}{2}$$

$\therefore\ m = \frac{14+12}{2}$ या $m = \frac{14-12}{2}$

$\therefore\ m = \frac{26}{2}$ या $m = \frac{2}{2}$

$\therefore\ m = 13$ या $m = 1$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल 13 और 1 है।

उदा. (2) $x^2 + 10x + 2 = 0$

हल : $x^2 + 10x + 2 = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$ तुलना करने पर

$a = 1,\ b = 10,\ c = 2,$

$\therefore b^2 - 4ac = (10)^2 - 4 \times 1 \times 2$

$= 100 - 8$

$= 92$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{4 \times 23}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2}$$

$$= \frac{2(-5 \pm \sqrt{23})}{2}$$

$\therefore \quad x = -5 \pm \sqrt{23}$

$\therefore \quad x = -5 + \sqrt{23}$ या $x = -5 - \sqrt{23}$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल $-5 + \sqrt{23}$ और $-5 - \sqrt{23}$ हैं।

उदा. (3) $x^2 - 2x - 3 = 0$

हल : दिए गए समीकरण में से $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = 1,\ b = -2,\ c = -3,$

$\therefore b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$

$\therefore \quad x = \dfrac{-(-2) + \sqrt{16}}{2}$ या $x = \dfrac{-(-2) - \sqrt{16}}{2}$

$= \dfrac{2+4}{2}$ या $\dfrac{2-4}{2}$

$= 3$ या -1

अधिक जानकारी हेतु :

$x^2 - 2x - 3 = 0$ इसी वर्गसमीकरण को आलेख की सहायता से हल किया गया है उसे समझेंगे ।

$x^2 - 2x - 3 = 0$ अर्थात $x^2 = 2x + 3$

x की जिस मान का $x^2 = 2x + 3$ समीकरण संपुष्ट करता है यह मान इस समीकरण का हल होगा

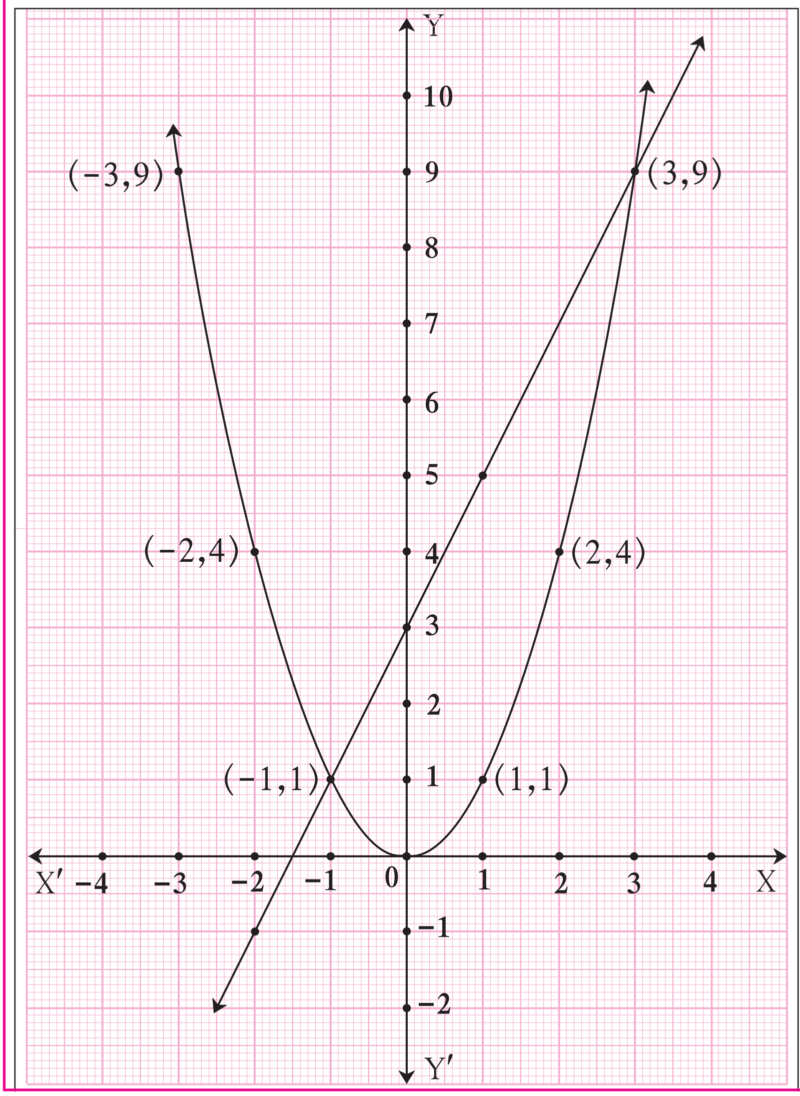
$y = x^2 = 2x + 3$ में माना $y = x^2$ और $y = 2x + 3$ इस समीकरण का आलेख खीचेंगे ।

$y = x^2$

x	3	2	1	0	−1	−2	−3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y = 2x + 3$

x	−1	0	1	−2
y	1	3	5	−1



यह आलेख परस्पर (−1, 1) और (3, 9) इन बिंदुओ मे प्रतिच्छेदित करते हैं ।

$\therefore$ $x^2 = 2x + 3$ इस समीकरण का अर्थात $x^2 - 2x - 3 = 0$ का हल $x = -1$ या $x = 3$ होगा

संलग्न आकृति में $y = x^2$ और $y = 2x + 3$ का आलेख खींचा गया हैं

इनके प्रतिच्छेदित बिंदु से $x^2 = 2x + 3$ इस समीकरण का अर्थात $x^2 - 2x - 3 = 0$ का हल कैसे प्राप्त होगा इसे समझेंगे ।

उदा. (4) $25x^2 + 30x + 9 = 0$

हल : $25x^2 + 30x + 9 = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$ तुलना करने पर

$a = 25,\ b = 30,\ c = 9,$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (30)^2 - 4 \times 25 \times 9$

$= 900 - 900 \quad = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-30 \pm \sqrt{0}}{2 \times 25}$$

$\therefore\ x = \frac{-30+0}{50}$ या $x = \frac{-30-0}{50}$

$\therefore\ x = -\frac{30}{50}$ या $x = -\frac{30}{50}$

$\therefore\ x = -\frac{3}{5}$ या $x = -\frac{3}{5}$

ध्यान दें, कि $25x^2 + 30x + 9 = 0$ इस समीकरण के दोनों मूल समान हैं ।

इसी प्रकार $25x^2 + 30x + 9 = 0$

$(5x + 3)^2 = 0$ इसे ध्यान रखे ।

उदा. (5) $x^2 + x + 5 = 0$

हल: $x^2 + x + 5 = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = 1,\ b = 1,\ c = 5,$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 5$

$= 1 - 20$

$= -19$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

किंतु $\sqrt{-19}$ यह वास्तविक संख्या नहीं है । इसलिए दिए गए वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक संख्या नहीं हैं ।

कृति : $2x^2 + 13x + 15 = 0$ इस वर्गसमीकरण को गुणनखंड विधि पूर्ण वर्ग विधि तथा सूत्र विधि का उपयोग कर हल करें । उत्तर समान ही प्राप्त होगा जांच करें ।

प्रश्नसंग्रह 2.4

1. निम्नलिखित वर्ग समीकरणों की मानक रूप से तुलना कर a, b, c मान लिखें ।

   (1) $x^2 - 7x + 5 = 0$ (2) $2m^2 = 5m - 5$ (3) $y^2 = 7y$

2. निम्नलिखित वर्गसमीकरण सूत्र विधि से हल करें ।

   (1) $x^2 + 6x + 5 = 0$ (2) $x^2 - 3x - 2 = 0$ (3) $3m^2 + 2m - 7 = 0$

   (4) $5m^2 - 4m - 2 = 0$ (5) $y^2 + \frac{1}{3}y = 2$ (6) $5x^2 + 13x + 8 = 0$

(3) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ इस वर्गसमीकरण को सूत्र की सहायता से निम्न प्रवाह आकृति में दी गई जानकारी के अनुसार हल करें ।

हल :

$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर a, b, c का मान निश्चित करें । → $b^2 - 4ac$ का मान ज्ञात करें । → वर्गसमीकरण हल करने की सूत्र विधि लिखें । → सूत्र में मान रखकर हल ज्ञात करें ।

आओ जानें

वर्गसमीकरण के मूलों का स्वरूप : (Nature of roots of a quadratic equation)

हमने अध्ययन किया है कि वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का मूल $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ होते हैं।

(1) यदि $b^2 - 4ac = 0$ हो तो $x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक तथा समान होते हैं ।

(2) यदि $b^2 - 4ac > 0$ हो तो $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

अर्थात $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ और $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक तथा असमान होते है ।

(3) यदि $b^2 - 4ac < 0$ हो तो $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ यह वास्तविक संख्या नहीं होती है । अर्थात वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक संख्या नहीं होते ।

इसलिए वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों का स्वरुप $b^2 - 4ac$ के मान पर निश्चित होता है । $b^2 - 4ac$ को वर्गसमीकरण का विवेचक (discriminant) कहते है । उसे Δ (डेल्टा) चिहन से दर्शाया जाता है । (Δ यह ग्रीक अक्षर है ।)

कृति : नीचे दी गई जानकारी के अनुसार रिक्त स्थान भरें ।

	विवेचक का मान		मूलों का स्वरुप
(1)	50	→	
(2)	-30	→	
(3)	0	→	

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) $x^2 + 10x - 7 = 0$ इस समीकरण में विवेचक का मान ज्ञात करो ।

हल : $x^2 + 10x - 7 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

$a = 1,\ b = \boxed{10}\ ,\ c = \boxed{-7}\ ,$

$\therefore\ b^2 - 4ac = \boxed{10}^2 - 4 \times 1 \times \boxed{-7}$

$= \boxed{100} + \boxed{28}$

$= \boxed{128}$

उदा. (2) विवेचक के आधार पर वर्गसमीकरण के मूलों का स्वरुप निश्चित करें ।

(i) $2x^2 - 5x + 7 = 0$

हल : $2x^2 - 5x + 7 = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

यहा $a = 2,\ b = -5\ ,\ c = 7\ ,$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7$

$\Delta = 25 - 56$

$\Delta = -31$

$\therefore\ b^2 - 4ac < 0$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक संख्या नहीं है ।

(ii) $x^2 + 2x - 9 = 0$

हल : $x^2 + 2x - 9 = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

यहाँ $a = \boxed{},\ b = 2,\ c = \boxed{},$

$\therefore\ b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times \boxed{} \times \boxed{}$

$\Delta = 4 - \boxed{}$

$\Delta = 40$

$\therefore\ b^2 - 4ac > 0$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक तथा असमान हैं।

उदा. (3) $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$

हल : $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

यहाँ $a = \sqrt{3},\ b = 2\sqrt{3}\ ,\ c = \sqrt{3}\ ,$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$= 4 \times 3 - 4 \times 3$

$= 12 - 12$

$= 0$

$\therefore\ b^2 - 4ac = 0$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक तथा समान हैं ।

आओ जानें

वर्गसमीकरण के मूल तथा गुणांकों में संबंध (Relation between roots and coefficients of quadratic equation)

यदि $ax^2 + bx + c = 0$ इस समीकरण के मूल α तथा β हों तो

$$\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= -\frac{2b}{2a}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

इसी प्रकार

$$\alpha \times \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\times\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \alpha\,\beta = \frac{c}{a}$$

कृती : निचे दिए गऐ चौखट में योग्य संख्या भरो.

$10x^2 + 10x + 1 = 0$ के लिये $\alpha + \beta$ = ☐ और

$\alpha \times \beta$ = ☐

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) α और β यह $2x^2 + 6x - 5 = 0$ इस वर्गसमीकरण के मूल हो, तो $\alpha + \beta$ और $\alpha \times \beta$ का मान ज्ञात करें ।

हल : $2x^2 + 6x - 5 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$\therefore\ a = 2,\ b = 6\ ,\ c = -5$

$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$

और $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$

उदा. (2) वर्गसमीकरण $x^2 - 13x + k = 0$ के मूलों का अंतर 7 हो, तो k का मान ज्ञात करो ।

हल : $x^2 - 13x + k = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

$a = 1, \ b = -13, \ c = k$

मानो α और β दिए गए वर्गसमीकरण के मूल हैं ।

और $\alpha > \beta$ गृहीत मानकर

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-13)}{1} = 13 \ . \ . \ . \ (I)$

किंतु $\alpha - \beta = 7$ . . . . (दिया गया है) (II)

$2\alpha = 20$ . . . (समीकरण (I) तथा (II) को जोड़ने पर)

$\therefore \alpha = 10$

$\therefore 10 + \beta = 13$ . . . ((I) से)

$\therefore \beta = 13 - 10$

$\therefore \beta = 3$

किंतु $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$

$\therefore 10 \times 3 = \frac{k}{1}$

$\therefore k = 30$

उदा. (3) α और β वर्गसमीकरण $x^2 + 5x - 1 = 0$ के मूल हों तो

(i) $\alpha^3 + \beta^3$ (ii) $\alpha^2 + \beta^2$ के मान ज्ञात करो ।

हल : $x^2 + 5x - 1 = 0$

$a = 1, \ b = 5, \ c = -1$

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$

$\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$

(i) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= (-5)^3 - 3 \times (-1) \times (-5)$

$= -125 - 15$

$\alpha^3 + \beta^3 = -140$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (-5)^2 - 2 \times (-1)$

$= 25 + 2$

$\alpha^2 + \beta^2 = 27$

आओ जानें

मूल दिए गए हों तो वर्गसमीकरण कैसे प्राप्त करेंगे ?

माना α और β चर x चरांकवाले वर्गसमीकरण के मूल हैं ।

$\therefore\ x = \alpha$ या $x = \beta$

$\therefore\ x - \alpha = 0$ या $x - \beta = 0$

$\therefore\ (x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$\therefore\ x^2 - (\alpha + \beta)\,x + \alpha\beta = 0$

अर्थात α और β मूल वाले वर्गसमीकरण में x^2 - (मूलो का योगफल) x + मूलों का गुणनफल = 0 इस सूत्र से प्राप्त करेंगे ।

कृति (I) : मूलों का योगफल = 10 और मूलों का गुणनफल = 9 का उपयोग कर वर्ग समीकरण लिखो ।

$\therefore$ वर्गसमीकरण $x^2 - \square\, x + \square = \square$

कृति (II) : $\alpha = 2$ और $\beta = 5$ मूलवाले वर्गसमीकरण कौन-से हैं ?

$x^2 - (\square + \square)x + \square \times \square = 0$ ऐसा लिखा जाता है ।

अर्थात $\square\, x^2 - \square\, x + \square = 0$ ऐसे लिखते है ।

इस समीकरण को किसी भी शुन्येतर संख्या से गुणा करने पर प्राप्त समीकरण के मूल α और β होते है इसे ध्यान में रखें ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. 1 जिस वर्गसमीकरण के मूल −3 तथा −7 हों ऐसे वर्गसमीकरण बनाइए ।

हल : माना $\alpha = -3$ और $\beta = -7$

$\therefore\ \alpha + \beta = (-3) + (-7) = -10$ और $\alpha\times\beta = (-3) \times (-7) = 21$

$\therefore$ प्राप्त होने वाले वर्गसमीकरण, $x^2 - (\alpha + \beta)\,x + \alpha\beta = 0$

$\therefore\ x^2 - (-10)\,x + 21 = 0$

$\therefore\ x^2 + 10x + 21 = 0$

इसे ध्यान मे रखें

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ इस वर्गसमीकरण के मूल α और β हों, तो

(1) $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ और $\beta = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(2) $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ और $\alpha \times \beta = \dfrac{c}{a}$

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ इस वर्गसमीकरण के मूलो का स्वरुप $b^2 - 4ac$ इस राशि के मान पर आधारित होता है। इसलिए इस राशि को विवेचक (discriminant) कहते हैं। विवेचक को Δ इस ग्रीक अक्षर से दर्शाते हैं।

(3) यदि $\Delta = 0$ हो, तो वर्गसमीकरण के दोनों मूल दो समान वास्तविक संख्याए होती हैं।

यदि $\Delta > 0$ हो, तो वर्गसमीकरण के दोनों मूल विभिन्न वास्तविक संख्याए होती है।

यदि $\Delta < 0$ हो, तो वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक संख्या नहीं होती हैं।

(4) जिस के वर्गसमीकरण के मूल α तथा β होते हो, वे वर्गसमीकरण $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ होते हैं।

प्रश्नसंग्रह 2.5

1. निम्नलिखित रिक्त चौखट भरिए।

(1) वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ → $b^2 - 4ac = 5$ / $b^2 - 4ac = -5$ → मूलों के स्वरूप

(2) मूलों का योगफल = −7 → वर्गसमीकरण . . . . ← मूलों का गुणनफल = 5

(3) यदि α तथा β यह दिए गए वर्गसमीकरण के मूल हो तो,

$2x^2 - 4x - 3 = 0$ → $\alpha + \beta = \ldots\ldots$; $\alpha \times \beta = \ldots\ldots$

2. निम्नलिखित वर्गसमीकरणों के लिए विवेचक का मान ज्ञात कीजिए।

(1) $x^2 + 7x - 1 = 0$ (2) $2y^2 - 5y + 10 = 0$ (3) $\sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} = 0$

3. विवेचक के आधार पर निम्नलिखित वर्गसमीकरणों के मूल निश्चित कीजिए।

(1) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (2) $2y^2 - 7y + 2 = 0$ (3) $m^2 + 2m + 9 = 0$

4. वर्गसमीकरण प्राप्त करें जिनके मूल निम्नलिखित हैं ।

(1) 0 तथा 4 (2) 3 तथा -10 (3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (4) $2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}$

5*. $x^2 - 4kx + k + 3 = 0$ इस वर्गसमीकरण के मूलों का योगफल उसके गुणनफल का दुगना हो तो k का मान ज्ञात करीए ।

6*. यदि α और β यह $y^2 - 2y - 7 = 0$ इस वर्गसमीकरण के मूल हो तो,

(1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\alpha^3 + \beta^3$ का मान ज्ञात करो ।

7. निम्नलिखित वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक तथा समान हों तो k का मान ज्ञात करीए।

(1) $3y^2 + ky + 12 = 0$ (2) $kx(x - 2) + 6 = 0$

वर्गसमीकरण का उपयोजन (Application of quadratic equation)

आओ जानें

दैनिक जीवन के अनेक मुद्दों का हल प्राप्त करने के लिए वर्गसमीकरण उपयोगी होता है । ऐसे ही मुद्दों का अध्ययन हम इस भाग में करने वाले हैं ।

उदा. (1) तिवसा ग्राम में श्री. रत्नाकरराव के खेत में प्याज से भरी आयताकार जाली के आधार की लंबाई उसकी चौड़ाई से 7 मीटर अधिक है और विकर्ण, लंबाई से 1 मीटर से अधिक हो, तो प्याज से भरी उस जाली की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात करो ।

हल : माना आयताकार प्याज से भरी आयताकार जाली के आधार की चौड़ाईx मीटर है ।

$\therefore$ लंबाई = $(x + 7)$ मीटर, विकर्ण = $x + 7 + 1 = (x + 8)$ मीटर

पाइथागोरस के प्रमेय से,

$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$

$x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$

$\therefore x^2 + 14x - 16x + 49 - 64 = 0$

$\therefore x^2 - 2x - 15 = 0$

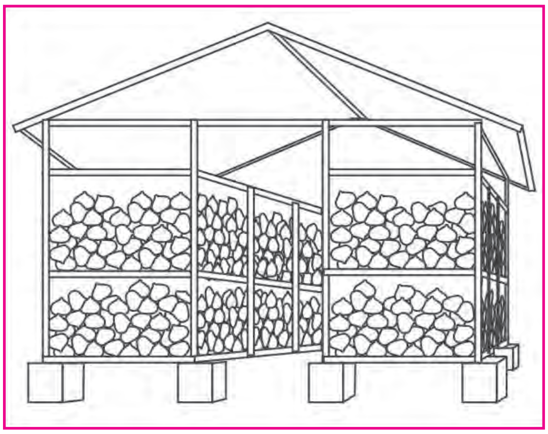
$\therefore x^2 - 5x + 3x - 15 = 0$

$\therefore x(x - 5) + 3(x - 5) = 0$

$\therefore (x - 5)(x + 3) = 0$

$\therefore x - 5 = 0$ या $x + 3 = 0$

$\therefore x = 5$ या $x = -3$



प्याज से भरी जाली (कांदाचाळ)

किंतु चौड़ाई ऋणात्मक नहीं होती । $\therefore x \neq -3$

$\therefore x = 5$ और $x + 7 = 5 + 7 = 12$

$\therefore$ प्याज से भरी जाली के आधार की लंबाई 12 मीटर और चौड़ाई 5 मीटर होगी ।

उदा. (2) एक रेलगाड़ी समान चाल से 360 किमी की दूरी तय करती है । यदि उसकी चाल 5 किमी प्रति घंटा से बढ़ा दिया जाय तो वही दूरी तय करने में 48 मिनट कम समय लगता है । रेलगाड़ी की चाल ज्ञात कीजिए ।

हल : माना कि रेलगाड़ी का प्रारंभिक चाल x किमी प्रति घंटा है ।

$\therefore$ रेलगाड़ी की चाल बढ़ने पर चाल $(x+5)$ किमी / घंटा होगी

360 किमी दूरी तय करने में लगनेवाला प्रारंभिक समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{360}{x}$ घंटा ।

चाल बढ़ने पर उसी दूरी को तय करने में लगनेवाला समय = $\frac{360}{x+5}$

दी गई शर्त के अनुसार

$\frac{360}{x+5} = \frac{360}{x} - \frac{48}{60}$ ----- ($\because$ 48 मिनट = $\frac{48}{60}$ घंटा)

$\therefore \frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = \frac{48}{60}$

$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{48}{60\times 360}$ ----- (दोनों पक्षों में 360 से भाग देने पर)

$\therefore \frac{x+5-x}{x(x+5)} = \frac{4}{5\times 360}$

$\therefore \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{5\times 90}$

$\therefore \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{450}$

$\therefore x^2 + 5x = 2250$

$\therefore x^2 + 5x - 2250 = 0$

$\therefore x^2 + 50x - 45x - 2250 = 0$

$\therefore x(x+50) - 45(x+50) = 0$

$\therefore (x+50)(x-45) = 0$

$\therefore x + 50 = 0$ या $x - 45 = 0$

$\therefore x = -50$ या $x = 45$

-2250: $+50$, -45

किंतु चाल ऋणात्मक नहीं होती $\therefore x \neq -50$

$\therefore x = 45$

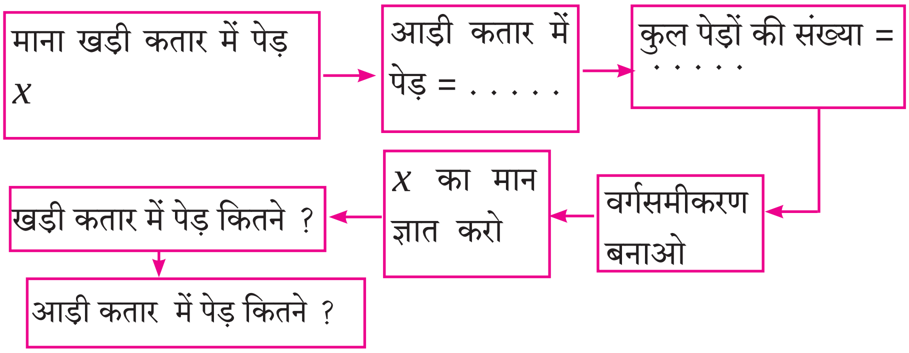
$\therefore$ रेलगाड़ी की प्रारंभिक चाल 45 किमी/ घंटा होगी ।

प्रश्नसंग्रह 2.6

1. प्रगती की 2 वर्ष पूर्व और 3 वर्ष के बाद की आयु का गुणनफल 84 है, तो उसकी वर्तमान आयु ज्ञात करो ?

2. दो क्रमिक सम प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योगफल 244 है, वे संख्याएँ ज्ञात करें ।

3. श्री. मधुसूदन के संतरा के बगीचे में आड़ी कतार में पेड़ों की संख्या, खड़ी कतार के पेड़ों की संख्या से 5 अधिक है । यदि संतरे के बगीचे में कुल 150 पेड़ हो । तो आड़ी तथा खड़ी कतार में पेड़ों की संख्या कितनी होगी ? निम्न प्रवाहआकृति के आधार पर उदाहरण हल कीजिए ।



4. विवेक किशोर से 5 वर्ष से बड़ा है । इनके गुणात्मक प्रतिलोम का योगफल $\frac{1}{6}$ हो, तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात करें ।

5. सुयश को गणित विषय की प्रथम जांच परीक्षा में प्राप्त अंक की अपेक्षा द्वितीय जांच परीक्षा में 10 अंक अधिक प्राप्त हुए हैं । द्वितीय जांच परीक्षा में प्राप्त अंको का 5 गुना प्रथम जांच परीक्षा के अंकों के वर्ग के बराबर हो तो उसे प्रथम जांच परीक्षा में कितने अंक प्राप्त हुए ?

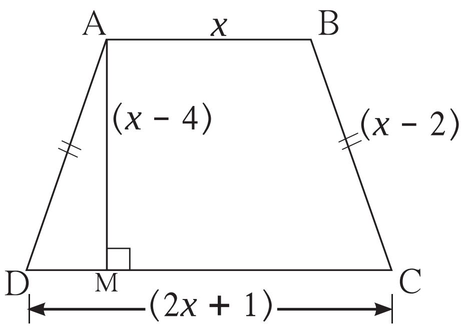
6.★ श्री. कासम का मिट्टी के बर्तन बनाने का कुटीर उद्योग है । वे प्रतिदिन निश्चित संख्या में बर्तन बनाते हैं । प्रत्येक बर्तन का लागत मूल्य बनाये गए बर्तनों की संख्या के 10 गुना से 40 रु अधिक होता है । यदि एक दिन में बर्तनो का लागत मूल्य 600 रु हो तो प्रत्येक बर्तन का लागत मूल्य तथा एक दिन में बनाये गए बर्तनो की संख्या ज्ञात करो ।

7.★ किसी नदी में नाव से प्रवाह के विपरीत 36 किमी जाकर वापस उसी स्थान पर आने में प्रतीक को 8 घंटे लगते हैं । यदि शांत पानी में नाव का वेग 12 किमी/ घंटा हो तो नदी के प्रवाह का वेग ज्ञात करो ।

8.★ किसी काम को पूरा करने के लिए पिंटू को निशू से 6 दिन अधिक लगते हैं । दोनों मिलकर वही काम 4 दिन में पूरा कर लेते हैं । उस काम को अकेले पूरा करने के लिए प्रत्येक को कितने दिन लगेंगे ?

9.★ संख्या 460 को किस प्राकृत संख्या से भाग देने पर भागफल, भाजक के 5 गुने से 6 अधिक तथा शेषफल 1 आता हो तो भागफल तथा भाजक कितना होगा ?

10.★ संलग्न समलंब □ABCD में AB || CD, उसका क्षेत्रफल 33 वर्ग सेमी है, तो आकृति में दी गई जानकारी के आधार पर दी गई कृति पूर्ण करो तथा चतुर्भुज के चारों भुजाओं की लंबाई ज्ञात करो ।



हल: $\square$ABCD समलंब चतुर्भुज है । AB || CD

$A(\square ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \times \square$

$33 = \frac{1}{2}(x + 2x + 1) \times \square$

$\therefore \square = (3x + 1) \times \square$

$\therefore 3x^2 + \square - \square = 0$

$\therefore 3x(\ldots.) + 10(\ldots.) = 0$

$\therefore (3x + 10)(----) = 0$

$\therefore (3x + 10) = 0$ या $\square = 0$

$\therefore x = -\frac{10}{3}$ या $x = \square$

किंतु लंबाई ऋणात्मक नही होती ।

$\therefore x \neq -\frac{10}{3}$ $\therefore x = \square$

AB = ---, CD = --- AD = BC = ---

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तरों का उचित पर्याय चुनिए ।

(1) निम्नलिखित में से कौन-से वर्गसमीकरण हैं?

(A) $\frac{5}{x} - 3 = x^2$ (B) $x(x + 5) = 2$ (C) $n - 1 = 2n$ (D) $\frac{1}{x^2}(x + 2) = x$

(2) निम्नलिखित में से कौन-से वर्गसमीकरण नहीं हैं?

(A) $x^2 + 4x = 11 + x^2$ (B) $x^2 = 4x$ (C) $5x^2 = 90$ (D) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(3) $x^2 + kx + k = 0$ के मूल वास्तविक संख्या तथा समान हो तो k का मान निम्न में से कौन-सा है ?

(A) केवल 0 (B) केवल 4 (C) 0 या 4 (D) 2

(4) $\sqrt{2}x^2 - 5x + \sqrt{2} = 0$ के लिए विवेचक का मान निम्नलिखित में से कौन-सा हैं ?

(A) -5 (B) 17 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2} - 5$

(5) निम्नलिखित समीकरण में से कौन-से समीकरण के मूल 3 तथा 5 हैं ?

(A) $x^2 - 15x + 8 = 0$ (B) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(C) $x^2 + 3x + 5 = 0$ (D) $x^2 + 8x - 15 = 0$

(6) निम्नलिखित में से किन समीकरणों के मूलों का योगफल -5 है?

(A) $3x^2 - 15x + 3 = 0$ (B) $x^2 - 5x + 3 = 0$

(C) $x^2 + 3x - 5 = 0$ (D) $3x^2 + 15x + 3 = 0$

(7) $\sqrt{5}m^2 - \sqrt{5}m + \sqrt{5} = 0$ के लिए कौन- से कथन सत्य हैं ?

(A) वास्तविक संख्या तथा असमान मूल (B) वास्तविक संख्या तथा समान मूल

(C) मूल वास्तविक संख्या नहीं हैं (D) तीन मूल

(8) $x^2 + mx - 5 = 0$ इस वर्गसमीकरण का एक मूल 2 हो तो m का मान निम्नलिखित में से कौन-सा है?

(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

2. निम्नलिखित में से कौन-से समीकरण वर्ग समीकरण है ।

(1) $m^2 + 2m + 11 = 0$ (2) $x^2 - 2x + 5 = x^2$ (3) $(x + 2)^2 = 2x^2$

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक समीकरण के विवेचक का मान ज्ञात करें ।

(1) $2y^2 - y + 2 = 0$ (2) $5m^2 - m = 0$ (3) $\sqrt{5}x^2 - x - \sqrt{5} = 0$

4. $2x^2 + kx - 2 = 0$ इस वर्गसमीकरण का एक मूल -2 हो, तो k का मान ज्ञात करो ।

5. ऐसे वर्गसमीकरण बनाओ जिसके मूल निम्नप्रकार से हैं ।

(1) 10 और -10 (2) $1-3\sqrt{5}$ और $1+3\sqrt{5}$ (3) 0 और 7

6. नीचे दिए गए वर्गसमीकरण के मूलों का स्वरूप निश्चित करो ।

(1) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (2) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$ (3) $m^2 - 2m + 1 = 0$

7. निम्नलिखित वर्गसमीकरण हल करो ।

(1) $\frac{1}{x+5} = \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0, x + 5 \neq 0)$ (2) $x^2 - \frac{3x}{10} - \frac{1}{10} = 0$ (3) $(2x + 3)^2 = 25$

(4) $m^2 + 5m + 5 = 0$ (5) $5m^2 + 2m + 1 = 0$ (6) $x^2 - 4x - 3 = 0$

8★. $(m - 12)x^2 + 2(m - 12)x + 2 = 0$ इस वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक तथा समान हों तो m का मान ज्ञात करिए ।

9★. किसी वर्गसमीकरण के दो मूलों का योगफल 5 और उसके घनों का योगफल 35 हो तो वह वर्गसमीकरण कौन-से हैं ?

10★. ऐसा वर्गसमीकरण बनाओ जिनके मूल, $2x^2 + 2(p + q)x + p^2 + q^2 = 0$ इस समीकरण के मूलों के योगफल का वर्ग, तथा अंतर का वर्ग हों ।

11★. मुकुंद के पास सागर से 50 रूपये अधिक हैं । उनके पास की राशियों का गुणनफल 15000 हो तो प्रत्येक के पास कितने रुपये हैं ?

12★. दो संख्याओं के वर्गों का अंतर 120 है । छोटी संख्या का वर्ग, बड़ी संख्या का दुगुना है । वे संख्याएँ ज्ञात करिए ।

13★. रंजना को जन्मदिन के अवसर पर 540 संतरे कुछ विद्यार्थियों में समान रूप से बाँटने हैं । यदि 30 विद्यार्थी अधिक होते प्रत्येक को 3 संतरे कम मिलते । विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात करो ।

14★. तडवेल में किसान श्री. दिनेश के आयताकार खेत की लंबाई, चौड़ाई से 2 गुनी से 10 मीटर अधिक है । उन्होंने उस खेत में बारिश का पानी एकत्र करने के लिए खेत की चौड़ाई के $\frac{1}{3}$ गुने भुजा वाले वर्गाकार खेत में तालाब का निर्माण किया, तब मूल खेत का क्षेत्रफलक खेत में बने तालाब के क्षेत्रफल का 20 गुणा होता है । तो उस खेत की लंबाई और चौड़ाई तथा खेत में बने की तालाब भुजा की लंबाई ज्ञात करो ।

15★. एक टंकी को दो नल से पूरा भरने में 2 घंटे लगते हैं । अकेले छोटे नल से टंकी को भरने में लगनेवाला समय बड़े नल से लगनेवाले समय से 3 घंटे अधिक लगते हैं । तो प्रत्येक नल को वह टंकी भरने के लिए कितना समय लगेगा ?

MRCBNT