1 दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण

आओ सीखें

- दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण हल करने की विधि – आलेख विधि, क्रेमर का नियम ।
- दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण में रूपांतर करने योग्य समीकरण ।
- युगपत रेखीय समीकरण का उपयोजन ।

थोड़ा याद करें

दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण (Linear equation in two variables)

जिस समीकरण में दो चरांकों का उपयोग किया जाता है और चरांक वाले प्रत्येक पद का घात 1 होता है उस समीकरण को दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण कहते हैं । पिछली कक्षा में हमने इसका अध्ययन किया है।

हम जानते हैं कि $ax + by + c = 0$ यह दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण का सामान्य रूप है जिसमें a, b, c यह वास्तविक संख्याएँ हैं तथा a और b एक ही समय में शून्य नहीं होते हैं।

उदा. समीकरण $3x = 4y - 12$ का $3x - 4y + 12 = 0$ यह सामान्य स्वरूप है ।

कृति : निम्नलिखित सारिणी को पूर्ण कीजिए ।

क्रमांक	समीकरण	दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण हैं या नहीं ?
1	$4m + 3n = 12$	है ।
2	$3x^2 - 7y = 13$	
3	$\sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 16$	
4	$0x + 6y - 3 = 0$	
5	$0.3x + 0y - 36 = 0$	
6	$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 4$	
7	$4xy - 5y - 8 = 0$	

युगपत रेखीय समीकरण (Simultaneous linear equations)

जब हम दो चरांक वाले, दो रेखीय समीकरणों का एक ही समय पर विचार करते हैं तब उन समीकरणों को युगपत समीकरण कहते हैं ।

पिछली कक्षा में हमने एक चरांक वाले दो रेखीय समरकरणों का अध्ययन किया है। उसका संक्षेप में पुनरावर्तन करेंगे ।

उदा. (1) निम्न युगपत समीकरण हल कीजिए ।

$5x - 3y = 8;\ 3x + y = 2$

हल :

विधि I : $5x - 3y = 8 \ldots$ (I)

$3x + y = 2 \ldots$ (II)

समीकरण (II) के दोनों पक्षों में 3 से गुणा करने पर

$\therefore 9x + 3y = 6 \ldots$ (III)

$5x - 3y = 8 \ldots$ (I)

अब समीकरण (I) तथा (III) को जोड़ने पर

$$\begin{array}{r} 5x - 3y = 8 \\ + \ 9x + 3y = 6 \\ \hline 14x = 14 \end{array}$$

$\therefore x = 1$

$x = 1$ समीकरण (II) में रखने पर

$3x + y = 2$

$\therefore 3\times1 + y = 2$

$\therefore 3 + y = 2$

$\therefore y = -1$

$x = 1, y = -1$ यह हल है ।

इस हल को $(x, y) = (1, -1)$ ऐसा भी लिखते हैं ।

विधि (II)

$5x - 3y = 8 \ldots$ (I)

$3x + y = 2 \ldots$ (II)

समीकरण (II) के चरांक y का मान चरांक x के रूप में लिखेंगे ।

$y = 2 - 3x \ldots$ (III)

अब y का मान समीकरण (I) में रखने पर

$5x - 3y = 8$

$\therefore 5x - 3(2 - 3x) = 8$

$\therefore 5x - 6 + 9x = 8$

$\therefore 14x - 6 = 8$

$\therefore 14x = 8 + 6$

$\therefore 14x = 14$

$\therefore x = 1$

$x = 1$ समीकरण (III) में रखने पर

$y = 2 - 3x$

$\therefore y = 2 - 3\times1$

$\therefore y = 2 - 3$

$\therefore y = -1$

$x = 1, y = -1$ यह हल है ।

उदा. (2) हल कीजिए $3x + 2y = 29;\ 5x - y = 18$

हल : $3x + 2y = 29$. . . (I) और $5x - y = 18$ . . . (II)

दिए गए समीकरण में y चरांक का विलोपन करके हल करेंगे । इसके लिए निम्नलिखित चौखट में उचित संख्या लिखिए ।

समीकरण (II) को 2 से गुणा करने पर

$\therefore\ 5x \times \square - y \times \square = 18 \times \square$

$\therefore\ 10x - 2y = \square$ . . . (III)

समीकरण (I) में समीकरण (III) को जोड़ने पर

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 29 \\ + \quad \square - \square = \square \\ \hline \square = \square \end{array} \qquad \therefore\ x = \square$$

$x = 5$ इस मान को समीकरण (I) में रखने पर –

$3x + 2y = 29$

$\therefore\ 3 \times \square + 2y = 29$

$\therefore\ \square + 2y = 29$

$\therefore\ 2y = 29 - \square$

$\therefore\ 2y = \square \qquad \therefore\ y = \square$

$(x, y) = (\square, \square)$ यह हल है ।

उदा. (3) $15x + 17y = 21;\ 17x + 15y = 11$

हल : $15x + 17y = 21$. . . (I)

$17x + 15y = 11$ . . . (II)

इन दो समीकरणों में x और y के गुणांकों का स्थान परस्पर परिवर्तित है । इस प्रकार के युगपत समीकरणों को हल करते समय दोनों समीकरणों को जोड़ने और घटाने पर दो नए आसान समीकरण प्राप्त होते हैं । इन दोनों समीकरणों का हल सरलता से प्राप्त होता है ।

समीकरण (I) तथा समीकरण (II) को जोड़ने पर –

$$\begin{array}{r} 15x + 17y = 21 \\ + \quad 17x + 15y = 11 \\ \hline 32x + 32y = 32 \end{array}$$

समीकरण के दोनों पक्षों में 32 से भाग देने पर

$x + y = 1 \; . \; . \; . \quad \text{(III)}$

समीकरण (I) में से समीकरण (II) को घटाने पर –

$$\begin{array}{r} 15x + 17y = 21 \\ -\; \underline{17x \pm 15y = 11} \\ -2x + 2y = 10 \end{array}$$

समीकरण के दोनों पक्षों में 2 से भाग देने पर –

$-x + y = 5 \; . \; . \; . \quad \text{(IV)}$

समीकरण (III) तथा समीकरण (IV) को जोड़ने पर –

$$\begin{array}{r} x + y = 1 \\ +\; \underline{-x + y = 5} \end{array}$$

$\therefore \; 2y = 6 \qquad \therefore \; y = 3$

$y = 3$ यह मान समीकरण (III) में रखने पर –

$x + y = 1$

$\therefore \; x + 3 = 1$

$\therefore \; x = 1 - 3 \qquad \therefore \; x = -2$

$(x, y) = (-2, 3)$ समीकरण का हल है ।

प्रश्नसंग्रह 1.1

(1) निम्न कृति पूर्ण करके युगपत समीकरण हल कीजिए ।

$5x + 3y = 9$ -----(I)

$2x - 3y = 12$ ----- (II)

समीकरण (I) तथा समीकरण (II) को जोड़ने पर

$$\begin{array}{r} 5x + 3y = 9 \\ +\; \underline{2x - 3y = 12} \\ \boxed{}\; x = \boxed{} \end{array}$$

$x = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} \qquad x = \boxed{}$

$x = 3$ समीकरण (I) में रखने पर –

$5 \times \boxed{} + 3y = 9$

$3y = 9 - \boxed{}$

$3y = \boxed{}$

$y = \dfrac{\boxed{}}{3}$

$y = \boxed{}$

$(x, y)(\boxed{}, \boxed{})$ समीकरण का हल है ।

(2) निम्न युगपत समीकरणों को हल कीजिए ।

(1) $3a + 5b = 26;\ a + 5b = 22$ (2) $x + 7y = 10;\ 3x - 2y = 7$

(3) $2x - 3y = 9;\ 2x + y = 13$ (4) $5m - 3n = 19;\ m - 6n = -7$

(5) $5x + 2y = -3;\ x + 5y = 4$ (6) $\frac{1}{3}x + y = \frac{10}{3};\ 2x + \frac{1}{4}y = \frac{11}{4}$

(7) $99x + 101y = 499;\ 101x + 99y = 501$

(8) $49x - 57y = 172;\ 57x - 49y = 252$

थोड़ा याद करें

दो चरांकों वाले रेखीय समीकरणों का आलेख (Graph of linear equation in two variables)

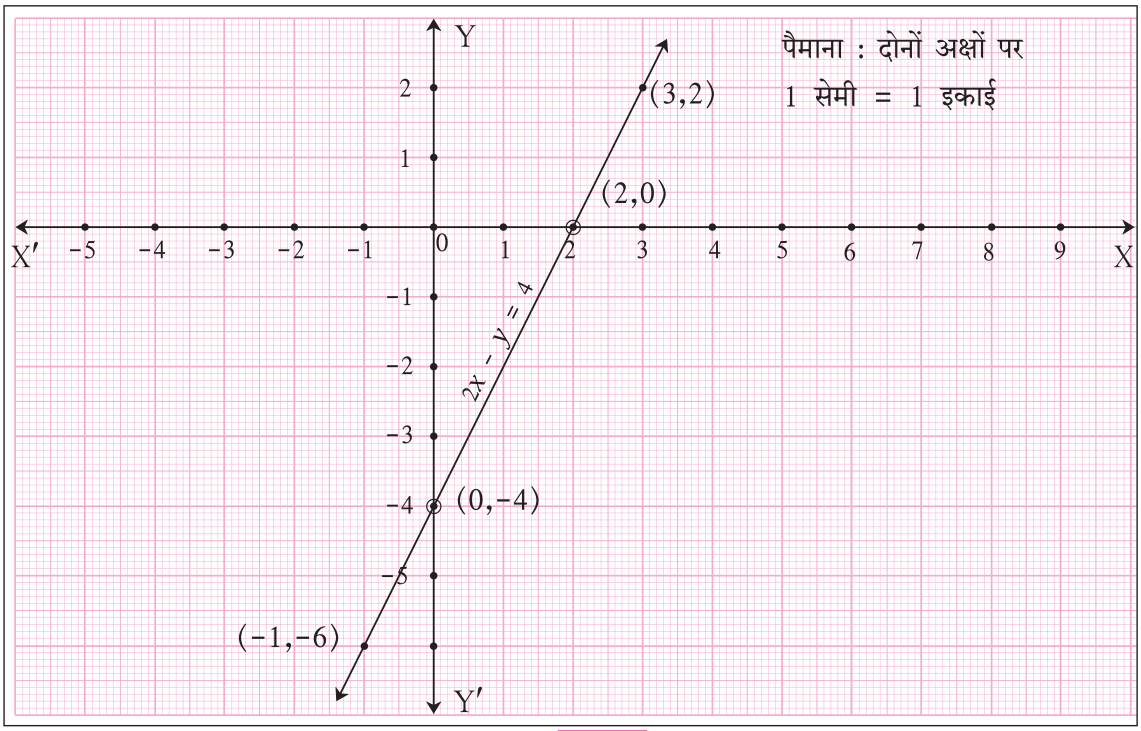
हमने पिछली कक्षा में दो चरांकों वाले रेखीय समीकरणों के आलेख का एक सरल रेखा के रुप में अध्ययन किया है । इनका क्रमिक युग्म दिए गए समीकरण की संपुष्टि (समाधान) करता हो तो वह युग्म उस समीकरण का हल होता है । इसी प्रकार वह क्रमिक युग्म उन समीकरण के आलेख पर एक बिंदु दर्शाता है।

उदा. $2x - y = 4$ इस समीकरण का आलेख खींचिए ।

हल : $2x - y = 4$ इस समीकरण का आलेख खींचने के लिए (x, y) का 4 युग्म (जोड़ी) प्राप्त करेंगे।

x	0	2	3	−1
y	−4	0	2	−6
(x, y)	(0, −4)	(2, 0)	(3, 2)	(−1, −6)

ध्यान रहें कि क्रमिक युग्म सरल विधि से प्राप्त करने के लिए $x = 0$ और $y = 0$ यह मान लेना आसान होगा ।



दो चरांको वाले रेखीय समीकरण का आलेख खींचने के लिए निम्नलिखित सोपानों पर ध्यान दें ।

दिए गए समीकरण के लिए कम से कम 4 क्रमिक युग्म बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

↓

आलेख कागज पर X- अक्ष तथा Y- अक्ष निश्चित कर बिंदु प्रस्थापित कीजिए ।

↓

सभी बिंदु रेखा में आएँगे उन बिंदुओं से जाने वाली रेखा खींचिए ।

रेखा निश्चित करने के लिए दो बिंदु पर्याप्त होते हैं, किंतु उनमें से एक बिंदु का निर्देशांक ज्ञात करने में गलती होने पर रेखा भी गलत बनेगी ।

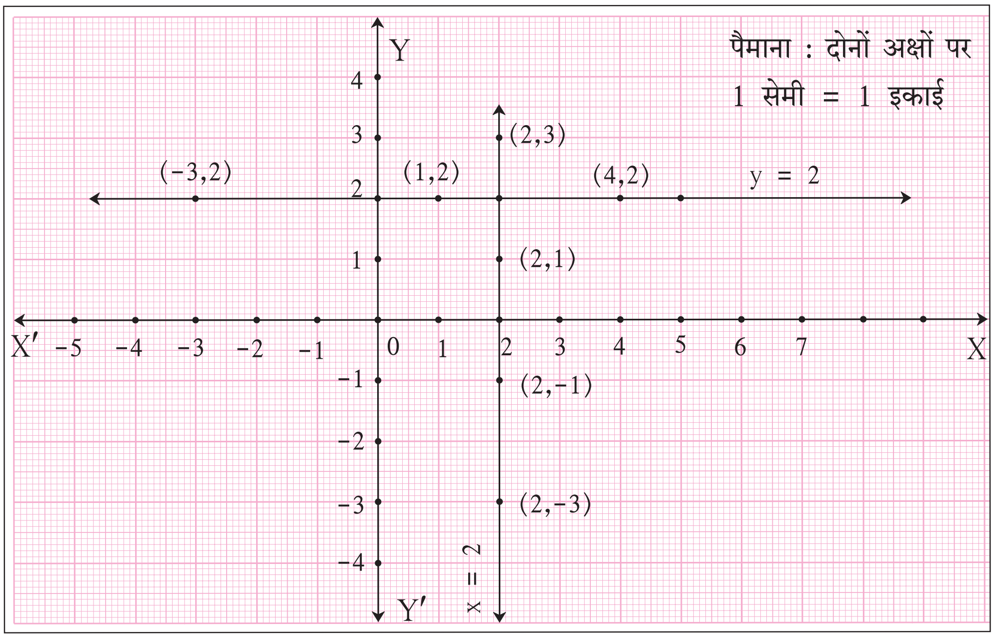
तीन बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात करते समय एक बिंदु का निर्देशांक गलत होने पर तीनों बिंदु एक रेखा में नहीं होंगे इससे ध्यान में आता है कि किसी एक बिंदु का निर्देशांक गलत है, किंतु निश्चित रूप से कौन-से बिंदु का निर्देशांक गलत है इसे ज्ञात करने में समय लगेगा।

चार बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात करते समय किसी एक बिंदु का निर्देशांक गलत होने पर भी उसे छोड़कर अन्य तीन बिंदु एक ही रेखा पर होंगे इससे गलती तुरंत ध्यान में आयेगी । अतः चार बिंदुओं के निर्देशांक निश्चित करना हितकर होता है ।

$y = 2$ इस रेखीय समीकरण को सुविधा के लिए $0x + y = 2$ ऐसा लिख सकते हैं । इस समीकरण का आलेख X-अक्ष के समांतर होता है क्योंकि x के निर्देशांक कोई भी संख्या होने पर बिंदु y का निर्देशांक 2 ही आता है।

x	1	4	-3
y	2	2	2
(x, y)	(1, 2)	(4, 2)	(-3, 2)

इसी प्रकार $x = 2$ यह समीकरण $x + 0y = 2$ ऐसा लिख सकते हैं तथा उसका आलेख Y-अक्ष के समांतर होता है ।



आओ जानें

युगपत समीकरण हल करने की आलेख विधि
(Solution of simultaneous equation by graphical method)

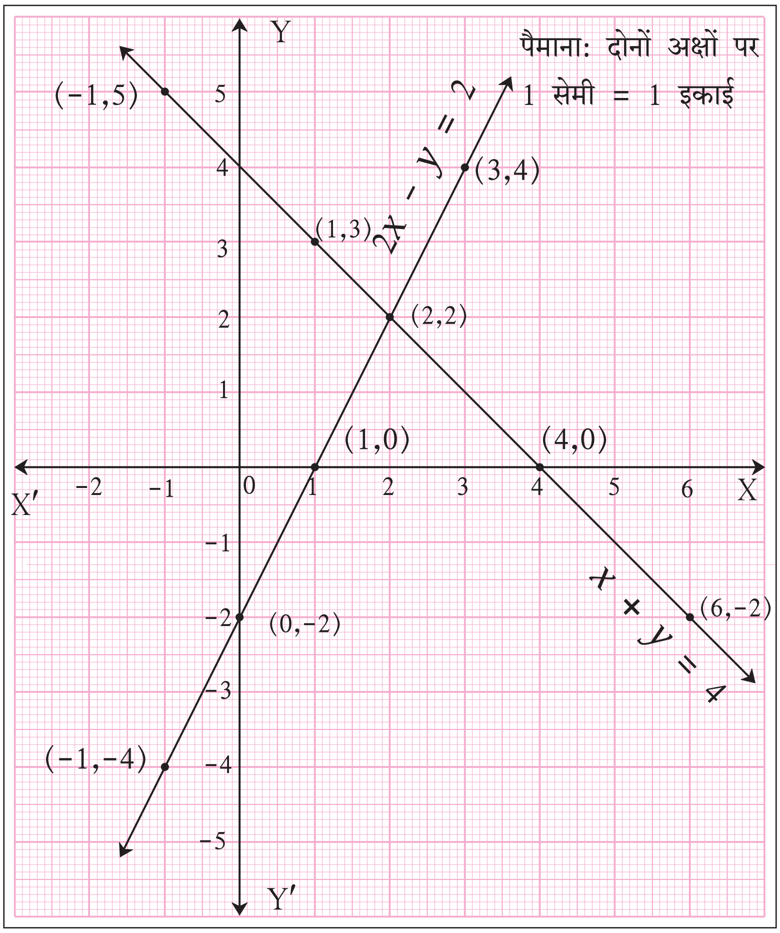
उदा. $x + y = 4$ और $2x - y = 2$ इस समीकरण का आलेख खींचकर उसका अवलोकन कीजिए।

$x + y = 4$

x	-1	4	1	6
y	5	0	3	-2
(x, y)	$(-1, 5)$	$(4, 0)$	$(1, 3)$	$(6, -2)$

$2x - y = 2$

x	0	1	3	-1
y	-2	0	4	-4
(x, y)	$(0, -2)$	$(1, 0)$	$(3, 4)$	$(-1, -4)$



आलेख पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस आलेख के समीकरण की संपुष्टि (समाधान) करता है । दोनों रेखाएँ परस्पर (2, 2) इस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती हैं ।

इसलिए (2, 2) यह क्रमिक युग्म अर्थात $x = 2$ और $y = 2$ का मान $x + y = 4$ और $2x - y = 2$ इन दोनों समीकरणों का समाधान (संपुष्टि) करता है ।

चरांकों का जो मान दिए गए युगपत समीकरण की संपुष्टि करता है। वह मान उस समीकरण का हल होता है ।

$x + y = 4$ और $2x - y = 2$ इस युगपत समीकरण का हल $x = 2$ और $y = 2$ है ।

इस समीकरण को निरसन विधि से हल करके इन हलों की जाँच करेंगे ।

$x + y = 4 \; . \; . \; . \quad (I)$

$2x - y = 2 \; . \; . \; . \quad (II)$

समीकरण (I) तथा (II) को जोड़ने पर

$3x = 6 \quad \therefore \; x = 2$

समीकरण (I) में $x = 2$ मान रखने पर

$x + y = 4$

$\therefore \; 2 + y = 4$

$\therefore \; y = 2$

कृति I : $x - y = 1$; $5x - 3y = 1$ यह युगपत समीकरण आलेख विधि से हल करने के लिए-

- नीचे दी गई तालिका पूर्ण कर निर्देशांक प्राप्त कीजिए ।

$x - y = 1$

x	0		3	
y		0		-3
(x, y)				

$5x - 3y = 1$

x	2			-4
y		8	-2	
(x, y)				

- एक ही निर्देशांक पद्धति में निर्देशांको के अनुसार बिंदु प्रस्थापित कीजिए ।
- समीकरण का आलेख खींचिए ।
- रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिंदु के निर्देशांक का वाचन कीजिए । उससे युगपत समीकरण का हल लिखिए ।

कृति II : ऊपर दिए गए युगपत समीकरण को निरसन पद्धति से हल कर, आलेख द्वारा प्राप्त हल की जाँच कीजिए ।

थोड़ा सोचें

$5x - 3y = 1$ इस आलेख को खींचने के लिए सारिणी में कुछ निर्देशांक दिए गए हैं, देखिए ।

x	0	$\frac{1}{5}$	1	-2
y	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{11}{3}$
(x, y)	$\left(0, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, 0\right)$	$\left(1, \frac{4}{3}\right)$	$\left(-2, -\frac{11}{3}\right)$

- क्या बिंदु प्रस्थापित करने के लिए क्या निर्देशांक सुविधाजनक हैं ?
- निर्देशांक ज्ञात करने में कौन-सी सावधानी बरतनी होगी, जिससे बिंदु स्थापित करना सरल होगा ?

प्रश्नसंग्रह 1.2

(1) निम्नलिखित युगपत समीकरण आलेख विधि से हल करने के लिए सारिणी पूर्ण कीजिए ।

(I) $x + y = 3$ (II) $x - y = 4$

$x + y = 3$

x	3	□	□
y	□	5	3
(x, y)	(3, 0)	□	(0, 3)

$x - y = 4$

x	□	-1	0
y	0	□	-4
(x, y)	□	□	$(0, -4)$

(2) निम्नलिखित युगपत समीकरण आलेख विधि से हल कीजिए ।

(1) $x + y = 6$; $x - y = 4$

(2) $x + y = 5$; $x - y = 3$

(3) $x + y = 0$; $2x - y = 9$

(4) $3x - y = 2$; $2x - y = 3$

(5) $3x - 4y = -7$; $5x - 2y = 0$

(6)★ $2x - 3y = 4$; $3y - x = 4$

आओ चर्चा करें

$x + 2y = 4$; $3x + 6y = 12$ युगपत समीकरण दिया गया है । आलेख विधि से हल करने के लिए निश्चित की गई कुछ क्रमिक जोड़ियाँ निम्नप्रकार से हैं ।

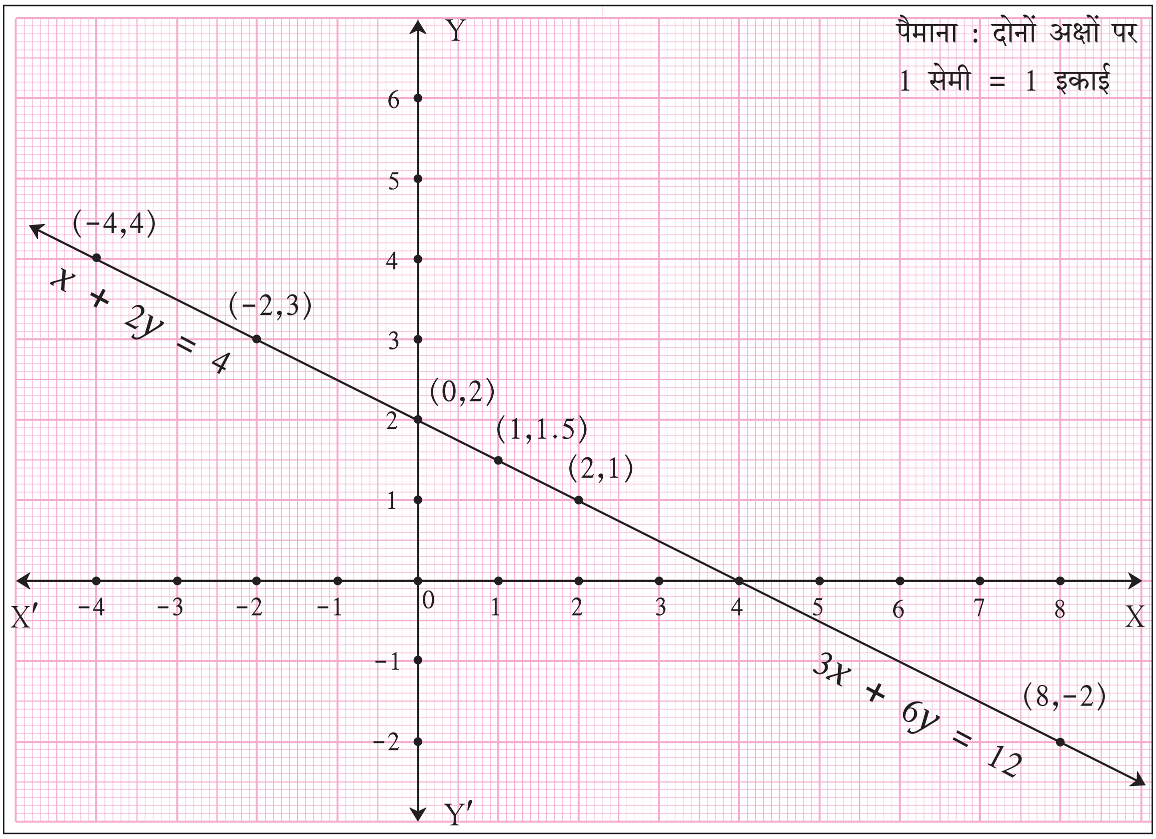
$x + 2y = 4$

x	-2	0	2
y	3	2	1
(x, y)	$(-2, 3)$	$(0, 2)$	$(2, 1)$

$3x + 6y = 12$

x	-4	1	8
y	4	1.5	-2
(x, y)	$(-4, 4)$	$(1, 1.5)$	$(8, -2)$

इन क्रमिक युग्मों को प्रस्थापित कर आलेख खींचा गया है । इसका निरीक्षण कीजिए और दिए गए प्रश्नों पर चर्चा कीजिए ।



(1) उपर्युक्त दो समीकरणों के आलेख एक ही हैं या अलग-अलग हैं ?

(2) $x + 2y = 4$ और $3x + 6y = 12$ इन युगपत समीकरणों के हल कौन-से हैं और कितने हल हैं ?

(3) ऊपरोक्त दोनों समीकरणों में x का गुणांक, y का गुणांक और अचर पदों में कौन-सा संबंध है ?

(4) दो रेखीय समीकरण दिए गए हों और उन समीकरणों का आलेख एक रेखा है, इसे कैसे पहचानेंगे ?

अब दूसरा उदाहरण देखेंगे ।

$x - 2y = 4$ और $2x - 4y = 12$ इन समीकरणों के आलेख ऊपरोक्त प्रकार से एक ही निर्देशांक पद्धति पर खींचिए । आलेख का अवलोकन कीजिए । $x - 2y = 4$; $2x - 4y = 12$ इन युगपत समीकरणों के हल पर विचार कीजिए । x और y के गुणांक, वैसे ही अचर पदों में संबंधों पर विचार करके निष्कर्ष ज्ञात कीजिए ।

ICT Tools or Links

Geogebra software की सहायता से X-अक्ष, Y-अक्ष खींचिए । विभिन्न युगपत समीकरण का आलेख खींचकर उनके हल की जाँच कीजिए ।

आओ जानें

निश्चयक (Determinant)

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ यह चार घटकों का निश्चयक हैं। इनमें (a, b), (c, d) क्षैतिज पंक्तियाँ हैं

इसी प्रकार

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ यह दो उर्ध्वाधर स्तंभ (column) हैं । इस निश्चयक की घात 2 है कारण प्रत्येक पंक्ति (row) तथा स्तंभ (column) में 2 घटक हैं। यह निश्चयक एक संख्या के लिए लिखा जाता है, वह संख्या ad-bc है ।

अर्थात $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

ad-bc यह $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ निश्चयक का मान है ।

निश्चयक का नाम देने के लिए साधारणत: A, B, C, D, ... ऐसे अंग्रेजी के बड़े अक्षरों का उपयोग किया जाता है ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. निम्नलिखित निश्चयकों के मान ज्ञात कीजिए ।

(1) $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ (2) $N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (3) $B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix}$

हल :

(1) $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (5 \times 9) - (3 \times 7) = 45 - 21 = 24$

(2) $N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = [(-8) \times (4)] - [(-3\ ) \times 2] = -32 - (-6)$

$= -32 + 6 = -26$

(3) $B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = [2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}] - [2 \times 9] = 18 - 18 = 0$

आओ जानें

निश्चयक पद्धति (क्रेमर की पद्धति) Determinant method (Crammer's method)

दिए गए युगपत समीकरणों को सरल विधि से तथा कम-से-कम जगह का उपयोग कर निश्चयकों की सहायता से हल किया जाता है । इसे ही युगपत समीकरण हल करने की निश्चयक पद्धति कहते हैं । इस पद्धति की खोज स्विस गणितज्ञ ग्रेबियल क्रेमर ने की थी इसलिए इस पद्धति को क्रेमर पद्धति कहते हैं ।

इस पद्धति से युगपत समीकरणों को $a_1x + b_1y = c_1$ तथा $a_2x + b_2y = c_2$ ऐसे लिखते हैं ।

माना, $a_1x + b_1y = c_1$ . . . (I)

और $a_2x + b_2y = c_2$ . . . (II)

यहाँ a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 वास्तविक संख्याएँ है ।

हम इस युगपत समीकरण निरसन पद्धति से हल करेंगे ।

समीकरण (I) को b_2 से गुणा करने पर

$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2$ . . . (III)

समीकरण (II) को b_1 से गुणा करने पर

$a_2 b_1 x + b_2 b_1 y = c_2 b_1$ . . . (IV)

समीकरण (III) से (IV) को घटाने पर

$$\begin{array}{l} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \\ -a_2 b_1 x + b_2 b_1 y = c_2 b_1 \\ \underline{-\quad\quad -\quad\quad -} \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\ x = c_1 b_2 - c_2 b_1 \end{array}$$

$x = \dfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ . . .(V) इसी प्रकार x का निरसन करके $y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ . . . (VI)

ऊपरोक्त हल में $c_1 b_2 - c_2 b_1$, $a_1 b_2 - a_2 b_1$, $a_1 c_2 - a_2 c_1$ इन राशियों को ध्यान में रखने और कम जगह में व्यवस्थित रूप लिखने के लिए निश्चयक के रूप में लिखेंगे ।

निम्नलिखित समीकरणों में गुणांक तथा अचर पद देखिए ।

अब $a_1 x + b_1 y = c_1$

और $a_2 x + b_2 y = c_2$

यहाँ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ये तीन स्तंभ प्राप्त होते हैं।

समीकरण (V) तथा समीकरण (VI) में x तथा y का मान निश्चयकों की सहायता से लिखिए ।

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

और $y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$, $(a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0$

ध्यान देने योग्य $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D$, $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_x$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_y$ से दर्शाइए।

अर्थात संक्षेप में $x = \dfrac{D_x}{D}$ तथा $y = \dfrac{D_y}{D}$

D, D_x , D_y निश्चयक लिखने के लिए $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$स्तंभों के क्रम को ध्यान में रखिए ।

और $\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$ इन समीकरणों से $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ऐसे तीन स्तंभ प्राप्त होते हैं।

D में अचरपद के $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ स्तंभ को छोड़ा गया है ।

- D_x के लिए D के $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ x के गुणांको का स्तंभ छोड़कर उसकी जगह अचर पद का स्तंभ लिया गया है ।
- D_y के लिए D के $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ y के गुणांकों का स्तंभ छोड़कर उसकी जगह पर अचर पदों का स्तंभ लिया गया है ।

इसे ध्यान में रखें

क्रेमर की पद्धति का उपयोग कर युगपत समीकरण हल करने की विधि

दिया गया समीकरण $ax + by = c$ स्वरूप में लिखिए ।

↓

D, D_x तथा D_y इन निश्चयकों का मान ज्ञात कीजिए।

↓

$x = \frac{D_x}{D}$ तथा $y = \frac{D_y}{D}$

के आधार पर x तथा y का मान ज्ञात कीजिए ।

अधिक जानकारी हेतु :

गेब्रियल क्रेमर (Gabriel Cramer) (31 जुलाई, 1704 से 4 जनवरी, 1752) नामक स्विस गणितज्ञ का जन्म जेनेवा में हुआ । गणित विषय में बचपन से ही प्रवीण थे । आयु के अठारहवें वर्ष में उन्होंने डॉक्टरेट की उपाधि प्राप्त की । वे जेनेवा में प्राध्यापक थे ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. क्रेमर की पद्धति से निम्नलिखित युगपत समीकरण हल कीजिए ।

$5x + 3y = -11$; $2x + 4y = -10$

हल : दिए गए समीकरण

$5x + 3y = -11$

$2x + 4y = -10$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (2 \times 3) = 20 - 6 = 14$$

$$Dx = \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = (-11) \times 4 - (-10) \times 3 = -44 - (-30)$$

$$= -44 + 30 = -14$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 5 \times (-10) - 2 \times (-11) = -50 - (-22)$$

$$= -50 + 22 = -28$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{14} = -1$$

तथा $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{14} = -2$

$\therefore$ $(x, y) = (-1, -2)$ यह दिए गए युगपत समीकरण का हल है ।

कृति 1 : निश्चयक पद्धति से दिए गए युगपत समीकरणों को हल करने के लिए निम्नलिखित चौखटों को पूर्ण कीजिए ।

$y + 2x - 19 = 0$; $2x - 3y + 3 = 0$

हल : दिए गए समीकरण $ax + by = c$ को इस स्वरूप में लिखेंगे ।

$2x + y = 19$

$2x - 3y = -3$

$$D = \begin{vmatrix} \square & \square \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = [\square \times (-3)] - [2 \times (\square)] = \square - (\square)$$

$$= \square - \square = \square$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & \square \\ \square & -3 \end{vmatrix} = [19 \times (\square)] - [(\square) \times (\square)] = \square - \square$$

$$= \square$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \square & 19 \\ 2 & \square \end{vmatrix} = [(\square) \times (\square)] - [(\square) \times (\square)]$$

$$= \square - \square = \square$$

क्रेमर के नियमानुसार

$x = \dfrac{D_x}{D}$	$y = \dfrac{D_y}{D}$
$\therefore\ x = \dfrac{\square}{\square}$	$y = \dfrac{\square}{\square}$
$\therefore\ x = \square$	$y = \square$

$\therefore\ (x, y) = (\square, \square)$ यह दिए गए युगपत समीकरण का हल है ।

कृति 2 : निम्न कृति पूर्ण कीजिए ।

$3x - 2y = 3$ $\qquad$ $2x + y = 16$

ऊपरोक्त समीकरणों के निश्चयकों का मान

$D = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$ $\qquad$ $D_x = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$ $\qquad$ $D_y = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$

क्रेमर के नियमानुसार हल प्राप्त होते हैं ।

$x = \dfrac{\square}{\square} = \square$ $\qquad$ $y = \dfrac{\square}{\square} = \square$

$\therefore\ (x, y)\ (\square, \square)$ यह हल है ।

थोड़ा सोचें

- यदि D = 0 तो हल का रूप क्या होगा ?
- सामान्य हल संभव न हो तो उन समीकरणों की रेखा का स्वरूप क्या होगा ?

प्रश्नसंग्रह 1.3

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \square - \square \times 4 = \square - 8 = \square$

(1) निम्नलिखित निश्चयकों का मान ज्ञात कीजिए ।

i) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ ii) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}$ iii) $\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

(2) निम्नलिखित युगपत समीकरणों को क्रेमर की पद्धति से हल कीजिए ।

(i) $3x - 4y = 10;\ 4x + 3y = 5$ (ii) $4x + 3y - 4 = 0;\ 6x = 8 - 5y$

(iii) $x + 2y = -1;\ 2x - 3y = 12$ (iv) $6x - 4y = -12;\ 8x - 3y = -2$

(v) $4m + 6n = 54;\ 3m + 2n = 28$ (vi) $2x + 3y = 2;\ x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$

आओ जानें

दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण में रूपांतर करने योग्य समीकरण
(Equations reducible to a pair of linear equations in two variables)

कृति : निम्नलिखित सारिणी पूर्ण कीजिए।

समीकरण	चरांकों की संख्या	रेखीय है या नहीं
$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 8$	2	नहीं
$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 0$	$\square$	$\square$
$\frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 0$	$\square$	$\square$
$\frac{14}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5$	$\square$	$\square$

थोड़ा याद करें

ऊपरोक्त सारिणी में दो चरांकों के कुछ समीकरण दिए गए हैं, वे रेखीय नहीं हैं किंतु क्या उन समीकरणों को रेखीय समीकरणों में रूपांतरित कर सकते हैं ?

इसे ध्यान में रखें

दिए गए चरांकों में उचित परिवर्तन कर हम नए चरांकों का निर्माण कर सकते हैं । इन नए चरांकों का उपयोग करके उस समीकरण को रेखीय समीकरण के रूप में लिख सकते हैं । किसी भी $\frac{m}{n}$ ऐसे अपूर्णांकों का हर शून्य नहीं हो सकता इसे नहीं भूले ।

हल किए गए उदाहरण

निम्नलिखित युगपत समीकरण हल कीजिए ।

उदा.(1) हल कीजिए $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

हल : $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{y}\right) = 7 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{y}\right) = 5 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

समीकरण (I) तथा (II) में $\left(\frac{1}{x}\right) = m$ तथा $\left(\frac{1}{y}\right) = n$ रखने पर निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं।

$$4m + 5n = 7 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

$$3m + 4n = 5 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

समीकरण हल करने पर

$m = 3,\ n = -1$ यह हल प्राप्त होता है ।

अब, $m = \frac{1}{x}$ $\quad \therefore\ 3 = \frac{1}{x} \quad \therefore\ x = \frac{1}{3}$

इसी प्रकार, $n = \frac{1}{y}$ $\quad \therefore\ -1 = \frac{1}{y} \quad \therefore\ y = -1$

$\therefore\ (x, y) = (\frac{1}{3}, -1)$ यह दिए गए युगपत समीकरण का हल है ।

उदा.(2) हल कीजिए $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3$; $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

हल : $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3$; $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x-y}\right) + 1\left(\frac{1}{x+y}\right) = 3 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

$$2\left(\frac{1}{x-y}\right) - 3\left(\frac{1}{x+y}\right) = 5 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

समीकरण (I) तथा (II) में $\left(\frac{1}{x-y}\right) = a$ व $\left(\frac{1}{x+y}\right) = b$ रखने पर प्राप्त समीकरण इस प्रकार हैं।

$$4a + b = 3 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

$$2a - 3b = 5 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

समीकरण (III) तथा (IV) को हल करने पर $a = 1$ और $b = -1$ यह हल प्राप्त होता है ।

किंतु $a = \left(\frac{1}{x-y}\right)$ तथा $b = \left(\frac{1}{x+y}\right)$

$\left(\frac{1}{x-y}\right) = 1$ तथा $\left(\frac{1}{x+y}\right) = -1$

$$x - y = 1 \quad . . . \quad \text{(V)}$$

$$x + y = -1 \quad . . . \quad \text{(VI)}$$

समीकरण (V) तथा समीकरण (VI) हल करने पर $x = 0$ और $y = -1$ यह हल प्राप्त होता है।

$\therefore (x, y) = (0, -1)$ यह दिए गए समीकरण का हल है ।

थोड़ा याद करें

ऊपरोक्त उदाहरणों को रूपांतरित कर प्राप्त युगपत समीकरण निरसन पद्धति से हल किए गए हैं । वह समीकरण क्रेमर के नियमानुसार या आलेख विधि से हल करने पर भी क्या वही हल प्राप्त होता है ? करके देखिए ।

कृति : चौखटों के समीकरणों के हल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति कीजिए ।

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2 \; ; \; \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

$\left(\frac{1}{x-1}\right) = m$ तथा $\left(\frac{1}{y-2}\right) = n$ रखने पर

□ नए समीकरण $6m - 3m = 1$

हल करने पर

$m =$ □ तथा $n =$ □

m तथा n का मान रखने पर प्राप्त समीकरण

$\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{3}$ समीकरण हल करने पर □

$x =$ □ तथा $y =$ □

$\therefore$ $(x, y) = (\quad , \quad)$ यह दिए गए युगपत समीकरण का हल है ।

प्रश्नसंग्रह 1.4

1) निम्नलिखित युगपत समीकरण हल कीजिए ।

(1) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 15 \; ; \; \frac{8}{x} + \frac{5}{y} = 77$

(2) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \; ; \; \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

(3) $\frac{27}{x-2} + \frac{31}{y+3} = 85 \; ; \; \frac{31}{x-2} + \frac{27}{y+3} = 89$

(4) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4} \; ; \; \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$

आओ जानें

युगपत समीकरण का उपयोजन (Application of simultanious equation)

कृति : नीचे दिए गए चौखटों में तीर के चिह्न के पास कुछ सूचना दी गई है । इससे प्राप्त होने वाले समीकरण तीर के सामने वाली चौखटों में लिखेंगे ।

सार्थक की आयु साक्षी की आयु के दुगुने से 8 वर्ष कम है ।

मैं सार्थक

मेरी वर्तमान आयु x वर्ष है ।

मेरी वर्तमान आयु y वर्ष है ।

मैं साक्षी

4 वर्ष पूर्व साक्षी की आयु सार्थक से 3 वर्ष से कम थी ।

सार्थक और साक्षी की वर्तमान आयु का योगफल 25 है ।

उदा. (1) किसी आयत की परिमिति 40 सेमी है । आयत की लंबाई, चौड़ाई की दुगुनी से 2 सेमी अधिक है । तो आयत की लंबाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए ।

हल : माना कि आयत की लंबाई x सेमी तथा चौड़ाई y सेमी है ।

पहली शर्त के अनुसार

$$2(x + y) = 40$$

$$x + y = 20 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

दूसरी शर्त के अनुसार

$$x = 2y + 2$$

$$\therefore \; x - 2y = 2 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

समीकरण (I) तथा (II) निश्चयक विधि से हल करेंगे ।

$$x + y = 20$$

$$x - 2y = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = [1 \times (-2)] - (1 \times 1) = -2 - 1 = -3$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = [20 \times (-2)] - (1 \times 2) = -40 - 2 = -42$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2) - (20 \times 1) = 2 - 20 = -18$$

$x = \dfrac{Dx}{D}$ तथा $y = \dfrac{Dy}{D}$

$\therefore\ x = \dfrac{-42}{-3}$ तथा $y = \dfrac{-18}{-3}$

$\therefore\ x = 14$ तथा $y = 6$

$\therefore$ आयत की लंबाई 14 सेमी तथा चौड़ाई 6 सेमी है ।

उदा. (2)

सेल ! सेल !! सेल !!! केवल 2 ही दिन

मेरे पास कुछ घड़ियाँ काँटे वाली और कुछ डिजिटल घड़ियाँ हैं । वो मुझे सस्ती कीमत पर बेचनी हैं ।

प्रथम दिन की बिक्री

काँटेवाली घड़ी	= 11
डिजिटल घड़ी	= 6
मुझे प्राप्त	= 4330 रु.

दूसरे दिन की बिक्री

काँटेवाली घड़ी	= 22
डिजिटल घड़ी	= 5
मुझे प्राप्त	= 7330 रु.

तो मेरे द्वारा बेची हुई प्रत्येक प्रकार की घड़ियों का मूल्य कितना होगा ?

हल : माना कि काँटेवाली एक घड़ी का मूल्य = x रु.

तथा एक डिजिटल घड़ी का मूल्य = y रु.

प्रथम शर्त के अनुसार

$$11x + 6y = 4330 \quad . . . \quad (I)$$

दूसरी शर्त के अनुसार

$$22x + 5y = 7330 \quad . . . \quad (II)$$

समीकरण (I) को 2 से गुणा करने पर

$$22x + 12y = 8660 \quad . . . \quad (III)$$

समीकरण (II) में से समीकरण (III) घटाने पर

$$\begin{array}{r} 22x + 5y = 7330 \\ -\; \underset{-}{+}22x \underset{-}{+} 12y = \underset{-}{+}8660 \\ \hline -7y = -1330 \end{array}$$

$$y = 190$$

$y = 190$ यह मान समीकरण (I) में रखने पर

$$11x + 6y = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 6(190) = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 1140 = 4330$$

$$\therefore \quad 11x = 3190$$

$$\therefore \quad x = 290$$

$\therefore$ काँटेवाली एक घड़ी का मूल्य 290 रु. तथा

एक डिजिटल घड़ी का मूल्य 190 रु. है ।

उदा. (3)

एक नाव 6 घंटों में प्रवाह की विपरीत दिशा में 16 किमी तथा प्रवाह की दिशा में 24 किमी दूरी तय करती है ।

वही नाव 13 घंटों में प्रवाह की विपरीत दिशा में 36 किमी और प्रवाह की दिशा में 48 किमी दूरी तय करती है ।

तो बताइए नाव का स्थिर जल में वेग तथा प्रवाह का वेग कितना होगा ?

हल : माना, नाव की स्थिर जल में वेग = x किमी/घंटा, तथा प्रवाह की वेग = y किमी/घंटा ।

$\therefore$ नाव की प्रवाह की दिशा में वेग = $(x + y)$ किमी/घंटा

नाव की प्रवाह की विपरीत दिशा में वेग = $(x - y)$ किमी/घंटा

अब दूरी = वेग $\times$ समय $\quad \therefore$ समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{वेग}}$

नाव को प्रवाह की विपरीत दिशा में 16 किमी दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{16}{x-y}$ घंटा

नाव को प्रवाह की दिशा में 24 किमी दूरी तय करने में लगनेवाला समय = $\frac{24}{x+y}$ घंटा

प्रथम शर्त के अनुसार

$$\frac{16}{x-y} + \frac{24}{x+y} = 6 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

दूसरी शर्त के अनुसार

$$\frac{36}{x-y} + \frac{48}{x+y} = 13 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

समीकरण (I) तथा (II) में $\frac{1}{x-y} = m$ तथा $\frac{1}{x+y} = n$ रखकर निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं ।

$16m + 24n = 6$ . . . (III)

$36m + 48n = 13$ . . . (IV)

समीकरण (III) तथा (IV) को हल करने पर $m = \frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{12}$

m तथा n का मान पुन: रखने पर निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं ।

$x - y = 4$ . . . (V)

$x + y = 12$ . . . (VI)

समीकरण (V) तथा (VI) हल करने पर $x = 8$, $y = 4$ यह मान प्राप्त होता है ।

$\therefore$ नाव की स्थिर जल में वेग = 8 किमी/घंटा और प्रवाह वेग = 4 किमी/घंटा

उदा. (4) कुछ रकम कुछ लड़कों में समान रूप से बाँटी गई । 10 लड़के अधिक हों तो प्रत्येक को 2 रूपये कम मिलते हैं और यदि 15 लड़के कम हों तो प्रत्येक को 6 रु. अधिक मिलते हैं । तो कुल रकम कितनी होगी ? वह रकम कितने लड़कों में बाँटी गई ?

हल : माना लड़कों की संख्या x तथा प्रत्येक को मिलने वाली रकम y है ।

$\therefore$ कुल xy रूपये बाँटे गए ।

प्रथम शर्त के अनुसार

$(x + 10)(y - 2) = xy$

$xy - 2x + 10y - 20 = xy$

$-2x + 10y = 20$

$-x + 5y = 10$ . . . (I)

दूसरी शर्त के अनुसार

$(x - 15)(y + 6) = xy$

$xy + 6x - 15y - 90 = xy$

$6x - 15y = 90$

$2x - 5y = 30$ . . . (II)

समीकरण (I) और समीकरण (II) को जोड़ने पर

$$\begin{array}{rl} & -x + 5y = 10 \\ + & \;\; 2x - 5y = 30 \\ \hline & \quad x = 40 \end{array}$$

$x = 40$ का मान समीकरण (I) में रखने पर

$-x + 5y = 10$

$\therefore -40 + 5y = 10$

$\therefore 5y = 50$

$\therefore \quad y = 10$

कुल रकम $= xy = 40 \times 10 = 400$ रु.

$\therefore$ 40 लड़कों को 400 रूपये समान रूप से बाँटे गए ।

उदा. (5) तीन अंकों वाली एक संख्या उसके अंकों के योगफल की 17 गुनी है । उस संख्या में 198 जोड़ने पर प्राप्त संख्या अंकों के विपरीत क्रम में मिलती है । इसी प्रकार इकाई स्थान और सैकड़ा के स्थान के अंकों का योगफल बीच के अंक की अपेक्षा 1 कम है तो वह तीन अंकों वाली संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना सैकड़ा के स्थान का अंक x तथा इकाई स्थान का अंक y है ।

दहाई के स्थान का (बीच का) अंक = इकाई स्थान और सैकड़े के स्थान के अंकों के योगफल से 1 अधिक है ।

सैकड़ा	दहाई	इकाई
x	$x + y + 1$	y

$\therefore$ तीन अंकोंवाली संख्या $= 100x + 10(x + y + 1) + y$

$= 100x + 10x + 10y + 10 + y \quad = 110x + 11y + 10$

इन संख्याओं के अंकों का योगफल $= x + (x + y + 1) + y = 2x + 2y + 1$

$\therefore$ प्रथम शर्त के अनुसार

तीन अंकोंवाली संख्या $= 17 \times$ (अंको का योग)

$= 110x + 11y + 10 = 17 \times (2x + 2y + 1)$

$110x + 11y + 10 = 34x + 34y + 17$

$76x - 23y = 7 \quad . . . \quad$ (I)

दी गई संख्या में अंक विपरीत (उलटे) क्रम में लिखने पर प्राप्त नई संख्या

$= 100y + 10(x + y + 1) + x = 110y + 11x + 10$

दी गई संख्या $= 110x + 11y + 10$

दी गई दूसरी शर्त के अनुसार, दी गई संख्या + 198 = अंक विपरीत क्रम में रखने पर प्राप्त संख्या

$110x + 11y + 10 + 198 = 110y + 11x + 10$

$99x - 99y = -198$

$x - y = -2$

अर्थात $x = y - 2 \quad . . . \quad$ (II)

समीकरण (II) से प्राप्त x का मान समीकरण (I) में रखने पर,

$\therefore 76(y - 2) - 23y = 7$

$\therefore 76y - 152 - 23y = 7$

$53y = 159$

$\therefore \quad y = 3 \qquad \therefore$ इकाई स्थान का अंक = 3

$y = 3$ यह मान समीकरण (II) में रखने पर

$x = y - 2$

$\therefore \quad x = 3 - 2 = 1$

$\therefore \qquad x = 1 \qquad \therefore$ सैकड़ा स्थान का अंक = 1

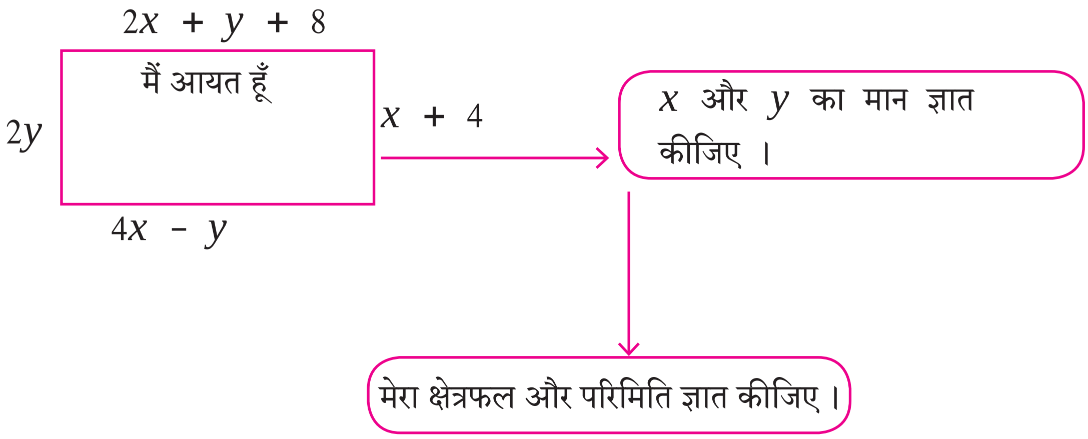
दहाई स्थान का अंक = बीच का अंक = $x + y + 1 = 3 + 1 + 1 = 5$

$\therefore$ दी गई तीन अंकोवाली संख्या = 153.

प्रश्नसंग्रह 1.5

1. दो संख्याओं का अंतर 3 है । बड़ी संख्या का तीन गुना और छोटी संख्या के दुगुने का योगफल 19 हो तो वह संख्या ज्ञात कीजिए ।

2. कृति पूर्ण कीजिए ।



3. पिता की आयु में पुत्र की आयु का दुगुना जोड़ने पर योगफल 70 प्राप्त होता है और पुत्र की आयु में पिता की आयु का दुगुना जोड़ने पर 95 प्राप्त होता है तो दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

4. किसी भिन्न का हर उसके अंश के दुगुने से 4 अधिक है । अंश और हर दोनों में से 6 घटाने पर हर, अंश का 12 गुना होता है तो वह भिन्न ज्ञात कीजिए ।

5. 10 टन क्षमतावाले मालवाहक ट्रक में A और B ऐसे दो प्रकार के बक्से भरे हैं। यदि A प्रकार के 150 बक्से तथा B प्रकार के 100 बक्से भरे हैं तो ट्रक की 10 टन की क्षमता पूर्ण होती है। यदि A प्रकार के 260 बक्से भरें तब उस ट्रक की 10 टन क्षमता को पूर्ण करने के लिए B प्रकार के 40 बक्से लगते हैं, तो प्रत्येक प्रकार के बक्सों का भार ज्ञात कीजिए ।

6.* विशाल ने 1900 किमी के सफर में कुछ दूरी बस से और कुछ दूरी हवाई जहाज से पूरी की । बस का औसत वेग 60 किमी/घंटा है तथा हवाई जहाज का औसत वेग 700 किमी/घंटा है । यदि इस सफर को उसने 5 घंटे में पूरा किया हो तो विशाल ने बस से कितने किमी सफर तय किया ?

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. निम्नलिखित प्रश्नों के लिए दिए गए विकल्पों में से उचित विकल्प को चुनिए ।

(1) $4x + 5y = 19$ का आलेख खींचने के लिए $x = 1$ हो तो y का मान ज्ञात कीजिए ।

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) −3

(2) x तथा y चरांक वाले युगपत समीकरण के लिए यदि $D_x = 49$, $D_y = -63$ तथा $D = 7$ हो तो x = कितना ?

(A) 7 (B) −7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{-1}{7}$

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}$ इस निश्चयक का मान ज्ञात कीजिए ।

(A) −1 (B) −41 (C) 41 (D) 1

(4) $x + y = 3$; $3x - 2y - 4 = 0$ इस युगपत समीकरण को हल करने के लिए D का मान कितना होगा ?

(A) 5 (B) 1 (C) −5 (D) −1

(5) $ax + by = c$; तथा $mx + ny = d$ इस युगपत समीकरण में यदि $an \neq bm$ तो दिए गए समीकरण का

(A) एक ही हल होगा (B) हल नहीं होगा

(C) असंख्य हल होंगे (D) सिर्फ दो हल होंगे

2. $2x - 6y = 3$ इस समीकरण का आलेख खींचने के लिए सारिणी पूर्ण कीजिए ।

x	−5	☐
y	☐	0
(x, y)	☐	☐

3. निम्नलिखित युगपत समीकरणों को आलेख विधि से हल कीजिए ।

(1) $2x + 3y = 12$; $x - y = 1$

(2) $x - 3y = 1$; $3x - 2y + 4 = 0$

(3) $5x - 6y + 30 = 0$; $5x + 4y - 20 = 0$

(4) $3x - y - 2 = 0$; $2x + y = 8$

(5) $3x + y = 10$; $x - y = 2$

4. निम्नलिखित निश्चयकों का मान ज्ञात कीजिए ।

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

5. निम्नलिखित युगपत समीकरणों को क्रेमर की पद्धति से हल कीजिए ।

(1) $6x - 3y = -10$; $3x + 5y - 8 = 0$

(2) $4m - 2n = -4$; $4m + 3n = 16$

(3) $3x - 2y = \frac{5}{2}$; $\frac{1}{3}x + 3y = -\frac{4}{3}$

(4) $7x + 3y = 15$; $12y - 5x = 39$

(5) $\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x-y}{4}$

6. निम्नलिखित युगपत समीकरण हल कीजिए ।

(1) $\frac{2}{x}+\frac{2}{3y}=\frac{1}{6}$; $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=0$ (2) $\frac{7}{2x+1}+\frac{13}{y+2}=27$; $\frac{13}{2x+1}+\frac{7}{y+2}=33$

(3) $\frac{148}{x}+\frac{231}{y}=\frac{527}{xy}$; $\frac{231}{x}+\frac{148}{y}=\frac{610}{xy}$ (4) $\frac{7x-2y}{xy}=5$; $\frac{8x+7y}{xy}=15$

(5) $\frac{1}{2(3x+4y)}+\frac{1}{5(2x-3y)}=\frac{1}{4}$; $\frac{5}{(3x+4y)}-\frac{2}{(2x-3y)}=-\frac{3}{2}$

7. निम्नलिखित प्रश्न हल कीजिए ।

(1) किसी दो अंकोंवाली संख्या में उसके अंकों का स्थान परस्पर बदलने पर प्राप्त संख्या को जोड़ने पर योगफल 143 आता है। यदि दी गई संख्या के इकाई के स्थान का अंक, दहाई स्थान के अंक से 3 अधिक हो तो दी गई मूल संख्या कौन-सी है ? उत्तर ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए ।

माना इकाई स्थान का अंक = x

दहाई स्थान का अंक = y

$\therefore$ मूल संख्या = $\square\, y + x$

अंकों के परस्पर स्थान परिवर्तन से प्राप्त संख्या = $\square\, x + y$

प्रथम शर्त के अनुसार : दो अंकोंवाली संख्या + अंकों के स्थान परिवर्तन से प्राप्त संख्या = 143

$\boxed{10x + y} + \square = 143$

$\square\, x + \square\, y = 143$

$x + y = \square$ . . . . . (I)

दूसरी शर्त के अनुसार,

इकाई स्थान का अंक = दहाई स्थान का अंक + 3

$x = \square + 3$

$\therefore \quad x - y = 3$ . . . . . (II)

(I) तथा (II) को जोड़ने पर

$2x = \square \qquad \therefore \; x = 8$

$x = 8$ समीकरण (I) में रखने पर

$x + y = 13$

$8 + \square = 13$

$y = \square$

मूल संख्या $= 10\,y + x$

$= \square + 8 = 58$

(2) कांताबेन ने दुकान से डेढ़ किलो चाय की पत्ती तथा पाँच किलो शक्कर खरीदी । दुकान जाने-आने के लिए उन्हें रिक्शा का किराया 50 रूपये देना पड़ा । ऐसे कुल 700 रूपये खर्च हुए । बाद में उन्हें समझ में आया कि यह वस्तुएँ ऑनलाइन ऑर्डर देकर भी उसी दर पर ही घर पहुँच मिलती हैं । अगले महीने उन्होंने 2 किलोग्राम चाय की पत्ती तथा 7 किलोग्राम शक्कर ऑनलाईन मँगवाई तब उन्होंने 880 रूपये खर्च किए । चाय की पत्ती और शक्कर का प्रति किलोग्राम दर ज्ञात कीजिए।

(3)

अनुष्का के पास 100 रुपयों के नोट x तथा 50 रुपयों के नोट y

अनुष्का को आनंद द्वारा दिए गए ऊपरोक्त नोटों का रुपयों में मान 2500 है ।
समीकरण I

आनंद ने उसे नोटों की संख्या परस्पर बदल कर पैसे दिए होते तो वह राशि 500 रुपये कम हो जाती ।
समीकरण II

समीकरण हल करके उत्तर लिखिए ।

100 रुपये के नोटों की संख्या □, 50 रूपये के नोटों की संख्या □

(4) मनीषा और सविता की वर्तमान आयु का योगफल 31 वर्ष है । 3 वर्ष पूर्व मनीषा की आयु सविता की उस समय की आयु की चौगुना थी, तो दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

(5) एक कारखाने में कुशल और अकुशल मजदूरों के मजदूरी का अनुपात 5:3 है । एक कुशल और एक अकुशल मजदूर के एक दिन की कुल मजदूरी 720 रूपये है । तो प्रत्येक कुशल मजदूर और अकुशल मजदूरों की मजदूरी ज्ञात कीजिए ।

(6) एक सीधे रास्ते पर A और B दो स्थान हैं । उनके बीच दूरी 30 किमी है । हमीद मोटरसाइकिल से A से B दिशा जाने के लिए निकलता है । उसी समय जोसफ B से A की दिशा में जाने के लिए निकलता है वे दोनों 20 मिनट में एक-दूसरे से मिलते हैं । यदि उसी समय जोसेफ निकलकर विपरीत दिशा में गया होता, तो उसे हमीद तीन घंटे बाद मिलता तो प्रत्येक की गति ज्ञात कीजिए ।

HR3FL6