प्रकरण – ३ : विभाजन मूल्य

आठवून पाहूया :

- 'सरासरी' ह्या शब्दाशी तुम्ही परीचित आहात काय?
- वैयक्तिक खंडित आणि अखंडित श्रेणी यांचा अर्थ सांगता येईल का?
- तुम्ही पूर्वी शिकलेल्या स्थितीमध्य सरासरी प्रकारांची नावे सांगा.

सरासरीचे प्रकार	वैयक्तिक श्रेणी	खंडित श्रेणी	अखंडित श्रेणी
१) अंकगणितीय मध्य	$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$	$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n}$	प्रत्यक्ष पद्धत $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n}$
२) बहुलक	पदमालेत सर्वांत जास्त वेळा येणारी संख्या	सर्वाधिक वारंवारतेचे मूल्य	बहुलक $= l + \left[\frac{f_१ - f_०}{२f_१ - f_० - f_२}\right] \times h$
३) मध्यगा	$M = \frac{n+१}{२}$ च्या पदाचे मूल्य	$M = \frac{n+१}{२}$ च्या पदाचे मूल्य	$M = l + \left(\frac{\frac{n}{२} - cf}{f}\right) \times h$

प्रस्तावना :

'सामग्रीची समान भागांमध्ये विभागणी करणे म्हणजे विभाजन होय'. सामग्रीची विभागणी करताना आवश्यक संख्या समान प्रमाणात विभागणे याला 'विभाजन मूल्य' असे म्हणतात.

केंद्रीय प्रवृत्तीची मापके म्हणजेच सरासरी-अंकगणिय मध्य, मध्यक व बहुलक यांचा अभ्यास यापूर्वी दहावी इयत्तेत केलेला आहे. दिलेली सामग्री चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडून मध्यभागी येणाऱ्या निरीक्षणाचे मूल्य म्हणजे मध्यक होय. 'मध्यक' हे विशेष प्रकारचे विभाजन मूल्य आहे. मध्यकाच्या दोन्ही बाजूला निरीक्षणाची संख्या समान असते. मध्यकाप्रमाणेच चतुर्थके, दशमके व शतमके ही सुद्धा विभाजन मूल्ये आहेत. या मूल्यामध्येही निरीक्षणांची संख्या समान भागात विभागली जाते. सर्वसाधारणपणे विभाजनमूल्ये ही भागक(भाजक) म्हणून ओळखली जातात. विभाजन मूल्ये हा वर्णनात्मक संख्याशास्त्रातील एक भाग आहे.

लोकसंख्या, बेकारी, दारिद्र्य या प्रकरणांमध्ये आर्थिक सामग्रीचे विश्लेषण करताना विभाजन मूल्यांचा वापर कसा करता येईल याची ओळख विद्यार्थ्यांना या प्रकरणात करून देत आहोत.

तुम्हांला माहित आहे का?

संख्याशास्त्र दिन : प्रा. प्रसन्त चंद्र महालनोबीस हे भारतीय संख्याशास्त्रज्ञ होते. त्यांनी भारताचा दुसऱ्या पंचवार्षिक योजनेत (१९५६-६१) औद्योगिकरणाची रचना तयार केली. यालाच 'महालनोबीस प्रारूप' (model) असे म्हणतात.

पी. सी. महालनोबीस यांनी दोन सामग्री संचाची तुलनात्मक गणना करण्यासाठी मापन तयार केले. यालाच 'महालोबनीस अंतर गणना' असे म्हटले जाते. तसेच त्यांनी वेगवेगळ्या गटातील लोकांच्या सामाजिक व आर्थिक परिस्थितीची तुलना करण्यासाठी 'भाजक आलेखी विश्लेषण' ही संख्याशास्त्रीय पद्धत तयार केली. आर्थिक नियोजन व संख्याशास्त्रीय विकास या क्षेत्रातील त्यांच्या उल्लेखनीय योगदानाची दखल घेऊन भारत सरकारने २९ जून हा त्यांचा जन्मदिन 'संख्याशास्त्र दिन' म्हणून घोषित केला. राष्ट्रीय पातळीवर दरवर्षी हा दिवस 'संख्याशास्त्र दिन' म्हणून विशेष दिन साजरा केला जातो.

विभाजन मूल्यांची गरज :

एखादी सामग्री चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडली असता तिच्या टोकाकडील संख्या म्हणजे बाह्यवर्धक मूल्य होय. अशा किमती वेगळ्या पडतात. त्यामुळे अशा सांख्यिकिय माहितीचे सरासरीने केलेले वाचन बहुधा चुकीचे होते. यावर मात करण्यासाठी विभाजनमूल्यांचा वापर केला जातो. जसे की मध्यक, चतुर्थक, दशमक आणि शतमक.

हे कायम लक्षात ठेवा :

दुसरे चतुर्थक (Q_2) = पाचवे दशमक (D_5) = पन्नासावे शतमक (P_{50}) = मध्यगा

तुम्हाला माहीत हवे :

चतुर्थक, दशमक आणि शतमक यांची अर्थशास्त्रातील व्यवहारिक उपयोग :

- चतुर्थकांचा उपयोग सर्व प्रकारच्या अर्थशास्त्रीय सांख्यिकीय आकडेवारीशी संबंधित आर्थिक माहिती गोळा करण्यासाठी होतो.
- रोजगारातील चढउतार, चलनवाढ अशा आर्थिक बदलांमधील वैयक्तिक उत्पन्न गटांमधील बदलांचा तौलनिक अभ्यास करण्यासाठी उत्पन्न चतुर्थक काढणे ही अतिशय वस्तूनिष्ठ पद्धती आहे.
- वित्त आणि अर्थशास्त्रामध्ये दशमकांची व्यावहारिक उपयुक्तता भरपूर आहे. आर्थिक विषमता, दारिद्र्यरेषेचे मोजमाप, दुष्काळजन्य परिस्थिती इत्यादींचा अभ्यास करण्यासाठी शासनाकडून 'दशमक पद्धती' वापरली जाते.
- दशमकांचा वापर गुंतवणूक क्षेत्रामध्ये विशेषकरून म्युच्युअल फंडासारख्या पोर्टफोलीओ गुंतवणूक क्षेत्राची कामगिरी अभ्यासण्यासाठी केला जातो.
- मूल्यमापन चाचण्या, आरोग्य निर्देशांक, कौटुंबिक उत्पन्न, कौटुंबिक संपत्ती, शतमक रोजगार इत्यादींच्या मापनासाठी शतमके वापरली जातात.
- शतमकांचा उपयोग विविध मापदंड तसेच आधारभूत हेतूंची आखणी करण्यासाठी होतो.

हे शिकूया :

चतुर्थक (Quartiles) :

अर्थ : ज्या संख्या संपूर्ण निरीक्षणाचे समान चार भाग करतात त्यांना 'चतुर्थके' असे म्हणतात. चतुर्थके तीन असतात. हे या तीन मूल्यांना अनुक्रमे पहिले चतुर्थक, दुसरे चतुर्थक आणि तिसरे चतुर्थक असे म्हणतात. दुसरे चतुर्थक म्हणजे मध्यक/मध्यगा असते. सर्वसाधारणपणे चंतुर्थक काढण्यासाठी संख्या श्रेणी चढत्या क्रमाने जोडली जाते.

(१) $Q_{१}$ (२) $Q_{२}$ (३) $Q_{३}$ (४)

अ) सामान्यतः वैयिक्तिक श्रैणी आणि खंडित श्रेणीसाठी खालील सूत्रे वापरली जातात.

$$Q_i = i\left(\frac{n+१}{४}\right) \text{ च्या पदाचे मूल्य} \qquad i = १, २, ३$$

ब) अखंडित वारंवारिता वितरण दिले असताना खालील सूत्राचा वापर केला जातो.

$$Q_i = l + \left(\frac{\frac{in}{४} - cf}{f}\right) \times h \qquad i = १, २, ३$$

l = चतुर्थक वर्गाची कनिष्ठ मर्यादा

f = चतुर्थक वर्गाची वारंवारता

cf = चतुर्थक वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची संचित वारंवारता

n = एकूण वारंवारता

h = चतुर्थक वर्गाची वरिष्ठ मर्यादा – चतुर्थक वर्गाची कनिष्ठ मर्यादा

चतुर्थकाची गणना

सोडवलेले उदाहरणार्थ

अ) वैयक्तिक श्रेणी :

१) प्रथम सत्रातील परीक्षेत विद्यार्थ्यांना मिळालेले गुण पुढीलप्रमाणे. त्यावरून पहिले चतुर्थक व तिसरे चतुर्थक काढा.

४०, ८५, ८४, ८३, ८२, ६९, ६८, ६५, ६४, ५५, ४५

रीत : प्रथम संख्या चढत्या क्रमाने मांडू : ४०, ४५, ५५, ६४, ६५, ६८, ६९, ८२,८३,८४,८५

n = एकूण संख्येचे निरीक्षण

$n = ११$

$$Q_{१} = \left(\frac{n+१}{४}\right) \text{ च्या पदाचे मूल्य}$$

$$Q_{१} = \left(\frac{११+१}{४}\right) \text{ च्या पदाचे मूल्य}$$

$$Q_{१} = \left(\frac{१२}{४}\right) \text{ च्या पदाचे मूल्य}$$

$Q_{१}$ = ३ च्या पदाचे मूल्य

$Q_{१}$ = तिसऱ्या क्रमांकाची संख्या ५५ आहे.

∴ **पहिले चतुर्थक ($Q_{१}$) = ५५**

तिसरे चतुर्थक :

$Q_३ = ३\left(\frac{n + १}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३ = ३\left(\frac{११ + १}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३ = ३\left(\frac{१२}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३ = ३ \times ३$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३ = ९$ क्रमांकावर ८३ संख्या आहे.

$\therefore$ **तिसरे चतुर्थक ($Q_३$) = ८३**

उत्तर : पहिले चतुर्थक ($Q_१$) = ५५, तिसरे चतुर्थक ($Q_३$) = ८३

२) खालील माहितीच्या आधारे तिसरे चतुर्थक ($Q_३$) काढा.

२०, २८, ३१, १८, १९, १७, ३२, ३३, २२, २१

रीत : प्रथम संख्या चढत्या क्रमाणे मांडू या

१७, १८, १९, २०, २१, २२, २८, ३१, ३२, ३३

एकूण संख्या (n) = १०

$Q_३ = ३\left(\frac{n + १}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३ = ३\left(\frac{१० + १}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३ = \left(३ \times \frac{११}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३ = \left(\frac{३३}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३ = ८.२५$ पदाचे मूल्य

$Q_३ = ८$ व्या पदाचे मूल्य + ०.२५ (९ व्या पदाचे मूल्य − ८ व्या पदाचे मूल्य).

$Q_३ = ३१ + ०.२५ (३२ - ३१)$

$Q_३ = ३१ + ०.२५ \times १$

$\therefore$ **$Q_३$ = ३१.२५**

उत्तर : तिसरे चतुर्थक ($Q_३$) = ३१.२५

ब) खंडित श्रेणी : चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने दिलेल्या निरीक्षणाची मांडणी करून खंडीत श्रेणीची चतुर्थके काढली जातात.

$Q_i = i\left(\frac{n + १}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य $\qquad i = १, २, ३$

१) खालील सामग्रीवरून पहिले चतुर्थक ($Q_१$) व तिसरे चतुर्थक ($Q_३$) काढा.

उत्पन्न (लाख ₹)	५	४	९	१२	१५	६	१०
व्यक्तींची संख्या	८	६	१२	८	६	९	१०

रीत : प्रथम संख्या चढत्या क्रमाने मांडून त्याची संचित वारंवारिता काढा.

उत्पन्न (लाख ₹) (x)	व्यक्तींची संख्या (f)	संचित वारंवारता (cf)
४	६	६
५	८	१४
६	९	२३
९	१२	३५
१०	१०	४५
१२	८	५३
१५	६	५९
	$n = ५९$	

$Q_१ = \left(\frac{n + १}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_१ = \left(\frac{५९ + १}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_१ = \left(\frac{६०}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_१ = १५$ च्या पदाचे मूल्य

संचित वारंवारता १५ ही संचित वारंवारतेच्या २३ या गटामध्ये येते आणि याचे मूल्य ६ लाख ₹ आहे.

$\therefore$ **पहिले चतुर्थक ($Q_१$) = ६ लाख ₹**

$Q_३ = ३\left(\frac{n + १}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३ = ३\left(\frac{५९ + १}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३ = ३\left(\frac{६०}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३ = (३ \times १५)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३ = ४५$

संचित वारंवारता ४५ ही संचित वारंवारतेच्या ४५ या गटामध्ये येते आणि याचे मूल्य १० लाख ₹ आहे.

तिसरे चतुर्थक ($Q_३$) = १० लाख ₹

$\therefore$ **($Q_३$) = १० लाख ₹**

उत्तर : पहिले चतुर्थक ($Q_१$) = ६ लाख ₹, तिसरे चतुर्थक ($Q_३$) = १० लाख ₹

क) अखंडित श्रेणी : अखंडित श्रेणीनुसार पहिले चतुर्थक ($Q_१$) व तिसरे चतुर्थक ($Q_३$) काढताना खालील पायऱ्या वापरल्या जातात.

१) प्रथम संख्या चढत्या व उतरत्या क्रमाने मांडावी.
२) प्रत्येक गटाची वारंवारता त्या–त्या गटासमोर लिहा.
३) संचित वारंवारता काढा.
४) चतुर्थक वर्ग निश्चित करा.

पायरी – I : प्रथम चतुर्थक वर्ग निश्चित करा.

$Q_१ = \left(\frac{n}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३ = \left(\frac{३n}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

पायरी – II :

$$Q_1 = l + \left(\frac{\frac{in}{४} - cf}{f}\right) \times h \qquad i = १, २, ३$$

l = चतुर्थक वर्गाची कनिष्ठ मर्यादा

f = चतुर्थक वर्गाची वारंवारता

cf = चतुर्थक वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची संचित वारंवारता

n = एकूण वारंवारता

h = चतुर्थक वर्गाची वरिष्ठ मर्यादा – चतुर्थक वर्गाची कनिष्ठ मर्यादा

१) खालील सामग्रीचे पहिले चतुर्थक ($Q_१$) आणि तिसरे चतुर्थक ($Q_३$) काढा.

पाऊस – सेमी	२०–३०	३०–४०	४०–५०	५०–६०
वर्षांची संख्या	७	२०	१७	६

पाऊस – सेमी वर्गांतर (x)	वारंवारिता वर्षांची संख्या (f)	संचित वारंवारता (cf)
२०–३०	७	७
३०–४०	२०	२७
४०–५०	१७	४४
५०–६०	६	५०
	n = ५०	

पायरी – I

$Q_१ = \left(\frac{n}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_१ = \left(\frac{५०}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_१$ = (१२.५) च्या पदाचे मूल्य

१२.५ या पदाचे मूल्य २७ या संचित वारंवारिता गटात येते म्हणून त्याचा गट ३०–४० या वर्गामध्ये येते.

l = ३०, f = २०, cf = ७, n = ५०, h = १०

पायरी – II

$$Q_१ = l + \left(\frac{\frac{n}{४} - cf}{f}\right) \times h$$

$$Q_१ = ३० + \left(\frac{\frac{५०}{४} - ७}{२०}\right) \times १०$$

$$Q_१ = ३० + \left(\frac{१२.५ - ७}{२०}\right) \times १०$$

$$Q_१ = ३० + \left(\frac{५.५}{२०}\right) \times १०$$

$$Q_१ = ३० + \left(\frac{५५}{२०}\right)$$

$Q_१$ = ३० + २.७५

$Q_१$ = ३२.७५

∴ **पहिले चतुर्थक ($Q_१$) = ३२.७५**

पायरी – I

$Q_३ = \left(\frac{३n}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३ = \left(\frac{३ \times ५०}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३ = \left(\frac{१५०}{४}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३$ = ३७.५ च्या पदाचे मूल्य

$Q_३$ = ३७.५ च्या पदाचे मूल्य ४०–५० या वर्गामध्ये होते.

l = ४०, f = १७, cf = २७, n = ५०, h = १०

पायरी – II

$$Q_३ = l + \left(\frac{\frac{३n}{४} - cf}{f}\right) \times h$$

$$Q_३ = ४० + \left(\frac{\frac{३\times ५०}{४} - २७}{१७}\right) \times १०$$

$$Q_३ = ४० + \left(\frac{३७.५ - २७}{१७}\right) \times १०$$

$$Q_३ = ४० + \left(\frac{१०.५}{१७}\right) \times १०$$

$$Q_३ = ४० + \frac{१०५}{१७}$$

$Q_३$ = ४० + ६.१८

$Q_३$ = ४६.१८

$\therefore Q_३ = ४६.१८$

उत्तर : पहिले चतुर्थक ($Q_१$) = ३२.७५, तिसरे चतुर्थक ($Q_३$) = ४६.१८

दशमक (Decile) :

ज्या संख्या संपूर्ण निरीक्षणाचे समान दहा भाग करतात, त्यांना 'दशमके' असे म्हणतात. दशमके हे नऊ असतात. सर्वसाधारणपणे दशमक काढण्यासाठी संख्या श्रेणी चढत्या क्रमाने मांडली जाते. दशमकाचे एकूण नऊ भाग असतात. दशमके ही $D_१$ ते $D_९$ अशी मोजली जातात.

अ) वैयक्तिक श्रेणी व खंडित श्रेणी दिलेली असताना दशमके खालील सूत्रा नुसार काढली जातात.

$D_j = j\left(\frac{n+१}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य $\qquad j = १, २...९$

ब) अखंडित वारंवारता वितरण दिलेले असताना खालील सूत्रांचा वापर केला जातो.

$$Dj = l + \left(\frac{\frac{jn}{१०} - cf}{f}\right) \times h \qquad j = १, २...९$$

D = दशमक

l = दशमक वर्गाची कनिष्ठ मर्यादा

f = दशमक वर्गाची वारंवारता

cf = दशमक वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची संचित वारंवारता

h = दशमक वर्गाची वरिष्ठ मर्यादा – दशमक वर्गाची कनिष्ठ मर्यादा

दशमकाची गणना

सोडवलेले उदाहरण

अ) वैयक्तिक श्रेणी :

१) खालील सामग्रीचा चौथे दशमक ($D_४$) आणि आठवे दशमक ($D_८$) शोधा.

१०, १५, ७, ८, १२, १३, १४, ११, ९

रीत : संख्या प्रथम चढत्या क्रमाने मांडू.

७, ८, ९, १०, ११, १२, १३, १४, १५

$D_४ = ४\left(\frac{n+१}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_४ = ४\left(\frac{९+१}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_४ = ४\left(\frac{१०}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_४ = ४ \times १$ च्या पदाचे मूल्य

$D_४ = ४$ च्या पदाचे मूल्य

$D_४$ = चौथ्या दशमकाचे मूल्य ($D_४$) = १०

$\therefore$ **$D_४$ = १०**

आठव्या दशमकाची गणना

$D_८ = ८\left(\frac{n+१}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_८ = ८\left(\frac{९+१}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_८ = ८ \times \left(\frac{१०}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_८ = \left(\frac{८०}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_८ = (८ \times १)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_८ = ८$ च्या पदाचे मूल्य = १४

$\therefore$ **$D_८$ = १४**

उत्तर : चौथे दशमक ($D_४$) = १०, आठवे दशमक ($D_८$) =१४

२) खालील माहितीच्या आधारे आठवे दशमक ($D_८$) काढा.

उदाहरण : १४, १३, १२, ११, १५, १६, १८, १७, १९, २०

रीत : प्रथम संख्या चढत्या क्रमाणे मांडू या

११, १२, १३, १४, १५, १६, १७, १८, १९, २०

पदाची एकूण संख्या (n) = १०

$D_८ = ८\left(\frac{n+१}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_८ = ८\left(\frac{१०+१}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_८ = ८\left(\frac{११}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_८ = (८ \times १.१)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_८ = (८.८)$ पदाचे मूल्य

$D_८$ = ८ व्या पदाचे मूल्य + ०.८ (९ व्या पदाचे मूल्य – ८ व्या पदाचे मूल्य).

$D_८ = १८ + ०.८\ (१९ - १८)$

$D_८ = १८ + ०.८ \times १$

$\therefore$ **$D_८$ = १८.८**

उत्तर : आठवे दशमक ($D_८$) = १८.८

ब) खंडित श्रेणी :

१) खालील सामग्रीवरून दुसरे दशमक ($D_२$) व चौथे दशमक ($D_४$) काढा.

गुण	१०	२०	३०	४०	५०	६०
विद्यार्थी संख्या	५	६	४	५	१०	९

गुण	विद्यार्थी संख्या (*f*)	संचित वारंवारता *cf*
१०	५	५
२०	६	११
३०	४	१५
४०	५	२०
५०	१०	३०
६०	९	३९
	n = ३९	

दुसऱ्या दशमकाची ($D_२$) गणना :

$D_२ = २\left(\frac{n + १}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_२ = २\left(\frac{३९ + १}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_२ = २\left(\frac{४०}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_२ = २ \times ४$ च्या पदाचे मूल्य

$D_२ = ८$ च्या पदाचे मूल्य

८ ही संख्या संचित वारंवारतेच्या ११ या संख्येच्या जवळ येते त्यामुळे त्याचे मूल्य संलग्नश्रेणी २० मध्ये येते.

∴ दुसरे दशमक $D_२$ = २० गुण

∴ $\mathbf{D_२ = २०}$

$D_४$ गणना :

$D_४ = ४\left(\frac{n + १}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_४ = ४\left(\frac{३९ + १}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_४ = ४\left(\frac{४०}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_४ = ४ \times ४$ च्या पदाचे मूल्य

१६ ही संख्या संचित वारंवारता २० या संख्येच्या जवळ येते त्यामुळे त्यास संलग्नश्रेणी मूल्य ४० येते

चौथे दशमक ($D_४$) = ४० गुण

∴ $\mathbf{D_४ = ४०}$

उत्तर : दुसरे दशमक ($D_२$) = २०, चौथे दशमक ($D_४$) = ४०

क) अखंडित श्रेणी :

चतुर्थकासाठी दिलेल्या अखंडित श्रेणीमधील पायऱ्यांचा येथे ही वापर करा.

१) वर्ग चाचणीमध्ये १०० विद्यार्थ्यांच्या गुणांच्या माहितीवरून पाचवे दशमक ($D_५$) आणि सातवे दशमक ($D_७$) काढा.

गुण	०-१०	१०-२०	२०-३०	३०-४०	४०-५०
विद्यार्थी संख्या	१०	१०	४०	२०	२०

गुण	विद्यार्थी संख्या	संचित वारंवारता
०-१०	१०	१०
१०-२०	१०	२०
२०-३०	४०	६०
३०-४०	२०	८०
४०-५०	२०	१००
	n = १००	

पाचव्या दशमकाची ($D_५$) गणना :

पायरी – I

$D_५ = \left(\frac{५n}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_५ = \left(\frac{५ \times १००}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_५ = \left(\frac{५००}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_५$ = ५० च्या पदाचे मूल्य

५० ही संख्या संचित वारंवारता ६० च्या अंतर्गत येते. त्याचा गुण वर्ग २०-३० आहे.

∴ l = २० f = ४० cf = २० n = १०० h = १०

पायरी – II

$$D_५ = l + \left(\frac{\frac{५n}{१०} - cf}{f}\right) \times h$$

$$D_५ = २० + \left(\frac{\frac{५ \times १००}{१०} - २०}{४०}\right) \times १०$$

$$D_५ = २० + \left(\frac{\frac{५००}{१०} - २०}{४०}\right) \times १०$$

$$D_५ = २० + \left(\frac{५० - २०}{४०}\right) \times १०$$

$$D_५ = २० + \left(\frac{३०}{४०}\right) \times १०$$

$D_{५} = २० + \frac{३००}{४०}$

$D_{५} = २० + ७.५$

$D_{५} = २७.५$

$\therefore$ **$D_{५}$ = २७.५**

सातव्या दशमकाची ($D_{७}$) गणना :

पायरी – I

$D_{७} = \left(\frac{७n}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_{७} = \left(\frac{७ \times १००}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_{७} = \left(\frac{७००}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$D_{७}$ = ७० च्या पदाचे मूल्य

७० ही संख्या संचित वारंवारता ८० च्या अंतर्गत येते. त्याचा गुण वर्ग ३० – ४० हा आहे.

$\therefore l = ३० \quad f = २० \quad cf = ६० \quad n = १०० \quad h = १०$

पायरी – II

$$D_{७} = l + \left(\frac{\frac{७n}{१०} - cf}{f}\right) \times h$$

$$D_{७} = ३० + \left(\frac{\frac{७ \times १००}{१०} - ६०}{२०}\right) \times १०$$

$$D_{७} = ३० + \left(\frac{\frac{७००}{१०} - ६०}{२०}\right) \times १०$$

$$D_{७} = ३० + \left(\frac{७० - ६०}{२०}\right) \times १०$$

$$D_{७} = ३० + \left(\frac{१०}{२०}\right) \times १०$$

$$D_{७} = ३० + \left(\frac{१००}{२०}\right)$$

$D_{७} = ३० + ५$

$D_{७}$ = ३५ गुण

$\therefore$ **$D_{७}$ = ३५ गुण**

उत्तर : पाचवे दशमक $D_{५}$ = २७.५ गुण, पाचवे दशमक $D_{७}$ = ३५ गुण

शतमके (Percentiles) :

ज्या संख्या संपूर्ण निरीक्षणाचे समान शंभर भाग करतात. त्यांना 'शतमके' असे म्हणतात. शतमके ही ९९ असतात. म्हणजेच ९९ बिंदूच्या प्रत्येक मूल्याला शतमके असे म्हणतात. ती $P_{१}, P_{२}, ... P_{९९}$ अशी दर्शवितात. सर्वसाधारणपणे शतमक काढण्यासाठी संख्याश्रेणी चढत्या क्रमाने मांडली जाते.

अ) वैयक्तिक श्रेणी व खंडित श्रेणी दिलेली असताना शतमके खालील सूत्रानुसार काढली जातात.

$P_k = k\left(\frac{n + १}{१००}\right)$ च्या पदाचे मूल्य $\qquad k = १, २, ३....९९$

ब) अखंडित वारंवारिता वितरण दिलेले असताना खालील सूत्राचा वापर केला जातो.

$$P_k = l + \left(\frac{\frac{kn}{१००} - cf}{f}\right) \times h \qquad k = १, २, ३....९९$$

P = शतमक

l = शतमक वर्गाची कनिष्ठ मर्यादा

f = शतमक वर्गाची वारंवारता

cf = शतमक वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची संचित वारंवारता

h = शतमक वर्गाची वरिष्ठ मर्यादा – शतमक वर्गाची कनिष्ठ मर्यादा

अ) वैयक्तिक श्रेणी : खालील माहितीवरून चाळीसावे शतमक ($P_{४०}$) काढा.

१०, १५, ८, १६, १९, ११, १२, १४, ९

रीत : प्रथम दिलेली माहिती चढत्या क्रमाने मांडा.

८, ९, १०,११, १२, १४, १५, १६, १९

$n = ९$

$P_{४०} = ४०\left(\frac{९ + १}{१००}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$P_{४०} = ४० \times \left(\frac{१०}{१००}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$P_{४०} = \left(\frac{४० \times १०}{१००}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$P_{४०} = \left(\frac{४००}{१००}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$P_{४०}$ = ४ क्रमांकाची संख्या ११ येते.

$\therefore$ **$P_{४०}$ = ११**

उत्तर : चाळीसावे शतमक ($P_{४०}$) = ११

२) खालील माहितीच्या आधारे पंच्याऐंशीवावे शतमक ($P_{८५}$) काढा.

७९, ८२, ३६, ३८, ५१, ७२, ६८, ७०, ६४, ६३

रीत : प्रथम संख्या चढत्या क्रमाने मांडू या

३६, ३८, ५१, ६३, ६४, ६८, ७०, ७२, ७९, ८२

पदाची एकूण संख्य (n) = १०

$P_{८५} = ८५\left(\frac{n+१}{१००}\right)$ व्या पदाचे मूल्य

$P_{८५} = ८५\left(\frac{१० + १}{१००}\right)$ व्या पदाचे मूल्य

$P_{८५} = ८५\left(\frac{११}{१००}\right)$ व्या पदाचे मूल्य

$P_{८५}$ = (८५ × ०.११) व्या पदाचे मूल्य

$P_{८५}$ = (९.३५) पदाचे मूल्य

$P_{८५}$ = ९ व्या पदाचे मूल्य + ०.३५ (१० व्या पदाचे मूल्य – ९ व्या पदाचे मूल्य).

$P_{८५}$ = ७९ + ०.३५ (८२ – ७९)

$P_{८५}$ = ७९ + ०.३५ × ३

$P_{८५}$ = ७९ + १.०५

∴ **$P_{८५}$ = ८०.०५**

उत्तर : पंच्याऐंशीवावे शतमक ($P_{८५}$) = ८०.०५

ब) खंडित श्रेणी :

१) खालील सामग्रीवरून $P_{२०}$ आणि $P_{६०}$ शतमके काढा.

उंची – इंचामध्ये	५८	५९	६०	६१	६२	६३	६४
व्यक्तींची संख्या	४	५	६	१०	१२	०२	०१

रीत : प्रथम संख्या चढत्या क्रमाने मांडू या

उंची – इंचामध्ये (x)	व्यक्तींची संख्या (f)	संचित वारंवारता (cf)
५८	४	४
५९	५	९
६०	६	१५
६१	१०	२५
६२	१२	३७
६३	०२	३९
६४	०१	४०
	n = ४०	

$P_{२०} = २०\left(\frac{n+१}{१००}\right)$ व्या पदाचे मूल्य

$P_{२०} = २०\left(\frac{४० + १}{१००}\right)$ व्या पदाचे मूल्य

$P_{२०} = २०\left(\frac{४१}{१००}\right)$ व्या पदाचे मूल्य

$P_{२०} = \left(\frac{२० \times ४१}{१००}\right)$ व्या पदाचे मूल्य

$P_{२०} = \left(\frac{८२०}{१००}\right)$ व्या पदाचे मूल्य

$P_{२०}$ = ८.२

८.२ हे ९ या संचित वारंवारतेच्या गटात येते. त्याचे मूल्य ५९ इंच उंची येते.

∴ **$P_{२०}$ = ५९**

साठाव्या शतमकाची ($P_{६०}$) गणना :

$P_{६०} = ६०\left(\frac{n+१}{१००}\right)$ व्या पदाचे मूल्य

$P_{६०} = ६०\left(\frac{४० + १}{१००}\right)$ व्या पदाचे मूल्य

$P_{६०} = ६०\left(\frac{४१}{१००}\right)$ व्या पदाचे मूल्य

$P_{६०} = \left(\frac{६० \times ४१}{१००}\right)$ व्या पदाचे मूल्य

$P_{६०} = \left(\frac{२४६०}{१००}\right)$ व्या पदाचे मूल्य

२४.६ हे २५ या संचित वारंवारतेच्या गटात येते. त्याचे मूल्य ६१ इंच उंची येते.

∴ **$P_{६०}$ = ६१**

उत्तर : विसावे शतमक $P_{२०}$ = ५९, साठावे शतमक $P_{६०}$ = ६१

क) अखंडित श्रेणी :

चतुर्थकासाठी दिलेल्या अखंडीत श्रेणीमधील पायऱ्यांचा येथे ही वापर करा.

१) खालील माहितीवरून पासष्ठावे शतमक ($P_{६५}$) काढा.

गुण	०-५	५-१०	१०-१५	१५-२०	२०-२५
विद्यार्थी संख्या	३	७	२०	१२	०८

गुण	विद्यार्थी संख्या (f)	संचित वारंवारता (cf)
०-५	३	३
५-१०	७	१०
१०-१५	२०	३०
१५-२०	१२	४२
२०-२५	८	५०
	n = ५०	

पायरी – I

$P_{६५} = \left(\frac{६५n}{१००}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$P_{६५} = \left(\frac{६५ \times ५०}{१००}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$P_{६५} = \left(\frac{३२५०}{१००}\right)$ च्या पदाचे मूल्य

$P_{६५} = ३२.५$

३२.५ हा संचित वारंवारतेच्या ४२ मध्ये येतो. याचा गुण वर्ग १५-२० येतो.

$l = १५ \quad f = १२ \quad cf = ३० \quad n = ५० \quad h = ५$

पायरी – II

$$P_{६५} = l + \left(\frac{\frac{६५n}{१००} - cf}{f}\right) \times h$$

$$P_{६५} = १५ + \left(\frac{\frac{६५ \times ५०}{१००} - ३०}{१२}\right) \times ५$$

$$P_{६५} = १५ + \left(\frac{\frac{३२५०}{१००} - ३०}{१२}\right) \times ५$$

$$P_{६५} = १५ + \left(\frac{३२.५ - ३०}{१२}\right) \times ५$$

$$P_{६५} = १५ + \left(\frac{२.५}{१२}\right) \times ५$$

$$P_{६५} = १५ + \left(\frac{२.५ \times ५}{१२}\right)$$

$$P_{६५} = १५ + \left(\frac{१२.५}{१२}\right)$$

$$P_{६५} = १५ + १.०४$$

$$P_{६५} = १६.०४$$

उत्तर : $P_{६५}$ = १६.०४

स्वाध्याय

प्र. १. योग्य पर्याय निवडा :

१) खालील विधाने चतुर्थकासाठी लागू होत नाही.

अ) प्रथम संख्या चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडून घ्यावी.

ब) यात निरीक्षणाचे समान ४ भाग करता येतात.

क) ते $Q_१$, $Q_२$, $Q_३$ असे सांकेतिक दाखवितात.

ड) $Q_२$ हा सारणीचा मध्यगा असते.

पर्याय : १) अ २) ब आणि क ३) अ, ब आणि क ४) यापैकी नाही

२) खालील सारणीचे सातवे दशमक ($D_७$) कोणते?

सारणी – ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०, ११, १२

पर्याय : १) ७ २) ९ ३) १० ४) १२

३) कोणती विधाने बरोबर ते निवडा.

अ) शतमकात सारणीचे १०० समान भाग करून एकूण ९९ बिंदू येतात.

ब) दशमकाचे एकूण ९ भाग होतात.

क) चतुर्थके $Q_१$, $Q_२$, $Q_३$ असे दर्शविली जातात.

ड) शतमक आणि दशमक अनुक्रमे P आणि D ने दर्शवितात.

पर्याय : १) अ आणि क २) अ आणि ब ३) अ, ब आणि क ४) अ, क आणि ड

प्र.२. योग्य पर्यायांची जोडी ओळखा :

'अ' गट	'ब' गट
१) चतुर्थक	अ) $D_j = j\left(\frac{n+१}{१०}\right)$ च्या पदाचे मूल्य
२) दशमक	ब) $P_k = l + \left(\frac{\frac{kn}{१००} - cf}{f}\right) \times h$
३) शतमक	क) $Q_i = l + \left(\frac{\frac{in}{४} - cf}{f}\right) \times h$

पर्याय : १) १-ब, २-क, ३-अ २) १-क, २-अ, ३-ब

३) १-क, २-ब, ३-अ ४) १-अ, २-ब, ३-क

प्र. ३. अर्थशास्त्रीय परिभाषिक शब्द सांगा :

१) समान भागांमध्ये माहितीचे/आकडेवारीचे विभाजन करण्याची प्रक्रिया....

२) जे मूल्य दिलेल्या सामग्रीचे दहा समान भागांमध्ये विभागणी करते....

३) जे मूल्य संपूर्ण निरीक्षणाचे चार समान भागांमध्ये विभागणी करते....

प्र. ४. खालील उदाहरणे सोडवा :

१) खालील आकडेवारी वरून पहिले चतुर्थक ($Q_१$), चौथे दशमक ($D_४$) व सव्वीसावे शतमक ($P_{२६}$) काढा.

१८, २४, ४५, २९, ४, ७, २८, ४९, १६, २६, २५, १२, १०, ९, ८

२) खालील आकडेवारी वरून तिसरे चतुर्थक ($Q_३$), पाचवे दशमक ($D_५$) आणि पस्तीसावे शतमक ($P_{३५}$) काढा.

उत्पन्न (₹)	१	२	३	४	५	६
कुटुंबाची संख्या	२	५	२०	२५	१५	१२

३) खालील आकडेवारी वरून पन्नासावे शतमक ($P_{५०}$) काढा.

वेतन (₹)	कामगार संख्या
०-२०	४
२०-४०	६
४०-६०	१०
६०-८०	२५
८०-१००	१५

४) खालील आकडेवारी वरून तिसरे चतुर्थक ($Q_३$) काढा.

विक्री संख्या	१०-२०	२०-३०	३०-४०	४०-५०	५०-६०	६०-७०
उद्योग संख्या	२०	३०	७०	४८	३२	५०

५) खालील आकडेवारी वरून सातवे दशमक ($D_७$) काढा.

नफा (₹)	१०-२०	२०-३०	३०-४०	४०-५०	५०-६०	६०-७०
उद्योग संख्या	२०	३०	७०	४८	३२	५०

६) खालील आकडेवारी वरून पंधरावे शतमक ($P_{१५}$) काढा.

गुंतवणूक (₹)	०-१०	१०-२०	२०-३०	३०-४०	४०-५०	५०-६०
उद्योगांची संख्या	५	१०	२५	३०	२०	१०

प्र. ५. खालील विधानाशी सहमत आहात की नाही ते सकारण स्पष्ट करा :

१) विभाजन मूल्यांचा वापर फक्त सैद्धांतिकदृष्ट्या केला जातो, परंतु व्यावहारिक दृष्ट्या नाही.

२) सरासरी मूल्य हे प्रातिनिधिक मूल्यांचे अयोग्य प्रतिनिधित्व करू शकते.

३) 'मध्यगेला' 'दुसरे चतुर्थक' असेही म्हणतात.

प्र. ६. दिलेल्या तक्त्याच्या आधारे विचारलेल्या प्रश्नांची उत्तरे लिहा :

गुण	३०	१०	२०	४०	५०
विद्यार्थी संख्या	१३	४	७	८	६

१) पहिले चतुर्थक ($Q_१$) आणि तिसरे चतुर्थक ($Q_३$) यांची सुत्रे लिहा.

२) दिलेल्या माहितीच्या आधारे श्रेणीतील शेवटच्या मूल्याची संचित वारंवारिता शोधा.

३) वरील माहितीच्या आधारे एकूण वारंवारिता (n) शोधा.

◈◈◈